This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

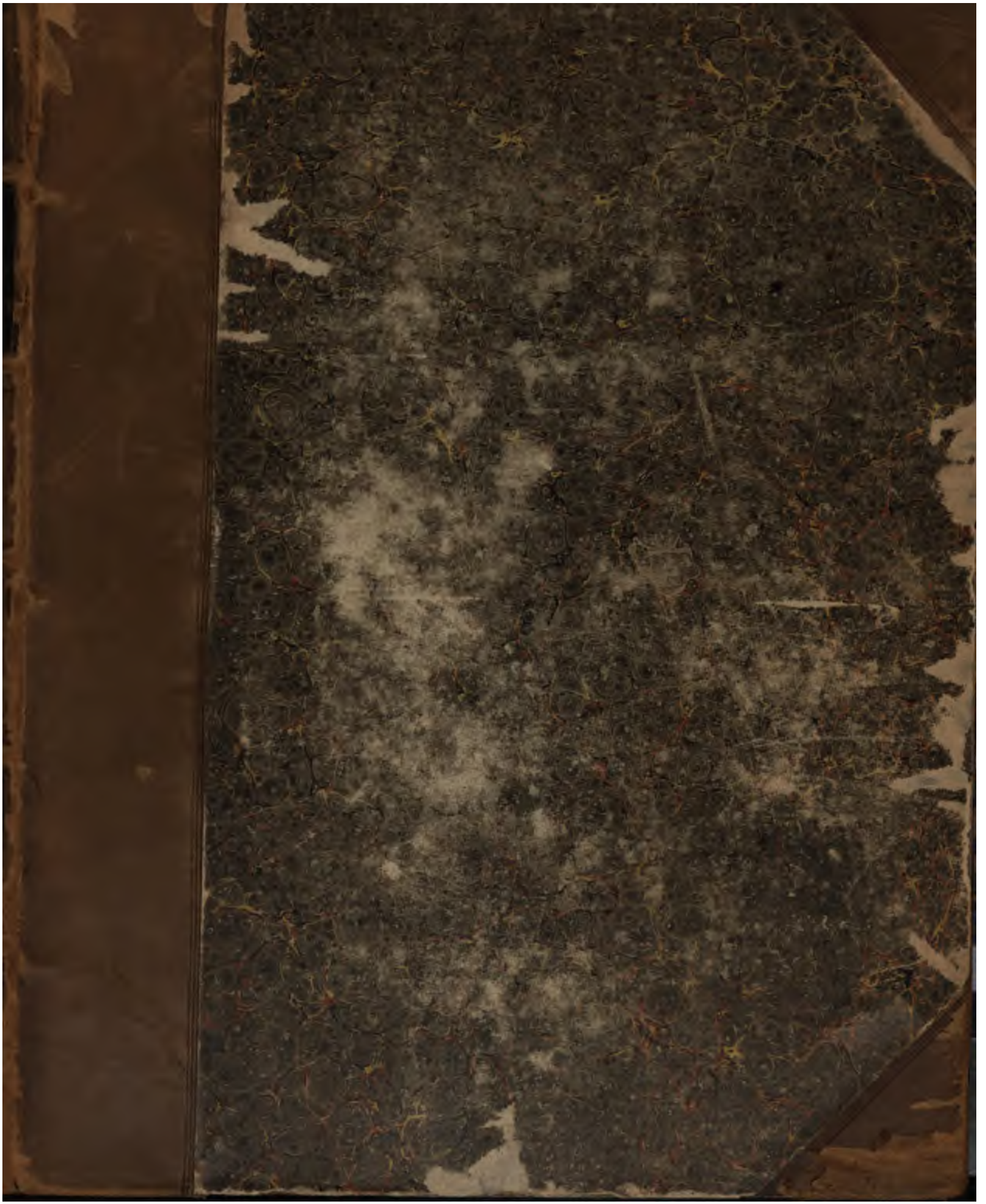
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



ENG
QA300
L2
1813
c.2
TIMOSHENKO
COLL.

H Lamb
1901

[redacted]

THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes ; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.

AVERTISSEMENT.

Cette seconde Édition a plusieurs avantages sur la première qui a paru en 1797; elle est plus correcte; on a mis plus d'ordre dans les matières; et on les a divisées par Chapitres, ce qu'on n'avait pu faire d'abord, cet ouvrage ayant été composé, comme d'un seul jet, à mesure qu'il s'imprimait. Enfin on y a fait différentes additions dont les principales se trouvent dans le Chapitre XIV de la seconde Partie, et dans le Chapitre V de la troisième.

On avait pensé à refondre dans la première Partie de ce Traité les *Leçons sur le Calcul des Fonctions* (*), qui servent de commentaire et de suite à cette Partie; mais comme elles forment un ouvrage à part qui peut être lu séparément, et indépendamment de la *Théorie des Fonctions*, on s'est contenté de les citer dans tous les endroits sur lesquels elles peuvent offrir des éclaircissemens et des développemens utiles.

(*) Ces Leçons ont paru d'abord dans le Recueil des Leçons de l'École normale; mais la seconde Édition, publiée en 1806 chez Courcier, est beaucoup augmentée; c'est celle-ci qu'on a citée.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CET OUVRAGE.

INTRODUCTION.

Des Fonctions en général; des Fonctions primitives et dérivées. Des différentes manières dont on a envisagé le Calcul différentiel. Objet de cet Ouvrage, pag. 1

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la théorie, avec ses principaux usages dans l'analyse.

CHAPITRE PREMIER. DÉVELOPPEMENT en série d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Formation successive des termes de la série. Théorème important sur la nature de ces séries, 7

CHAP. II. Fonctions dérivées; leur notation et leur algorithme, 17

CHAP. III. Fonctions dérivées des puissances, des quantités exponentielles et logarithmiques, des sinus, cosinus, et des expressions composées de ces fonctions simples. Équations dérivées, 20

CHAP. IV. Digression sur la manière de déduire les séries qui expriment les exponentielles, les logarithmes, les sinus, cosinus, et les arcs, de simples considérations algébriques, 31

CHAP. V. Du développement des fonctions, lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps. Des cas singuliers où le développement de la fonction ne procède pas suivant les puissances positives et entières de l'accroissement de la variable, 43

CHAP. VI. Résolution générale des fonctions en séries. Développement des fonctions en séries terminées et composées d'autant de termes qu'on voudra. Moyen d'exprimer les restes depuis un terme quelconque proposé. Théorème nouveau sur ces séries, pag. 54

CHAP. VII. Des Équations dérivées et de leur usage dans l'analyse pour la transformation des fonctions. Théorie générale de ces équations et des constantes arbitraires qui y entrent, 70

CHAP. VIII, Où l'on examine les cas simples dans lesquels on peut passer des fonctions ou des équations dérivées du premier ordre aux fonctions ou aux équations primitives. Des équations linéaires des différens ordres, et de celles qu'on peut rendre linéaires, 80

CHAP. IX. Des valeurs singulières qui ne sont pas comprises dans les équations primitives complètes. Des équations primitives singulières, 92

CHAP. X. De l'emploi des fonctions dérivées dans l'analyse, et de la détermination des constantes arbitraires. Application à la sommation des suites et à la résolution des équations du troisième degré, 101

CHAP. XI, Où l'on donne l'équation primitive d'une équation du premier ordre, dans laquelle les variables sont séparées, mais où l'on ne peut point obtenir directement les fonctions primitives de chacun des deux membres. Propriétés remarquables de ces fonctions primitives, 110

CHAP. XII. Du développement des fonctions de deux variables. De leurs fonctions dérivées. Notation de ces fonctions et conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Loi générale qui règne entre les termes du développement d'une fonction de plusieurs variables, et ceux qui résultent du développement de ces termes eux-mêmes, 125

CHAP. XIII, Où l'on donne la manière de développer les fonctions d'un nombre quelconque de variables en séries terminées, et composées d'autant de termes qu'on voudra, et d'avoir la valeur des restes, 134

CHAP. XIV. Des équations dérivées d'une équation entre trois variables. Des fonctions arbitraires qui entrent dans les équations primitives complètes entre trois variables, 139

CHAP. XV. Formule remarquable pour le développement en série d'une fonction quelconque de l'inconnue z de l'équation $z=x+yfz$, 146

CHAP. XVI. Méthode générale pour trouver l'équation primitive d'une équation du premier ordre entre plusieurs variables, lorsque les fonctions dérivées sont linéaires, et pour trouver l'équation primitive d'une équation quelconque du premier ordre entre trois variables, 152

SECONDE PARTIE.

Application de la théorie des fonctions à la géométrie.

CHAPITRE PREMIER. Des différentes manières dont on a considéré les tangentes. Théorie des tangentes et des contacts de différens ordres, d'après les principes de la géométrie ancienne, pag. 165

CHAP. II. Des lignes droites tangentes, des cercles tangens et du lieu de leurs centres. Des cercles osculateurs et du lieu de leurs centres. Analyse générale du contact des courbes planes. Du contact dans des cas singuliers, et des lignes assymptotes, 171

CHAP. III. Problèmes directs et inverses sur le contact des courbes. Analyse des cas où l'on propose une relation entre les deux élémens du contact du premier ordre. De la courbe représentée par l'équation primitive singulière d'une équation du premier ordre, 186

CHAP. IV. Des contacts du second ordre. Théorie et construction des équations primitives singulières dans les ordres supérieurs. Exemple contenant la théorie analytique des développées, 199

CHAP. V. Des plus grandes et des moindres valeurs des fonctions d'une variable, 209

CHAP. VI. De la mesure des aires, et de la longueur des arcs dans les courbes planes. De la mesure des solidités et de celle des surfaces des conoïdes. Principe général de la solution analytique de ces questions, 215

CHAP. VII. Théorie du contact des courbes à double courbure. Du rayon osculateur, des centres de courbure, et du lieu de ces centres. Des développées des courbes à double courbure. Quadrature et rectification de ces courbes, 224

CHAP. VIII. Des surfaces courbes et de leurs plans tangens. Théorie du contact des surfaces courbes. Des contacts des différens ordres, 234

CHAP. IX. Des sphères osculatrices. Des lignes de plus grande et de moindre courbure. Propriétés de ces lignes, 244

CHAP. X. Solutions des questions dans lesquelles on propose une relation entre les élémens du contact du premier ordre des surfaces courbes. Construction de cette solution. Équation des surfaces développables, 250

CHAP. XI. Des plus grandes et des moindres ordonnées des surfaces courbes. Solution générale des questions de *maximis* et *minimis*. Manière de distinguer les *maxima* des *minima* dans les fonctions de plusieurs variables, pag. 256

CHAP. XII. Des questions de *maximis* et *minimis* qui se rapportent à la méthode des variations. De l'équation commune au *maximum* et au *minimum*; et des caractères propres à distinguer les *maxima* des *minima*. 272

CHAP. XIII. Extension de la méthode précédente, aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Problème de la brachystochrone. Caractères pour distinguer si une fonction proposée est ou non une fonction prime, ou en général une fonction dérivée d'un certain ordre, 287

CHAP. XIV. De la mesure des solidités et des surfaces des corps de figure donnée, 297

TROISIÈME PARTIE.

Application de la théorie des fonctions à la mécanique.

CHAPITRE PREMIER. De l'objet de la mécanique. Du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré. Du mouvement rectiligne en général. Relation entre l'espace, la vîtesse et la force accélératrice, 311

CHAP. II. De la composition des mouvemens, et en particulier de celle de trois mouvemens uniformes. De la composition et décomposition des vîtesses et des forces. De la trajectoire des projectiles dans le vide, 319

CHAP. III. Du mouvement curviligne. Des vîtesses et des forces dans ce mouvement. Équations générales du mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques. De la manière d'éliminer le temps dans ces équations pour trouver la courbe décrite par le corps, 326

CHAP. IV. De la question où il s'agit de trouver la résistance que le milieu doit opposer pour que le projectile décrive une courbe donnée. Analyse de la solution que Newton a donnée de ce problème dans la première édition de ses Principes. Source de l'erreur de cette solution. Distinction entre la méthode des séries et celle des fonctions dérivées, ou du calcul différentiel, 334

CHAP. V. Du mouvement d'un corps sur une surface donnée, ou assujéti à de certaines conditions. Du mouvement de plusieurs corps liés entre eux. Des équations de condition entre les coordonnées de ces différens corps; et de la manière d'en déduire les forces qui résultent de leur action mutuelle. Démonstration générale du principe des vîtesses virtuelles, pag. 350

CHAP. VI. De la loi du mouvement du centre de gravité. De la loi des aires dans la rotation autour d'un axe fixe, ou d'un seul point fixe, ou autour du centre de gravité dans les systèmes libres, 358

CHAP. VII. De la loi des forces vives dans le mouvement d'un système animé par des forces accélératrices quelconques. De la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques. De la perte de ces forces dans le choc des corps durs, ou en général dans les changemens brusques que le système peut éprouver. De la somme des forces vives dans les situations de l'équilibre. Remarques générales sur l'économie de ces forces dans les machines, 370

ADDITION au Chapitre II de la première Partie, pag. 19, 382

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Fautes à corriger.

Page 9, ligne 14, *au lieu de* Chap. IV, *lisez* Chap. V.

Page 171, lignes 2 et 3, dans le titre, *au lieu de* contacts, *lisez* centres.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

INTRODUCTION.

Des Fonctions en général. Des Fonctions primitives et dérivées. Des différentes manières dont on a envisagé le Calcul différentiel. Objet de cet Ouvrage.

On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée

d'une manière quelconque d'une autre quantité. *Leibnitz* et les *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

Lorsqu'à la variable d'une fonction on attribue un accroissement quelconque, en ajoutant à cette variable une quantité indéterminée, on peut par les règles ordinaires de l'algèbre, si la fonction est algébrique, la développer suivant les puissances de cette indéterminée. Le premier terme du développement sera la fonction proposée qu'on appellera *fonction primitive;* les termes suivans seront formés de différentes fonctions de la même variable, multipliées par les puissances successives de l'indéterminée. Ces nouvelles fonctions dépendront uniquement de la fonction primitive dont elles dérivent, et pourront s'appeler *fonctions dérivées.* En général, quelle que soit la fonction primitive, algébrique ou non, elle peut toujours être développée ou censée developpée de la même manière, et donner ainsi naissance à des fonctions dérivées. Les fonctions considérées sous ce point de vue, constituent une analyse d'un genre supérieur à l'analyse ordinaire, par sa généralité et ses nombreux usages; et l'on verra dans cet ouvrage que l'analyse qu'on appelle vulgairement *transcendante* ou *infinitésimale*, n'est au fond que l'analyse des fonctions primitives et dérivées, et que les calculs différentiel et intégral ne sont, à proprement parler, que le calcul de ces mêmes fonctions.

Les premiers géomètres qui ont employé le calcul différentiel, *Leibnitz*, les *Bernoulli*, l'*Hopital*, etc. l'ont fondé sur la considération des quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition qu'on peut regarder et traiter comme égales, les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniment petites à leur égard. Contens d'arriver par les procédés de ce calcul d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, ils ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. Ceux qui les ont suivis, *Euler*, d'*Alembert*, etc., ont cherché à suppléer à ce défaut, en faisant voir, par des applications particulières, que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles, et que leurs rapports, seules quantités qui entrent réellement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies ou indéfinies.

Mais il faut convenir que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et surtout pour être présentée aux commençans; d'ailleurs, il me semble que comme dans le calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule en effet les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes, la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul, suivant lesquels on ne retient dans la différentiation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale.

Newton, pour éviter la supposition des infiniment petits, a considéré les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement, et il a cherché une méthode pour déterminer directement les vîtesses ou plutôt le rapport des vîtesses variables avec lesquelles ces quantités sont produites; c'est ce qu'on appelle, d'après lui, la *méthode des fluxions* ou *le calcul fluxionnel*, parce qu'il a nommé ces vîtesses *fluxions* des quantités. Cette méthode ou ce calcul s'accorde pour le fond et pour les opérations, avec le calcul différentiel, et n'en diffère que par la métaphysique qui paraît en effet plus claire, parce que tout le monde a ou croit avoir une idée de la vîtesse. Mais, d'un côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour objet, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile; de l'autre, il faut avouer qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que la vîtesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vîtesse est variable; et on peut voir par le savant Traité des fluxions de *Maclaurin*, combien il est difficile de démon-

trer rigoureusement la méthode des fluxions, et combien d'artifices particuliers il faut employer pour démontrer les différentes parties de cette méthode.

Aussi *Newton* lui-même, dans son livre des Principes, a préféré, comme plus courte, la méthode des dernières raisons des quantités évanouissantes; et c'est aux principes de cette méthode que se réduisent en dernière analyse les démonstrations relatives à celle des fluxions. Mais cette méthode a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n'en est proprement que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantités; car quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ses termes deviennent l'un et l'autre nuls à-la-fois.

C'est pour prévenir ces difficultés, qu'un habile Géomètre anglais, qui a fait dans l'analyse des découvertes importantes, a proposé dans ces derniers temps, de substituer à la méthode des fluxions jusqu'alors suivie scrupuleusement par tous les géomètres anglais, une autre méthode purement analytique, et analogue à la méthode différentielle, mais dans laquelle, au lieu de n'employer que les différences infiniment petites ou nulles des quantités variables, on emploie d'abord des valeurs différentes de ces quantités, qu'on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division, le facteur que cette égalité rendrait nul. Par ce moyen, on évite à la vérité les infiniment petits et les quantités évanouissantes; mais les procédés et les applications du calcul sont embarrassans et peu naturels, et on doit convenir que cette manière de rendre le calcul différentiel plus rigoureux dans ses principes, lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations. *Voyez* l'ouvrage intitulé : *the residual analysis a new branch of the Algebric art, by* John Landen, *London*, 1764, ainsi que le discours publié par le même auteur, en 1758, sur le même objet.

Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul différentiel, et même dans la dénomination de ce

calcul, montrent, ce me semble, qu'on n'en avait pas saisi la véritable théorie, quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations.

On trouvera de nouvelles considérations sur cet objet dans la première leçon sur le Calcul des fonctions.

Dans un mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, de 1772, et dont l'objet était l'analogie entre les différentielles et les puissances positives, et entre les intégrales et les puissances négatives, j'avançai que la théorie du développement des fonctions en série, contenait les vrais principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou de limites, et je démontrai par cette théorie le théorème de *Taylor*, qui est le fondement de la méthode des séries, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce calcul, ou par la considération des différences infiniment petites.

Depuis, *Arbogast* a présenté à l'Académie des Sciences, un Mémoire où la même idée est exposée avec des développemens et des applications qui lui appartiennent. Mais l'auteur n'ayant encore rien publié sur ce sujet (*), et m'étant trouvé engagé par des circonstances particulières à développer les principes généraux de l'analyse, j'ai rappelé mes anciennes idées sur ceux du calcul différentiel, et j'ai fait de nouvelles réflexions tendantes à les confirmer et à les généraliser; c'est ce qui a occasionné cet Ecrit, que je ne me détermine à publier que par la considération de l'utilité dont il peut être à ceux qui étudient cette branche importante de l'analyse.

Il peut, au reste, paraître surprenant que cette manière d'envisager le calcul différentiel ne se soit pas offerte plus tôt aux géomètres, et surtout qu'elle ait échappé à *Newton*, inventeur de la méthode des séries et de celle des fluxions. Mais nous observerons à cet égard qu'en effet *Newton* n'avait d'abord employé que la simple considération des séries pour résoudre le problème

(*) L'ouvrage que feu *Arbogast* a donné en 1800, sous le titre de *Calcul des Dérivations*, a un objet différent, comme l'auteur en avertit lui-même à la fin de sa préface.

troisième du second livre des Principes, dans lequel il cherche la loi de la résistance nécessaire pour qu'un corps pesant décrive librement une courbe donnée, problème qui dépend naturellement du calcul différentiel ou fluxionnel. On sait que *Jean Bernoulli* trouva cette solution fausse, en la comparant avec celle qui résulte du calcul différentiel; et son neveu, *Nicolas*, prétendit que l'erreur venait de ce que *Newton* avait pris le troisième terme de la série convergente dans laquelle il réduisait l'ordonnée de la courbe donnée, pour la différentielle seconde de cette ordonnée, et le quatrième pour la différentielle troisième, au lieu que, suivant les règles du calcul différentiel, ces termes ne sont, l'un que la moitié, l'autre que la sixième partie des mêmes différentielles. (*Voyez* les Mémoires de l'Académie des Sciences, de 1711, et le tome I des Œuvres de *Jean Bernoulli.*) *Newton*, sans répondre, abandonna entièrement sa première méthode, et donna dans la seconde édition des Principes, une solution différente du même problème, fondée sur la méthode même du calcul différentiel. Depuis, on n'a plus parlé de l'application de la méthode des séries à ce genre de problèmes, que pour avertir de la méprise dans laquelle *Newton* était tombé, et faire sentir la nécessité d'avoir égard à l'observation de *Nicolas Bernoulli.* (*Voyez* l'Encyclopédie, aux articles *différentiel*, *force.*) Mais nous ferons voir que cette méprise ne vient point du fond de la méthode, mais simplement de ce que *Newton* n'a pas tenu compte de tous les termes auxquels il fallait avoir égard; et nous rectifierons de cette manière sa première solution, dont aucun des commentateurs des Principes n'a fait mention.

L'objet de cet Ouvrage est de donner la théorie des fonctions, considérées comme primitives et dérivées; de résoudre par cette théorie, les principaux problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique, qu'on fait dépendre du calcul différentiel; et de donner par là, à la solution de ces problèmes, toute la rigueur des démonstrations des Anciens.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

CHAPITRE PREMIER.

Développement en série d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Formation successive des termes de la série. Théorème important sur la nature de ces séries.

1. Nous désignerons en général par la caractéristique f ou F, placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire, toute quantité dépendante de cette variable, et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi fx ou Fx désignera une fonction de la variable x; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^a, $a+bx$, etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^a)$, $f(a+bx)$, etc. désigneront des fonctions de x^a, de $a+bx$, etc.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de x, y, nous écrirons $f(x,y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x, on y met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et par la théorie

des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$$fx+pi+qi^{2}+ri^{3}+\text{etc.},$$

dans laquelle les quantités p, q, r, etc., coefficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive x, et indépendantes de l'indéterminée i.

2. Mais pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction fx, lorsqu'on y substitue $x+i$ à la place de x, et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de i.

Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne, que je sache, n'a cherché à la démontrer *à priori;* ce qui me paraît néanmoins d'autant plus nécessaire, qu'il y a des cas particuliers où elle ne peut pas avoir lieu. D'ailleurs, le calcul différentiel porte expressément sur cette même supposition, et les cas qui font exception, sont précisément ceux où ce calcul a été accusé d'être en défaut.

Je vais d'abord démontrer que dans la série résultante du développement de la fonction $f(x+i)$, il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particulières.

En effet, il est clair que les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive fx, et il est clair en même temps que la substitution de $x+i$ au lieu de x, ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre de ces radicaux, ni en changer la nature, tant que x et i sont des quantités indéterminées. D'un autre côté, on sait par la théorie des équations, que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc si le développement de la fonction $f(x+i)$ pouvait contenir un terme de la forme $ui^{\frac{m}{n}}$, la fonction fx serait nécessairement

sairement irrationnelle, et aurait par conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+i)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série $fx+pi+qi^{\frac{m}{n}}+\text{etc.}+ui^{\frac{m}{n}}+\text{etc.}$, chaque valeur de fx se combinerait avec chacune des n^{e} valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$; de sorte que la fonction $f(x+i)$ développée, aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde.

Cette démonstration est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruisissent quelques radicaux dans fx, qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x+i)$. Nous examinerons plus bas (chap. IV) ces cas particuliers et les conséquences qui en résultent.

Nous venons de voir que le développement de la fonction $f(x+i)$ ne saurait contenir en général des puissances fractionnaires de i; il est facile de s'assurer aussi qu'il ne pourra contenir non plus des puissances négatives de i.

Car si parmi les termes de ce développement, il y en avait un de la forme $\frac{r}{i^m}$, m étant un nombre entier positif, en faisant $i=0$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infinie lorsque $i=0$; par conséquent il faudrait que fx devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.

3. Nous étant ainsi assurés de la forme générale du développement de la fonction $f(x+i)$, voyons plus particulièrement en quoi ce développement consiste, et ce que signifie chacun de ses termes.

On voit d'abord que si on cherche dans cette fonction ce qui est indépendant de la quantité i, il n'y a qu'à faire $i=0$, ce qui la réduit à fx. Ainsi fx est la partie de $f(x+i)$, qui reste lors-

que la quantité i devient nulle; de sorte que $f(x+i)$ sera égale à fx, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant $i=0$, et qui sera par conséquent, ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i : et comme nous venons de démontrer que dans le développement de $f(x+i)$, il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit, ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de i; elle sera donc de la forme iP, P étant une fonction de x et i, qui ne deviendra point infinie lorsque $i=0$.

On aura donc ainsi

$$f(x+i)=fx+iP;$$

donc $f(x+i)-fx=iP$, et par conséquent divisible par i; la division faite, on aura

$$P=\frac{f(x+i)-fx}{i}.$$

Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i, et qui par conséquent ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on fait $i=0$, p sera une fonction de x sans i; et par un raisonnement semblable au précédent, on prouvera que $P=p+iQ$, iQ étant la partie de P, qui devient nulle lorsque $i=0$, et Q étant une nouvelle fonction de x et i, qui ne devient pas infinie lorsque $i=0$.

On aura donc $P-p=iQ$, et par conséquent divisible par i; la division faite, on aura

$$Q=\frac{P-p}{i}.$$

Soit q la valeur de Q, en y faisant $i=0$, q sera une fonction de x sans i, et la partie de Q, qui devient nulle lorsque i devient nul, sera comme ci-dessus de la forme iR, R étant une fonction de x et i, qui ne deviendra pas infinie lorsque $i=0$, et qu'on trouvera en divisant $Q-q$ par i, et ainsi de suite.

On aura, par ce procédé,

$$f(x+i)=fx+iP,\ P=p+iQ,\ Q=q+iR,\ R=r+iS,\ \text{etc.};$$

donc, substituant successivement

$$f(x+i)=fx+iP=fx+ip+i^2Q=fx+ip+i^2q+i^3R=\text{etc.};$$

ce qui donnera pour le développement de $f(x+i)$, une série de la forme que nous avons supposée au commencement.

4. Soit, par exemple, $fx=\frac{1}{x}$, on aura

$$f(x+i)=\frac{1}{x+i};$$

donc

$$iP=\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x}=-\frac{i}{x(x+i)};\quad P=-\frac{1}{x(x+i)};\quad p=-\frac{1}{x^2};$$

$$iQ=-\frac{1}{x(x+i)}+\frac{1}{x^2}=\frac{i}{x^2(x+i)};\quad Q=\frac{1}{x^2(x+i)};\quad q=\frac{1}{x^3};$$

$$iR=\frac{1}{x^2(x+i)}-\frac{1}{x^3}=-\frac{i}{x^3(x+i)};\quad R=-\frac{1}{x^3(x+i)};\quad r=-\frac{1}{x^4};$$

etc.;

ainsi on aura

$$\frac{1}{x+i}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x(x+i)}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^2(x+i)};$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^3}-\frac{i^3}{x^3(x+i)}=\text{etc.},$$

comme il résulte de la division actuelle.

Prenons encore pour exemple, la fonction irrationnelle $\sqrt{x}$. On aura donc

$$fx=\sqrt{x},\ f(x+i)=\sqrt{(x+i)}=\sqrt{x}+iP;$$

donc

$$iP=\sqrt{(x+i)}-\sqrt{x}=\frac{i}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}};\quad p=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$iQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x+i)}}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]}$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2};$$

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}; \quad q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}};$$

$$iR = Q - q = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{i - 2x + 2\sqrt{x} \times \sqrt{x+i}}{4x\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \frac{i}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{4x\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3};$$

$$R = \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3}; \quad r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}};$$

etc.

De sorte qu'on aura, de cette manière,

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{2\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+i)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}\,[\sqrt{(x+i)} + \sqrt{x}]^3}\, i^3$$

$$= \sqrt{x} + \frac{i}{2\sqrt{x}} - \frac{i^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{etc.}$$

Cette dernière série est celle que l'on trouve par l'extraction actuelle de la racine quarrée ou par la formule du binome.

5. Il serait difficile d'exécuter ces opérations sur des fonctions irrationnelles plus compliquées ; mais en faisant disparaître les irrationnalités par rapport à la quantité i, l'application de la méthode n'aura plus de difficulté.

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent, on partira de l'équation

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + iP,$$

qui étant élevée au carré pour dégager l'i de dessous le signe

radical, devient après la division par i,

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2;$$

faisant $i = 0$, P devient p, et l'on aura

$$1 = 2p\sqrt{x}; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On fera donc $P = p + iQ$, ce qui étant substitué, on aura, après la division par i,

$$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{iQ}{\sqrt{x}} + i^2Q^2.$$

Faisant $i = 0$, Q devient q; donc on aura

$$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0;$$

d'où l'on tire

$$q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}.$$

On fera donc $Q = q + iR$, et ainsi de suite.

On peut, à la vérité, trouver les valeurs de p, q, r, etc. d'une manière plus expéditive, en faisant tout de suite l'équation

$$\sqrt{(x+i)} = \sqrt{x} + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.};$$

l'élevant au carré pour dégager la quantité i de dessous le signe, et comparant ensuite les termes affectés des mêmes puissances de i, pour que cette quantité puisse demeurer indéterminée, comme on le suppose; mais la méthode précédente a l'avantage de ne développer la série qu'autant qu'on veut, et de donner la valeur exacte du reste. En effet, si on voulait, par exemple, s'arrêter au second terme pi, on aurait Qi^2 pour la valeur du reste, et on pourrait déterminer Q par la résolution de l'équation en Q. Dans l'exemple ci-dessus, cette équation est

$$i^2Q^2 + Q\left(2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x} = 0,$$

et pour la résoudre de manière que l'expression de Q ne présente

pas la quantité i au dénominateur, il n'y a qu'à faire $Q=\frac{1}{V}$, ce qui réduira l'équation à cette forme,

$$V^2+4V(2x\sqrt{x}+i\sqrt{x})+4xi^2=0,$$

d'où l'on tire

$$V=-4x\sqrt{x}-2i\sqrt{x}\pm 4x\sqrt{(x+i)};$$

et comme Q ne doit pas devenir infini lorsque $i=0$ (art. 3), il faudra que V ne devienne pas nul dans le même cas; par conséquent, il faudra prendre le signe inférieur du radical; on aura ainsi

$$V=-2\sqrt{x}(2x+i)-4x\sqrt{(x+i)},$$

et de là

$$Q=-\frac{1}{2\sqrt{x}(2x+i)+4x\sqrt{(x+i)}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+i)}+\sqrt{x}]^2},$$

comme plus haut. On en usera de même dans tous les cas semblables.

6. Mais le principal avantage de la méthode que nous avons exposée, consiste en ce qu'elle fait voir comment les fonctions p, q, r, etc. résultent de la fonction principale fx, et surtout en ce qu'elle prouve que les restes iP, iQ, iR, etc. sont des quantités qui doivent devenir nulles lorsque $i=0$; d'où l'on tire cette conséquence importante, que dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$ etc. qui naît du développement de $f(x+i)$, on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de i.

Car, puisque les restes iP, iQ, iR, etc. sont des fonctions de i qui deviennent nulles, par la nature même du développement, lorsque $i=0$, il s'ensuit qu'en considérant la courbe dont i serait l'abscisse, et l'une de ces fonctions l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses; et à moins que ce point ne soit un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre

avec un peu de réflexion, et par un raisonnement analogue à celui de l'article 2, le cours de la courbe sera nécessairement continu depuis ce point; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper, et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée; de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse i correspondant à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée; et alors toute valeur plus petite de i répondra aussi à des ordonnées moindres que la quantité donnée.

On pourra donc prendre i assez petit, sans être nul, pour que $i\mathrm{P}$ soit moindre que fx, ou pour que $i\mathrm{Q}$ soit moindre que p, ou pour que $i\mathrm{R}$ soit moindre que q, et ainsi des autres; et par conséquent pour que $i^2\mathrm{Q}$ soit moindre que ip, ou que $i^2\mathrm{R}$ soit moindre que i^2q, etc.; donc, puisque (art. 3),

$$i\mathrm{P}=ip+i^2q+i^3r+\text{etc.},\quad i^2\mathrm{Q}=i^2q+i^3r+\text{etc.},\quad i^3\mathrm{R}=i^3r+\text{etc.},$$

il s'ensuit qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que chaque terme de la série $fx+ip+i^2q+i^3r+\text{etc.}$ devienne plus grand que la somme de tous les termes suivans; et alors toute valeur de i plus petite que celle-là satisfera toujours à la même condition.

On doit regarder ce théorème comme un des principes fondamentaux de la théorie que nous nous proposons de développer : on le suppose tacitement dans le calcul différentiel et dans celui des fluxions; et c'est par cet endroit qu'on peut dire que ces calculs donnent le plus de prise sur eux, surtout dans leur application aux problèmes géométriques et mécaniques. Les doutes qui pourraient rester sur la démonstration de ce théorème, parce que le procédé que nous avons employé pour trouver les restes $i\mathrm{P}$, $i\mathrm{Q}$, $i\mathrm{R}$, etc. n'est applicable qu'aux fonctions algébriques, seront levés dans le chapitre V, où nous donnerons l'expression générale de ces restes, et la manière d'en déterminer les limites.

7. Il faut remarquer au reste que la méthode que nous venons de donner pour trouver successivement les termes de la série qui

représente une fonction de $x + i$, développée suivant les puissances de i, ne peut s'appliquer en général au développement d'une fonction de x et de i, qu'autant que cette fonction est susceptible d'être réduite en une série qui procède suivant les puissances positives et entières de i. Car le raisonnement de l'article 2, par lequel nous avons prouvé que toute fonction de $x + i$ est, généralement parlant, susceptible de cette forme, ne pourrait pas s'appliquer à une fonction quelconque de x et i. Mais dans les cas où cette réduction est possible, on pourra toujours appliquer à la série résultante du développement suivant les puissances ascendantes de i, la conséquence que nous en avons tirée dans l'article précédent, savoir, que la quantité i pourra être prise assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que tous ceux qui le suivent, pris ensemble.

CHAPITRE

CHAPITRE II.

Fonctions dérivées; leur notation et leur algorithme.

8. Nous avons vu que le développement de $f(x+i)$ donne naissance à différentes autres fonctions p, q, r, etc., toutes dérivées de la fonction principale fx, et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

et supposons que l'indéterminée x devienne $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i; il est visible que $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$, et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement $i+o$ à la place de i dans $f(x+i)$. Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$ etc., $i+o$ à la place de i, soit qu'on y mette $x+o$ au lieu de x.

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \text{etc.};$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.}; \\ &\quad + po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour faire l'autre substitution, soient $fx+f'xo+$etc., $p+p'o+$etc., $q+q'o+$etc., $r+r'o+$ etc., ce que deviennent les fonctions fx, p, q, r, etc. en y mettant $x+o$ pour x, et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o, il est clair que la même formule deviendra

$$fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{etc.}$$
$$+f'xo+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\text{etc.}$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, de i^2o, etc.,

$$p=f'x, \quad 2q=p', \quad 3r=q', \quad 4s=r', \text{ etc.}$$

Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx, il est clair que p' est la première fonction dérivée de p, que q' est la première fonction dérivée de q, r' la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx, par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura

$$p=f'x, \quad \text{et de là} \quad p'=f''x;$$

donc $$q=\frac{p'}{2}=\frac{f''x}{2}, \quad \text{et de là} \quad q'=\frac{f'''x}{2};$$

donc $$r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''x}{2.3}, \quad \text{et de là} \quad r'=\frac{f^{IV}x}{2.3};$$

donc $$s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{IV}x}{2.3.4}, \quad s'=\frac{f^{V}x}{2.3.4};$$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i)=fx+f'xi+\frac{f''x}{2}i^2+\frac{f'''x}{2.3}i^3+\frac{f^{IV}x}{2.3.4}i^4+\text{etc.}$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment,

lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction fx, *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, etc. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime;* la seconde fonction dérivée $f''x$, *fonction seconde;* la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', etc., de sorte que y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime*, y'' en sera la fonction *seconde*, y''' la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que x devenant $x+i$, y deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste, pour peu qu'on connaisse le calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', etc. relatives à x, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

CHAPITRE III.

Fonctions dérivées des puissances, des quantités exponentielles et logarithmiques, des sinus, cosinus, et des expressions composées de ces fonctions simples. Équations dérivées.

10. PUISQUE tout se réduit à trouver la première fonction dérivée d'une fonction donnée, nous allons donner des règles générales pour la formation des fonctions dérivées des principales quantités qu'on emploie dans l'analyse.

Par ce que nous venons de démontrer, on voit que la fonction dérivée $f'x$ d'une fonction donnée fx de la variable x, n'est autre chose que le coefficient de i dans le premier terme du développement de cette fonction, après la substitution de $x+i$ à la place de i. Ainsi il ne s'agit que de trouver ce premier coefficient.

Soit donc d'abord $fx = x^m$, on aura

$$f(x+i) = (x+i)^m;$$

or, il est facile de démontrer, soit par les simples règles de l'arithmétique, soit par les premières opérations de l'algèbre, que les deux premiers termes de la puissance m du binome $x+i$, sont $x^m + mx^{m-1}i$, soit que m soit un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif; ainsi on aura

$$f'x = mx^{m-1}.$$

De là on tirera de la même manière,

$$f''x = m(m-1)x^{m-2}, \quad f'''x = m(m-1)(m-2)x^{m-3}, \quad \text{etc.};$$

de sorte qu'on aura, par la formule générale de l'article 8,

$$(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}i^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}i^3 + \text{etc.},$$

ce qui est la formule connue du binome, laquelle se trouve ainsi démontrée par toutes les valeurs de m.

11. Soit en second lieu $fx = a^x$, on aura

$$f(x+i) = a^{x+i} = a^x a^i;$$

ainsi tout se réduit à trouver les deux premiers termes de la série de a^i, développée suivant les puissances de i.

Soit, pour cela, $a = 1+b$, alors

$$a^i = (1+b)^i = 1 + ib + \frac{i(i-1)}{2}b^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}b^3 + \text{etc.},$$

par la formule que nous venons de démontrer. Développant les produits de i, $i-1$, $i-2$, etc., et ordonnant les termes suivant les puissances de i, on trouvera que les termes multipliés par i forment cette série $i\left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.}\right)$.

Donc, faisant pour abréger,

$$A = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.} = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}$$

les deux premiers termes de la valeur de a^i en série, seront $1 + Ai$; on aura par conséquent

$$f'x = Aa^x.$$

On tirera de là, par la même opération répétée,

$$f''x = A \times Aa^x = A^2a^x, \quad f'''x = A^3a^x, \quad \text{etc.}$$

On aura ainsi,

$$f(x+i) = a^{x+i} = a^x\left(1 + Ai + \frac{A^2i^2}{2} + \frac{A^3i^3}{2.3} + \text{etc.}\right).$$

Divisant par a^x, et changeant i en x, on aura la série connue

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

12. Si dans cette formule on fait $x = 1$, on aura

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{2.3} + \text{etc.},$$

et si on fait $x = \frac{1}{A}$, on aura

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Ainsi la quantité $a^{\frac{1}{A}}$ est égale à un nombre constant, qui est la valeur de a, lorsque $A = 1$; et par la série précédente, on trouve

$$a^{\frac{1}{A}} = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots\ldots$$

C'est le nombre qu'on désigne ordinairement par e; de sorte que la relation entre a et A se trouve exprimée d'une manière finie par l'équation $a^{\frac{1}{A}} = e$, laquelle donne $a = e^A$.

Donc, si $fx = e^{mx}$, on aura $a = e^m$, $A = m$, et par conséquent

$$f'x = me^{mx},\quad f''x = m^2e^{mx},\quad f'''x = m^3e^{mx},\quad \text{etc.};$$

d'où l'on tirera comme ci-dessus,

$$e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{2} + \frac{m^3x^3}{2.3},\ \text{etc.}$$

Or, dans l'équation $y = a^x$, x est ce qu'on appelle le logarithme de y, a étant la base du système logarithmique, c'est-à-dire, le nombre dont le logarithme est l'unité; de sorte que cette équation donne $x = \log y$ pour la base a. Par la même raison, l'équation $a^{\frac{1}{A}} = e$ donnera $\frac{1}{A} = \log e$ pour la base a, et $A = \log a$ pour la base e.

Dans le système des logarithmes ordinaires, la base a a été prise $= 10$, parce que ces logarithmes sont plus commodes pour le calcul arithmétique; mais dans l'analyse, on préfère, comme plus simple, le système dont la base est le nombre e; c'est le système des logarithmes de *Neper*, qu'on nomme communément *logarithmes hyperboliques*, parce qu'ils sont représentés par l'aire de l'hyperbole équilatère entre ses assymptotes, et on les désigne par la simple caractéristique l. Ainsi on a $A = la$; par conséquent la fonction prime de la fonction a^x, est exprimée par $a^x la$ (art. précéd.).

Au reste, comme $a = e^A$, on aura $a = e^{la}$, et par conséquent $a^x = e^{xla}$; moyennant quoi on peut réduire toutes les exponentielles à la même base e.

13. Soit donc, en troisième lieu, $fx = \log x$, on aura, par la nature des logarithmes, $x = a^{fx}$. Or, x devenant $x + i$, fx devient

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.}$$

Faisant, pour abréger, $o = if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.}$, l'équation $x = a^{fx}$ deviendra, en y mettant $x + i$ pour x, et $fx + o$ pour fx

$$x + i = a^{fx+o} = a^{fx} \times a^o,$$

et divisant cette équation par la précédente, on aura

$$1 + \frac{i}{x} = a^o = 1 + Ao + \frac{A^2o^2}{2} + \text{etc. (art. précéd.)}$$

Effaçant l'unité de part et d'autre, et divisant par i, après avoir substitué la valeur de o, on aura, en ordonnant suivant les puissances de i,

$$\frac{1}{x} = Af'x + \frac{i}{2}(Af''x + A^2f'x) + \text{etc.}$$

La quantité i étant et devant demeurer indéterminée, il faudra que cette équation se vérifie indépendamment de cette quantité; par conséquent tous les termes affectés d'une même puissance de i, devront se détruire d'eux-mêmes, et former autant d'équations à

part. On aura donc ainsi

$$\frac{1}{x} = Af'x, \quad Af''x + A^2\overrightarrow{f'x}^2 = 0,$$

et ainsi de suite.

Donc, fx étant $= \log x$, on aura en général,

$$f'x = \frac{1}{Ax} = \frac{1}{xla};$$

et de là, par la formule générale de l'article 10, on tirera

$$f''x = -\frac{1}{x^2 la}, \quad f'''x = \frac{2}{x^3 la}, \quad f^{IV}x = -\frac{2.3}{x^4 la}, \quad \text{etc.},$$

valeurs qui satisfont, comme l'on voit, aux différentes équations trouvées ci-dessus. Ainsi, par la substitution de ces valeurs dans la série $fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x +$ etc., on aura sur-le-champ,

$$\log(x+i) = \log x + \frac{i}{xla} - \frac{i^2}{2x^2 la} + \frac{i^3}{3x^3 la} - \text{etc.}$$

Faisant $x = 1$, et changeant i en x, on aura la formule connue

$$\log(1+x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}}{la};$$

Pour les logarithmes hyperboliques où $le = 1$, on aura simplement

$$fx = lx, \quad f'x = \frac{1}{x}, \quad f''x = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{etc.}$$

14. Les sinus et cosinus d'angles considérés analytiquement, ne sont que des expressions composées d'exponentielles imaginaires; ainsi on peut déduire leurs fonctions dérivées de celles de ces exponentielles.

Soit donc, en quatrième lieu, $fx = \sin x$: comme on a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

ou

on fera

$$fx = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

et l'on aura (art. 12), en mettant $\pm\sqrt{-1}$ au lieu de m dans e^{mx},

$$f'x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

De même en faisant

$$fx = \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

on trouvera

$$f'x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1} = -\sin x.$$

Connaissant ainsi les fonctions primes des fonctions $\sin x$, $\cos x$, on en déduira facilement toutes les autres fonctions dérivées.

En effet, puisque $fx = \sin x$ a donné $f'x = \cos x$, et que $fx = \cos x$ a donné $f'x = -\sin x$, on aura, pour $fx = \sin x$,

$f'x = \cos x$, $f''x = -\sin x$, $f'''x = -\cos x$, $f^{IV}x = \sin x$, etc.;

et pour $fx = \cos x$, on aura

$f'x = -\sin x$, $f''x = -\cos x$, $f'''x = \sin x$, $f^{IV}x = \cos x$, etc.

D'après ces formules, on aura sur-le-champ les séries

$$\sin(x+i) = \sin x + i\cos x - \frac{i^2}{2}\sin x - \frac{i^3}{2.3}\cos x + \frac{i^4}{2.3.4}\sin x + \text{etc.}$$

$$\cos(x+i) = \cos x - i\sin x - \frac{i^2}{2}\cos x + \frac{i^3}{2.3}\sin x + \frac{i^4}{2.3.4}\cos x - \text{etc.}$$

d'où, en faisant $x = 0$, et changeant i en x, on tire les séries connues

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

15. Les fonctions x^m, a^x, lx, $\sin x$, $\cos x$ que nous venons de considérer, doivent être regardées comme les fonctions simples

analytiques d'une seule variable. Toutes les autres fonctions de la même variable se composent de celles-là par addition, soustraction, multiplication ou division ; ou sont données en général par des équations dans lesquelles entrent des fonctions de ces mêmes formes. Ainsi connaissant les fonctions primes des fonctions simples que nous venons d'examiner, on trouvera aisément les fonctions primes des fonctions composées, et par les mêmes opérations répétées, on aura successivement les fonctions secondes, tierces, etc.

Soient p, q, r, etc. des fonctions simples de x, dont p', q', r', etc. soient les fonctions primes, connues par les règles précédentes, et qu'on demande la fonction prime y' d'une fonction y composée de p, q, r, etc. ; on considérera que x devenant $x+i$, y devient en général $y+y'i+\frac{y''i^2}{2}+$etc., (art. 9). Or p, q, r, etc. deviennent en même temps $p+p'i+$etc., $q+q'i+$etc., $r+r'i+$etc., et ainsi des autres. Il n'y aura donc qu'à substituer ces valeurs dans l'expression de y, développer les termes suivant les puissances de i, et le coefficient de i sera la valeur cherchée de y'.

Ainsi, si $y=ap+bq+$etc., a, b, etc. étant des coefficiens constans quelconques, on aura sur-le-champ

$$y'=ap'+bq'+\text{etc.}$$

Si $y=apq$, la quantité pq deviendra

$$(p+ip'+\text{etc.})(q+iq'+\text{etc.})=pq+i(p'q+q'p)+\text{etc};$$

donc

$$y'=ap'q+aq'p.$$

Si $y=apqr$, on trouvera de la même manière,

$$y'=ap'qr+aq'pr+ar'pq,$$

et ainsi de suite.

Si $y=\frac{ap}{q}$, la quantité $\frac{p}{q}$ deviendra

$$\frac{p+ip'+\text{etc.}}{q+iq'+\text{etc.}}.$$

Développant le dénominateur en série par les règles connues, on aura

$$(p+ip'+\text{etc.})\left(\frac{1}{q}-\frac{iq'}{q^2}+\text{etc.}\right)=\frac{p}{q}+i\left(\frac{p'}{q}-\frac{q'p}{q^2}\right)+\text{etc.}$$

donc

$$y'=\frac{ap'}{q}-\frac{apq'}{q^2}.$$

16. Soit en général $y=fp$, en regardant fp comme une fonction primitive de p, sa fonction prime sera $f'p$; ensorte que p devenant $p+o$ (j'emploie ici la quantité indéterminée o, à la place de la quantité indéterminée i, qui désignera toujours l'augmentation indéterminée de x), fp deviendra $fp+of'p+\frac{o^2}{2}f''p+\text{etc.}$ (art. 8). Or, p étant une fonction de x, lorsque x devient $x+i$, p devient (*ibid.*) $p+ip'+\frac{i^2p''}{2}+\text{etc.}$; donc faisant $o=ip'+\frac{i^2}{2}p''+\text{etc.}$, fp deviendra, par la substitution de $x+i$ à la place de x,

$$fp+ip'f'p+\frac{i^2}{2}(p'^2f''p+p''f'p)+\text{etc.};$$

par conséquent, on aura

$$y'=p'f'p.$$

D'où résulte ce principe : que la fonction prime d'une fonction d'une quantité qui est elle-même une fonction d'une autre quantité, est égale au produit des fonctions primes des deux fonctions.

Supposons maintenant que y soit une fonction de p et de q; que nous désignerons par $f(p,q)$, il s'agit donc de substituer $x+i$ à la place de x dans les deux fonctions p et q. Or, il est visible que l'on doit avoir le même résultat, soit qu'on fasse ces deux substitutions à la fois ou successivement, puisque les quantités p et q sont regardées comme indépendantes.

En substituant d'abord $x+i$ à la place de x dans la fonction p, la fonction $f(p,q)$, regardée seulement comme fonction de p, devient $f(p,q)+ip'f'(p)+\text{etc.}$; j'écris simplement $f'(p)$ pour désigner la fonction prime de $f(p,q)$, prise relativement à p

seul, q étant regardée comme constante. Substituons maintenant $x+i$ pour x dans q, la fonction $f(p, q)$ deviendra pareillement $f(p, q)+iq'f'(q)+$ etc., où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p, q)$, prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante. Quant au terme $ip'f'(p)$, il est visible que par cette nouvelle substitution, il se trouverait augmenté de termes multipliés par i^2, i^3, etc. Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p, q)$, après la substitution de $x+i$ pour x, seront simplement $f(p, q)+i[p'f'(p)+q'f'(q)]$; de sorte qu'on aura

$$y'=p'f'(p)+q'f'(q).$$

Si y était une fonction de p, q, r, représentée par $f(p, q, r)$, on trouverait de la même manière

$$y'=p'f'(p)+q'f'(q)+r'f'(r),$$

et ainsi de suite.

D'où il est aisé de tirer cette conclusion générale : que la fonction prime d'une fonction composée de différentes fonctions particulières, sera la somme des fonctions primes relatives à chacune de ces mêmes fonctions, considérées séparément et indépendamment l'une de l'autre.

Ce principe, combiné avec le précédent, suffira pour trouver les fonctions primes de toutes sortes de fonctions, ainsi que les autres fonctions dérivées des ordres supérieurs.

Ainsi, en supposant X une fonction quelconque de x, les fonctions primes de X^m, lX, a^X, $\sin X$, $\cos X$, etc. seront $mX^{m-1}X'$, $\frac{X'}{X}$, $a^X X' la$, $X'\cos X$, $-X'\sin X$, etc., et leurs fonctions secondes

$$mX^{m-1}X''+m(m-1)X^{m-2}X'^2,\ \frac{X''}{X}-\frac{X'^2}{X^2},\ a^X X''la+a^X X'^2(la)^2,$$

$$X''\cos X-X'^2\sin X,\ -X''\sin X-X'^2\cos X,\ \text{etc.},\ \text{et ainsi de suite.}$$

17. Mais la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation quelconque entre x et y.

Représentons cette équation en général par $F(x,y)=0$, on aura, par la résolution, y égal à une certaine fonction de x, qu'on pourra désigner par fx; de sorte qu'en substituant fx pour y dans la fonction $F(x,y)$, elle deviendra $F(x, fx)$, fonction de x seul que nous désignerons par φx. Cette fonction de φx devra donc être nulle, quelle que soit la valeur de x. Donc elle le sera aussi en mettant $x+i$ pour x, quelle que soit la valeur de i. Mais par cette substitution, φx devient $\varphi x + i\varphi' x + \frac{i^2}{2}\varphi'' x +$ etc.; donc, pour que i puisse être une quantité quelconque, il faudra que l'on ait séparément les équations $\varphi x = 0$, $\varphi' x = 0$, $\varphi'' x = 0$, etc. dont la première est l'équation donnée, la seconde est sa fonction prime, la troisième sa fonction seconde, etc.

Or, puisque $\varphi x = F(x, fx) = F(x,y)$, $\varphi' x$ sera la fonction prime de $F(x,y)$, y étant regardée comme fonction de x, et par le principe établi dans l'article précédent, cette fonction prime sera exprimée par $F'(x) + y'F'(y)$, en désignant par $F'(x)$ et $F'(y)$, les fonctions primes de la fonction $F(x,y)$, prises relativement à x seul et à y seul.

Donc l'équation $F(x,y)=0$ donnera

$$F'(x) + y'F'(y) = 0;$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Ayant ainsi la valeur de la fonction prime y' en fonction de x et y, on aura celle de y'', en prenant la fonction prime de cette fonction, et ainsi de suite.

Il résulte de l'analyse précédente, ce principe :

Lorsqu'on a une équation quelconque entre deux variables x,y, l'équation subsistera encore entre les fonctions primes de tous ses termes, ainsi qu'entre leurs fonctions secondes, etc. Nous appellerons ces nouvelles équations, *équations dérivées ;* et en particulier, *équations primes*, *équations secondes*, etc., celles qu'on obtient en prenant les fonctions primes, secondes, etc.

Si l'équation ne contenait qu'une seule variable qui dût demeurer indéterminée, ce qui a lieu dans les équations identiques, le même principe subsisterait, et l'on aurait également une équation prime, une équation seconde, etc. qui seraient aussi identiques.

Les leçons III, IV, V, VI et VII sur le calcul des fonctions, renferment un commentaire sur les principaux points que nous venons de traiter dans ce chapitre; on y trouvera des développemens utiles et importans, et des applications nouvelles.

CHAPITRE IV.

Digression sur la manière de déduire les séries qui expriment les exponentielles, les logarithmes, les sinus, cosinus, et les arcs, de simples considérations algébriques.

18. Les séries qui représentent les quantités exponentielles et logarithmiques, ainsi que les sinus et les cosinus, ont été trouvées d'abord par le calcul différentiel. Halley est, je crois, le premier qui ait imaginé de déduire celles des exponentielles et des logarithmes de la formule de Newton pour les puissances du binome (*Transact. philosoph.*, n° 216), en employant la considération de l'infini ou de l'infiniment petit. Cette méthode a été suivie par Euler, et étendue aux sinus et cosinus, dans les chapitres VII et VIII du premier tome de son *Introductio in analysis*, etc. Mais quoiqu'elle puisse être admise en analyse, on ne saurait disconvenir qu'elle n'a pas l'évidence, ni même la rigueur qu'on doit desirer dans les élémens d'une science; et nous croyons qu'on nous saura gré de nous écarter ici un moment de notre marche, pour donner une démonstration des mêmes formules, fondée aussi uniquement sur celle du binome, mais dégagée de toute considération de l'infini. Nous donnerons même à ces formules une généralisation qui servira à rendre les séries aussi convergentes qu'on voudra dans tous les cas.

Considérons l'équation générale $y = a^x$, dans laquelle x est le logarithme de y pour la base a; mettons à la place de a, $1+a-1$, ce qui est la même chose, et ensuite à la place de $(1+a-1)^x$, $[(1+a-1)^x]^{\frac{x}{n}}$, ce qui est encore la même chose que a^x; on aura

$$y = [(1+a-1)^x]^{\frac{x}{n}},$$

n étant une quantité quelconque qui disparaît d'elle-même dans la valeur de y.

Je développe maintenant le binome $(1+a-1)^n$ dans la série

$$1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(a-1)^3+\text{etc.},$$

et j'ordonne les termes suivant les puissances de n, j'aurai

$$(1+a-1)^n=1+An+Bn^2+\text{etc.},$$

les coefficiens A, B, etc. étant donnés en a; et il est aisé de voir qu'on aura d'abord

$$A=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\text{etc.},$$

cette quantité A étant la même que celle de l'article 11; à l'égard des autres coefficiens, nous n'aurons pas besoin de les chercher, puisqu'ils disparaîtront du calcul, comme on va le voir.

Faisant cette substitution, nous aurons

$$y=(1+An+Bn^2+\text{etc.})^{\frac{x}{n}},$$

et développant à la manière du binome, il viendra

$$y=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+\text{etc.})+\frac{x(x-n)}{2n^2}(An+Bn^2+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3n^3}(An+Bn^2+\text{etc.})^3+\text{etc.},$$

savoir, en effaçant les puissances de n communes aux numérateurs et aux dénominateurs,

$$y=1+x(A+Bn+\text{etc.})+\frac{x(x-n)}{2}(A+Bn+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3}(A+Bn+\text{etc.})^3+\text{etc.}$$

Maintenant, comme la quantité n est arbitraire, et doit par la nature même de la fonction y, disparaître de l'expression de cette fonction, il faudra que tous les termes multipliés par chaque puissance de n, se détruisent mutuellement. Ne tenant donc aucun compte

compte de ces termes qui doivent disparaître d'eux-mêmes, quel que soit n, on aura simplement

$$y = a^x = 1 + xA + \frac{x^2A^2}{2} + \frac{x^3A^3}{2.3} + \text{etc.},$$

comme plus haut (art. 11).

19. Cherchons de la même manière la valeur de x en y. Pour cela, nous mettrons l'équation $a^x = y$ sous la forme

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n,$$

qui est identique avec la précédente, et où n est encore une quantité quelconque à volonté, qui ne doit point entrer dans la valeur de x en y.

Développant les deux membres à la manière du binome, on aura

$$1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}$$
$$= 1 + n(y-1) + \frac{n(n-1)}{2}(y-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \text{etc.};$$

savoir, en effaçant l'unité de part et d'autre, et divisant par n:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}$$
$$= y - 1 + \frac{n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \text{etc.}$$

Or n étant, comme nous l'avons déjà dit, une quantité entièrement arbitraire et qui ne doit pas entrer dans l'expression de x en y, il faudra que les termes multipliés par les différentes puissances de n, se détruisent d'eux-mêmes, ensorte qu'il ne reste que ceux où n n'entrera pas. On aura ainsi, en ne tenant compte que des termes sans n, l'équation suivante, dans laquelle j'emploie, pour abréger, la quantité A déterminée ci-dessus,

$$xA = y - 1 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$x = \log y = \frac{y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.}}{A};$$

formule connue, et qui s'accorde avec celle de l'article 13, A étant $= la$.

20. Mais cette formule n'est convergente que lorsque le nombre y, dont elle donne le logarithme, est peu différent de l'unité. Aussi n'est-elle d'aucune utilité pour le calcul des logarithmes ordinaires. Voici un moyen de la rendre convergente pour tous les nombres.

Il est évident que l'équation fondamentale $y = a^x$ peut se changer en celle-ci $y^m = a^{mx}$, m étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire. Employant donc cette dernière formule à la place de l'autre, il n'y aura qu'à changer dans celle-ci y en y^m et x en mx. On aura ainsi en général,

$$\log y = \frac{y^m - 1 - \frac{1}{2}(y^m-1)^2 + \frac{1}{3}(y^m-1)^3 - \text{etc.}}{m\text{A}},$$

où l'on pourra prendre pour m une fraction $\frac{1}{r}$, telle que $\sqrt[r]{y}$ soit toujours un nombre aussi peu différent de l'unité qu'on voudra.

Supposons, ce qui est toujours possible, que la racine r de y ne contienne que l'unité avant la virgule, et qu'après la virgule, il y ait s zéros, alors si on s'arrête à $2s$ décimales, il est visible que le terme $(y^m - 1)^s$, et à plus forte raison les termes suivans, ne donneront rien; de sorte qu'on aura simplement, dans ce cas,

$$\log y = \frac{y^m - 1}{m\text{A}} = r\,\frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\text{A}}.$$

De la même manière, on aura aussi, sous les mêmes conditions,

$$\text{A} = la = r\,(\sqrt[r]{a} - 1);$$

et par conséquent

$$\log y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1}.$$

C'est par cette formule que *Brigs* a calculé les premiers logarithmes. Il avait remarqué qu'en faisant des extractions successives de racines carrées d'un nombre quelconque, si on s'arrête

on aura

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n}(nX) + \frac{1-n}{n^2}(nX)^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3.n^3}(nX)^3 + \text{etc.} = 1 + X + \frac{1-n}{2}X^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3}X^3 + \text{etc.}$$

Comme les valeurs de sin x et de cos x doivent être indépendantes du nombre arbitraire n, il s'ensuit que tous les termes du second membre qui se trouveront multipliés par une même puissance de n, doivent se détruire d'eux-mêmes. Ne tenant donc compte que des termes où n ne se trouvera pas après le développement, il est aisé de voir que la quantité X se réduira à son premier terme $Ax\sqrt{-1}$, et que les coefficiens des puissances de X se réduiront à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}$, etc. De sorte que l'on aura simplement

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + \text{etc.}$$

En effectuant les puissances de $\sqrt{-1}$, et comparant les parties réelles des deux membres ensemble, et les imaginaires ensemble, on aura

$$\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

22. Pour avoir de même la valeur de x en sinus et cosinus de x, il n'y aura qu'à reprendre la formule fondamentale

$$\cos nx + \sin nx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^n,$$

dans laquelle on mettra, à la place de sin nx et cos nx, leurs valeurs en série $nAx + n^2Bx^2$, etc.; $1 - \frac{n^2A^2x^2}{2}$ + etc., et on développera

virgule ; alors les puissances de $y^m - 1$ seront des fractions d'autant plus petites, qu'elles seront plus hautes, et par conséquent la série deviendra assez convergente pour qu'il suffise d'en prendre un petit nombre de termes.

21. On peut appliquer la méthode précédente à la recherche des séries qui expriment le sinus par l'arc, ou l'arc par le sinus, et pour lesquelles on emploie aussi (comme l'a fait *Euler* dans le même ouvrage) la considération de l'infiniment petit et de l'infini.

En effet, en partant de la formule connue pour la multiplication des angles $\cos nx + \sin nx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^n$, on a reciproquement

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = (\cos nx + \sin nx\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

où le nombre n peut être quelconque.

Maintenant, quelle que soit l'expression de sin x en série de l'arc x, elle ne peut être que de la forme $Ax + Bx^3 + \text{etc.}$; car, puisque le sinus devient nul lorsque l'arc est nul, il est visible que cette expression ne doit contenir aucun terme sans x. Or, comme $\cos x = \sqrt{[1 - (\sin x^3)]}$, on aura

$$\cos x = \sqrt{(1 - A^2x^2 - 2ABx^3 - \text{etc.})} = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \text{etc.}$$

Les coefficiens A, B, etc. sont censés indépendans de l'arc x; par conséquent, ils seront les mêmes pour tout autre arc. Substituant donc nx pour x, on aura pareillement

$$\sin nx = nAx + n^3Bx^3 + \text{etc.} \quad \text{et} \quad \cos nx = 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} + \text{etc.}$$

Donc l'équation précédente deviendra

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = \left[1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Développons le second membre à la manière du binome, en faisant, pour abréger,

$$X = Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.},$$

et soustrayant les deux équations l'une de l'autre, on aura, après avoir divisé par $2A\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{\text{tang } x - \frac{1}{3}\text{tang } x^3 + \frac{1}{5}\text{tang } x^5 - \text{etc.}}{A}.$$

Au reste, il est visible que l'équation trouvée dans l'art. 21,

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + \text{etc.},$$

se réduit directement à celle-ci,

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = a^{x\sqrt{-1}},$$

par la formule de l'art. 11, en prenant pour a une quantité dépendante de A, comme nous l'avons déterminée dans ce même endroit, c'est-à-dire, ensorte que $a = e^A$, e étant un nombre donné qui est la base des logarithmes hyperboliques.

De cette formule on tire tout de suite, en prenant le radical en plus et ensuite en moins, les expressions connues de $\sin x$, $\cos x$, en exponentielles imaginaires,

$$\sin x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

et passant des exponentielles aux logarithmes,

$$la \times x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x\sqrt{-1}) = l\cos x + l(1 + \text{tang } x\sqrt{-1}),$$

ou bien, en prenant successivement le radical en plus et moins, et soustrayant une équation de l'autre,

$$x = \frac{1}{la} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}} l.\frac{1 + \text{tang } x\sqrt{-1}}{1 - \text{tang } x\sqrt{-1}};$$

d'où l'on peut déduire les séries trouvées ci-dessus, en employant les développemens des exponentielles et des logarithmes exposés dans les articles 18 et 19.

la puissance n du second membre. On aura ainsi

$$1+nAx\sqrt{-1}+n^2\left(B\sqrt{-1}-\frac{A^2}{2}\right)x^2+\text{etc.}$$
$$=(\cos x)^n\left[1+n\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1}\right)^2+\text{etc.}\right].$$

Or

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\text{tang}\,x\,,\quad \cos x=\sqrt{(1-\sin x^2)}\,;$$

donc

$$(\cos x)^n=(1-\sin x^2)^{\frac{n}{2}}=1-\frac{n}{2}\sin x^2+\frac{n(n-2)}{2.4}\sin x^4-\text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, la quantité n ne se trouvera plus que dans les coefficiens, et ordonnant les termes suivant les puissances de cette quantité, le second membre deviendra de cette forme $1+nP+n^2Q+$ etc.; en faisant pour abréger,

$$P=\text{tang}\,x\sqrt{-1}-\tfrac{1}{2}(\text{tang}\,x\sqrt{-1})^2+\tfrac{1}{3}\text{tang}\,x\sqrt{-1})^3-\text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin x^2-\tfrac{1}{4}\sin x^4-\tfrac{1}{6}\sin x^6+\text{etc.},$$
$$Q=\tfrac{1}{2}(\text{tang}\,x\sqrt{-1})^2+\text{etc.};$$

effaçant l'unité des deux membres, et divisant toute l'équation par n, elle deviendra

$$Ax\sqrt{-1}+n\left(B\sqrt{-1}-\frac{A^2}{2}\right)x^2+\text{etc.}=P+nQ+\text{etc.};$$

et comme elle doit avoir lieu indépendamment de la quantité n, qui doit demeurer indéterminée, il faudra que les termes qui contiennent les différentes puissances de n se détruisent d'eux-mêmes; ce qui la réduira d'abord à $Ax\sqrt{-1}=P$, savoir, en développant les puissances de tang $x\sqrt{-1}$,

$$Ax\sqrt{-1}=(\text{tang}\,x-\tfrac{1}{3}\text{tang}\,x^3+\tfrac{1}{5}\text{tang}\,x^5-\text{etc.})\sqrt{-1}$$
$$+\tfrac{1}{2}\text{tang}\,x^2-\tfrac{1}{4}\text{tang}\,x^4+\tfrac{1}{6}\text{tang}\,x^6-\text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin x^2-\tfrac{1}{4}\sin x^4-\tfrac{1}{6}\sin x^6+\text{etc.}$$

Comme on peut prendre le radical $\sqrt{-1}$ en plus ou en moins, il est visible qu'en le prenant successivement en plus et en moins,

Donc aussi, en divisant par x,

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.} < 1, > \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}};$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1+x^2}$, et que $\sqrt{(1+x^2)} > 1$, il est clair que $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} > \frac{1}{1+x^2}$, et en même temps on voit que $\frac{1}{1+x^2} > 1-x^2$, car la différence est $\frac{x^4}{1+x^2}$; ainsi la quantité qui est plus grande que $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$, sera à plus forte raison plus grande que $1-x^2$, de sorte qu'on pourra réduire l'espèce d'équation d'inégalité ci-dessus, à cette forme

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.} < 1, > 1-x^2.$$

Or, en prenant x tel que $\frac{A^3x^2}{2.3}$ soit < 1, il est visible que la série $A - \frac{A^3x^2}{2.3} +$ etc. sera convergente et $< A$, mais $> A - \frac{A^3x^2}{2.3}$, parce qu'en ajoutant ensemble le second et le troisième terme, le quatrième et le cinquième, et ainsi de suite, on n'aura que des quantités toutes négatives, et qu'au contraire en ajoutant le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième, etc., on n'aura que des quantités toutes positives. Donc x étant supposé $\leqq \frac{\sqrt{6}}{A}$, on aura à plus forte raison,

$$A - \frac{A^3x^2}{2.3} < 1 \quad \text{et} \quad A > 1-x^2;$$

par conséquent,

$$A > 1-x^2 \quad \text{et} \quad < 1 + \frac{A^3x^2}{2.3};$$

ce qui devant avoir lieu, quelque petite que soit la valeur de x, il s'ensuit que l'on aura nécessairement $A=1$. En effet, si $A=1+i$, i étant une quantité quelconque très-petite positive, il n'y aurait qu'à prendre x tel que $\frac{A^3x^2}{2.3} < i$, et alors la condition de $A < 1$

$+\frac{A^3x^3}{2.3}$ n'aurait plus lieu. De même, si $A=1-i$, il n'y aurait qu'à prendre $x^2<i$, et l'autre condition $A>1-x^2$ serait en défaut. Donc on a nécessairement $A=1$ dans le cercle; par conséquent $a=e$, nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité (art. 12); ce qui fait rentrer nos formules dans les formules connues pour les fonctions circulaires.

CHAPITRE V.

Du développement des fonctions, lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps. Des cas singuliers où le développement de la fonction ne procède pas suivant les puissances positives et entières de l'accroissement de la variable.

24. Les méthodes que nous venons de donner pour le développement de la fonction $f(x+i)$, supposent que ce développement est de la forme

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.};$$

il est donc nécessaire, avant d'aller plus loin, d'examiner quand et comment cette forme pourrait être en défaut.

Nous avons déjà démontré plus haut (art. 2), que cela ne peut arriver que lorsqu'on donnera à x une valeur déterminée, telle qu'elle fasse disparaître dans la fonction fx et dans toutes ses dérivées, quelques radicaux. Or, un radical ne peut disparaître dans une fonction que de deux manières, ou parce que la quantité qui multiplie le radical devient nulle, ou parce que le radical lui-même devient nul.

Dans le premier cas, il est clair que le radical disparaissant dans fx, il pourra ne pas disparaître dans $f'x$, $f''x$, etc., ou bien que disparaissant à la fois dans fx, $f'x$, il ne disparaîtra pas dans $f''x$, $f'''x$, etc., et ainsi du reste, parce que le radical ac-

quérant des coefficiens différens dans les fonctions dérivées, ces coefficiens ne peuvent pas devenir tous nuls par la même valeur supposée de la variable.

Dans le second cas, au contraire, il est évident que le radical disparaîtra nécessairement dans toutes les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc. à l'infini, puisque c'est la quantité radicale elle-même qui est supposée s'évanouir pour une valeur donnée de la variable x. Mais l'évanouissement du radical ne pouvant plus avoir lieu dans la fonction $f(x+i)$, où i est une quantité indéterminée et indépendante de x, il s'ensuit que la série $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc. qui représente le développement de cette fonction, deviendra fautive par l'absence du radical qu'elle doit contenir.

Donc cette série sera légitime dans le premier cas, et ne le sera pas dans le second.

25. Soit $y=fx$, et par conséquent, en prenant les fonctions prime, seconde, etc, $y'=f'x$, $y''=f''x$, etc. Supposons que pour une valeur donnée de x, il disparaisse dans fx un radical, lequel ne disparaisse pas dans $f'x$; il est clair que pour cette valeur de x, la fonction $f'x$ devra avoir un plus grand nombre de valeurs différentes que la fonction fx, à raison du radical qui se trouve dans $f'x$ et qui a disparu dans fx; d'où il s'ensuit que la valeur de y' ne pourra pas être donnée par une fonction de x et y qui ne contiendrait pas ce radical. Cependant, si dans l'équation $y=fx$ on détruit ce même radical par l'élévation aux puissances, et que l'équation résultante soit représentée par $F(x,y)=0$, son équation prime donnera généralement, comme nous l'avons vu dans l'art. 17,

$$y'=-\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Donc cette expression sera en défaut dans le cas où l'on donnerait à x la valeur en question, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les quantités $F'(x)$ et $F'(y)$ seront l'une et l'autre nulles à la fois. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, l'expression de y' deviendra égale à zéro divisé par zéro; et réciproquement, lorsque cela

arrivera, ce sera une marque que la valeur correspondante de x aura détruit dans fx un radical, sans le détruire dans $f'x$.

Pour avoir dans ce cas la valeur de y', il ne suffira donc pas de s'arrêter à l'équation prime de $F(x,y)=0$, laquelle étant $y'F'(y)+F'(x)=0$, aura lieu d'elle-même, indépendamment de la valeur de y'; mais il faudra passer à l'équation seconde, qu'on trouvera par les mêmes règles de cette forme

$$y''F'(y)+y'^2F''(y)+2y'F''(y)(x)+F''(x)=0,$$

en désignant par $F''(y)$ et $F''(x)$ les fonctions primes de $F'(y)$ et $F'(x)$, prises, la première relativement à y seul, et la seconde relativement à x seul, c'est-à-dire les fonctions secondes de $F(y,x)$, prises relativement aux mêmes variables isolées, et par $F''(y)(x)$ la fonction prime de $F'(y)$, prise relativement à x, ou la fonction prime de $F'(x)$, prise relativement à y (ces deux fonctions étant la même chose, comme il est facile de s'en convaincre, et comme nous le démontrerons plus bas, lorsque nous traiterons des fonctions de plusieurs variables), c'est-à-dire la fonction seconde de $F(y,x)$, prise relativement à y et à x.

Cette équation donne généralement la valeur de y''; mais dans le cas proposé, la quantité $F'(y)$ devenant nulle, le terme qui contient y'' disparaîtra, et l'équation restante sera une équation du second degré en y', par laquelle on déterminera la valeur de y', qui sera par conséquent double.

26. Soit, par exemple, $fx=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, ensorte qu'on ait l'équation

$$y=(x-a)\sqrt{(x-b)},$$

on aura

$$f'x=y'=\sqrt{(x-b)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}};$$

faisant $x=a$, on a

$$y=0,\quad y'=\sqrt{(x-b)}=\sqrt{(a-b)},$$

où l'on voit que le radical disparaît dans la valeur de y, mais non pas dans celle de y', ensorte que la valeur de y est simple, et celle de y' double.

Maintenant, si on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle $y^2=(x-a)^2(x-b)$, et qu'on en prenne l'équation prime, on aura

$$2yy'=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2;$$

d'où l'on tire

$$y'=\frac{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2}{2y};$$

faisant $x=a$, on a $y'=\frac{0}{0}$; passant donc à l'équation seconde, on aura

$$2y'^2+2yy''=4(x-a)+2(x-b).$$

Ici $x=a$ donne, à cause de $y=0$ dans ce cas,

$$2y'^2=2(x-b)=2(a-b);\quad \text{donc}\quad y'=\sqrt{(a-b)},$$

comme plus haut.

Il serait possible, au reste, que la même valeur de x qui détruit les termes de l'équation prime, détruisît aussi ceux de l'équation seconde; alors il faudrait passer à l'équation tierce, laquelle, par la destruction des termes qui contiendraient y'' et y''', deviendrait une simple équation en y', mais du troisième degré, et ainsi de suite. Cela dépend de la nature du radical qui aura été détruit dans fx, et qui doit être remplacé par le degré de l'équation d'où dépend la valeur de y'; mais nous n'entrerons dans aucun détail sur ce point, pour ne pas trop nous écarter de notre sujet.

27. Supposons en second lieu que la même valeur de x, qui fait disparaître un radical dans fx, le fasse disparaître aussi dans $f'x$, sans le faire disparaître néanmoins dans $f''x$, alors les valeurs correspondantes de fx et de $f'x$ seront en même nombre; mais celles de $f''x$ seront en nombre plus grand. Si donc on détruit ce radical dans l'équation $y=fx$, la valeur de y'' qu'on en déduira, se trouvera $=\frac{0}{0}$, et il faudra passer aux équations dérivées d'un ordre supérieur pour avoir la valeur de y''.

Soit $y = (x-a)^2 \sqrt{(x-b)}$, on aura

$$y' = 2(x-a)\sqrt{(x-b)} + \frac{(x-a)^2}{2\sqrt{(x-b)}},$$

$$y'' = 2\sqrt{(x-b)} + \frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-b)}} - \frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}};$$

faisant $x = a$, on a

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{et} \quad y'' = 2\sqrt{(x-b)} = 2\sqrt{(a-b)}.$$

Mais si on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle

$$y^2 = (x-a)^4 (x-b),$$

on en tirera l'équation prime

$$2yy' = 4(x-a)^3 (x-b) + (x-a)^4,$$

laquelle donne, lorsque $x = a$,

$$y' = \frac{0}{0},$$

à cause de $y = 0$, à moins qu'en substituant la valeur de y, on ne divise le tout par $(x-a)^2$, et qu'ensuite on ne fasse $x = a$, ce qui donnera $y' = 0$,

Passant à l'équation seconde, on aura

$$y'^2 + yy'' = 6(x-a)^2 (x-b) + 4(x-a)^3,$$

faisant $x = a$, on aura $y' = 0$ comme ci-dessus. Mais pour avoir la valeur de y'', il faudra avoir recours à l'équation tierce et même à l'équation quarte. Celle-là sera

$$3y'y'' + yy''' = 18(x-a)^2 + 12(x-a)(x-b),$$

où tous les termes disparaissent lorsque $x = a$. La suivante sera

$$3y''^2 + 4y'y''' + yy^{IV} = 48(x-a) + 12(x-b).$$

Faisant $x = a$, et par conséquent $y = 0$ et $y' = 0$, on aura

$$3y''^2 = 12(x-b), \quad y'' = 2\sqrt{(x-b)} = 2\sqrt{(a-b)},$$

comme plus haut.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse, qui d'ailleurs n'a plus de difficulté d'après les principes établis. Nous nous contenterons de remarquer que si on construit la courbe dont x serait l'abscisse, et $y = fx$ l'ordonnée, cette courbe aura ce qu'on appelle un point multiple dans l'endroit correspondant à la valeur donnée de x, qui fera disparaître un radical dans fx, sans le faire disparaître en même temps dans $f'x$; qu'elle aura un point d'attouchement, si la même valeur de x fait disparaître à la fois le radical dans fx et dans $f'x$; que ce sera un point d'osculation, si le radical disparaît en même temps dans $f''x$, et ainsi de suite. On en verra la raison lorsque nous appliquerons la théorie des fonctions à celle des courbes.

28. A l'occasion de la difficulté que nous venons de résoudre, nous allons donner la théorie de la méthode pour trouver la valeur d'une fraction, dans le cas où le numérateur et le dénominateur deviennent zéro à la fois.

Soit $\frac{fx}{Fx}$ une pareille fraction, fx et Fx étant des fonctions de x, telle que la supposition de $x = a$ les rende toutes les deux nulles à la fois, et qu'on demande la valeur de cette fraction lorsque $x = a$.

On fera $y = \frac{fx}{Fx}$, et par conséquent $yFx = fx$. En supposant $x = a$, cette équation se vérifie d'elle-même, indépendamment de la valeur de y, qui demeure par conséquent indéterminée; ainsi elle ne peut servir dans cet état à la détermination de y, lorsque $x = a$. Mais en prenant l'équation prime, on aura

$$y'Fx + yF'x = f'x;$$

la supposition de $x = a$ fait disparaître le terme $y'Fx$, et le reste de l'équation donne $y = \frac{fx}{F'x}$. S'il arrivait que les fonctions primes $f'x$, $F'x$ devinssent aussi nulles par la même supposition, alors on trouverait par le même principe, en substituant dans l'équation ci-dessus $f'x$, $F'x$, pour fx, Fx, cette nouvelle expression de y,

$y =$

$y = \frac{f'x}{F''x}$, et ainsi de suite. On pourrait aussi la déduire directement de la même équation prime, en considérant que, comme elle se vérifie de nouveau d'elle-même, elle ne peut pas servir non plus à la détermination de y; que par conséquent, il sera nécessaire de passer à l'équation seconde, laquelle sera

$$y''Fx + 2y'F'x + yF''x = f''x.$$

Comme la supposition de $x = a$ rend nulles les fonctions Fx et $F'x$, les termes qui contiennent y' et y'' s'en iront d'eux-mêmes, et les termes restans donneront $y = \frac{f'x}{F''x}$, comme plus haut.

Il n'est pas à craindre que les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., Fx, $F'x$, $F''x$, etc. à l'infini, puissent devenir nulles en même temps par la supposition de $x = a$, comme quelques géomètres paraissent le supposer; car puisque $f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x$, etc., en faisant $x = a$, on aurait $f(a+i) = 0$, quel que soit i, ce qui est impossible; il en serait de même de $F(x+i)$. Mais il peut arriver que ces fonctions deviennent infinies par la même supposition de $x = a$, ce qui rendra également les fractions $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{fx'}{F'x}$, etc. indéterminées : la solution de cette difficulté dépend de l'examen du second cas de l'art. 24, dont nous allons nous occuper.

29. Ce cas a lieu lorsque la supposition de $x = a$ fait disparaître dans fx un radical en le rendant nul, auquel cas elle le fera disparaître de même dans les fonctions dérivées; mais ce radical restant dans la fonction $f(x+i)$, il doit rester aussi dans le développement de cette fonction; par conséquent ne pouvant affecter la valeur de x, il faudra qu'il affecte l'i; d'où il suit que ce développement doit contenir nécessairement des puissances irrationnelles de i. Il est clair, en effet, que si fx contient la quantité $\sqrt[m]{X}$, X étant une fonction de x, qui devient nulle lorsque $x = a$, en mettant $x+i$ à la place de x, X deviendra $X + iX' + \frac{i^2}{2} X'' + \text{etc.}$,

et faisant $x=a$, on aura simplement $iX'+\frac{i^2}{2}X''+$ etc. pour la valeur de X ; de sorte que $\sqrt[m]{X}$ deviendra $\sqrt[m]{i\left(X'+\frac{i}{2}X''+\text{etc.}\right)}$; donc la fonction $f(x+i)$ contiendra, dans le cas de $x=a$, le radical $\sqrt[m]{i}$, qui devra par conséquent se trouver dans son développement suivant les puissances de i. Voyons donc ce que donnera alors le développement fautif $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc.

Pour cela, j'observe que les fonctions $f'(x+i)$, $f''(x+i)$, etc. sont également les fonctions primes, secondes, etc. de la fonction $f(x+i)$, soit qu'on les prenne relativement à x, soit qu'on les prenne relativement à i, ce qui est évident, puisqu'en augmentant soit x, soit i d'une même quantité quelconque, on a le même accroissement de la quantité $x+i$. D'où il suit que l'on aura également les valeurs de $f'x$, $f''x$, etc., quel que soit x, en prenant les fonctions primes, secondes, etc. de $f(x+i)$ relativement à i, et faisant ensuite $i=0$.

Or, si on suppose que le développement de $f(x+i)$ doive contenir, lorsque $x=a$, un terme affecté de i^m, tel que Ai^m, A étant une fonction de a, et m n'étant pas un nombre entier positif, en prenant les fonctions primes, secondes, etc. relativement à i, il faudra que les développemens de $f'(x+i)$, $f''(x+i)$, etc. contiennent les termes mAi^{m-1}, $m(m-1)Ai^{m-2}$, etc. (art. 10). Donc faisant $i=0$, on en conclura que les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., lorsque $x=a$, contiendront respectivement les termes Ao^m, mAo^{m-1}, $m(m-1)Ao^{m-2}$, etc.

Si m est un nombre quelconque négatif, il est clair que tous ses termes seront infinis.

Si m est un nombre positif non entier, soit n le nombre entier immédiatement plus grand que m, il est visible que le terme $m(m-1)\ldots(m-n+1)Ao^{m-n}$ sera infini, ainsi que tous les termes suivans, et que tous les précédens seront nuls.

Donc en général la fonction f^nx et toutes les suivantes $f^{n+1}x$, $f_1^{n+2}x$, etc. à l'infini (n, $n+1$, etc. étant des indices), seront in-

finies, n étant le nombre entier positif immédiatement plus grand que l'exposant m.

30. On conclura de là que le développement $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$etc. ne peut devenir fautif pour une valeur donnée de x, qu'autant qu'une des fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc. deviendra infinie, ainsi que toutes les suivantes pour cette valeur de x. Alors si n est l'indice de la première fonction qui devient infinie, le développement dont il s'agit devra contenir un terme de la forme i^m, m étant un nombre compris entre $n-1$ et n.

Et si toutes les fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc. devenaient infinies pour la même valeur de x, le développement de $f(x+i)$ contiendrait dans ce cas des puissances négatives de i.

Pour trouver alors la vraie forme du développement suivant les puissances ascendantes de i, il faudra faire d'abord dans la fonction $f(x+i)$, x égal à la valeur donnée, et développer ensuite suivant les puissances croissantes de i par les règles connues, en ayant égard aux puissances fractionnaires ou négatives de i qui se trouveraient dans la fonction même.

Au reste, nous remarquerons qu'en faisant $y=fx$, et prenant x et y pour les coordonnées d'une courbe, cette courbe aura dans le point où l'une des fonctions y, y', y'', etc. devient infinie, ainsi que toutes les suivantes, un rebroussement dont l'espèce dépendra de l'indice n, pourvu que l'exposant fractionnaire m ait pour dénominateur un nombre pair; et l'on déterminera la nature du rebroussement par la forme du développement de $f(x+i)$ dans ce cas.

31. Dans l'exemple de l'art. 27, où $y=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, on voit que la supposition de $x=b$ détruit le radical dans y, et doit par conséquent le détruire aussi dans les fonctions dérivées y', y'', etc. Donc le développement $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc., de $f(x+i)$, en supposant $y=fx=(x-a)\sqrt{(x-b)}$, sera fautif dans le cas

de $x=b$. En effet, on aura dans ce cas,

$$y=0\,,\quad y'=\sqrt{(x-b)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}}=\infty,$$

x étant $=b$, et on trouvera de même

$$y''=\infty,\quad y'''=\infty,\quad \text{etc.}$$

Donc le développement dont il s'agit devra contenir alors un terme de la forme i^m, m étant entre 0 et 1.

Soit en effet, $x=b+i$, fx deviendra $(b-a+i)\sqrt{i}$, de sorte que le vrai développement de cette fonction sera $(b-a)\sqrt{i}+i^{\frac{3}{2}}$.

32. C'est aussi de la même manière qu'on résoudra la difficulté proposée à la fin de l'art. 28, sur les fractions qui demeureraient toujours indéterminées, en prenant à l'infini les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur. Nous y avons vu que cela ne saurait arriver que dans le cas où la même valeur de x rendrait ces fonctions successives infinies. Il faudra donc alors supposer $x=a+i$ (a étant la valeur de x qui rend ces fonctions infinies) dans l'expression générale de la fraction, réduire ensuite cette expression en série, suivant les puissances ascendantes de i, et le premier terme de la série, en faisant $i=0$, donnera la valeur cherchée de la fraction pour le cas de $x=a$.

Ainsi, si l'on avait la fraction $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, qui devient $\frac{0}{0}$ lorsque $x=a$, et dont les fonctions primes, secondes, etc. du numérateur et du dénominateur, deviennent toutes infinies par la même valeur de x, en y mettant $a+i$ au lieu de x, et réduisant le nnmérateur et le dénominateur en série, elle deviendra

$$\frac{\sqrt{i}+\frac{i}{2\sqrt{a}}+\text{etc.}}{\sqrt{2ai}+\frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2a}}+\text{etc.}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{\sqrt{i}}{2a\sqrt{2}}+\text{etc.};$$

de sorte qu'en faisant $i=0$, on aura $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ pour la valeur cherchée de la fraction, lorsque $x=a$.

En effet, si, suivant la méthode de l'art. 28, on prend les fonctions primes du numérateur et du dénominateur, on aura

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{(x-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

quantités qui deviennent infinies lorsque $x=a$; mais en les multipliant l'une et l'autre par $2\sqrt{(x-a)}$, la nouvelle fraction sera

$$\frac{\frac{\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2x}{\sqrt{(x+a)}}},$$

laquelle, en faisant $x=a$, devient $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, comme plus haut.

Nous avons donc résolu les difficultés qui peuvent se rencontrer dans le développement de $f(x+i)$; et quoique nous n'ayons considéré que des fonctions algébriques, il n'est pas difficile d'étendre nos solutions aux fonctions transcendantes. Comme ces difficultés n'ont lieu que pour des valeurs particulières de x, il est clair qu'elles n'influent en rien sur la théorie des fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc.; mais il était nécessaire de les examiner, et de donner les moyens de les lever, pour ne laisser aucun nuage sur cette théorie. Voyez aussi la leçon VIII du *Calcul des Fonctions*.

CHAPITRE VI.

Résolution générale des fonctions en séries. Développement des fonctions en séries terminées et composées d'autant de termes qu'on voudra. Moyen d'exprimer les restes depuis un terme quelconque proposé. Théorème nouveau sur ces séries.

33. Nous avons vu jusqu'ici comment on peut trouver directement tous les termes du développement de la fonction $f(x+i)$, suivant les puissances de i; on peut, de la même manière, développer une fonction quelconque, suivant les puissances ascendantes d'une des variables contenues dans la fonction.

En effet, si on reprend la formule

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''x + \text{etc.},$$

puisque x et i sont deux quantités indéterminées, on y peut substituer $x-i$ à la place de x, ce qui donnera

$$fx = f(x-i) + if'(x-i) + \frac{i^2}{2} f''(x-i) + \text{etc.}$$

De plus, on pourra mettre xz à la place de i, et l'on aura

$$fx = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + \text{etc.},$$

où z est une quantité arbitraire quelconque.

Ici fx représente, comme l'on voit, une fonction quelconque de x, et $f'(x-xz)$, $f''(x-xz)$, etc. représentent les fonctions primes, secondes, etc. de fx, en y substituant $x(1-z)$ à la place

de x. Mais quoique fx ne représente qu'une fonction de x relativement à ses fonctions dérivées, il est clair qu'elle peut représenter en général une fonction quelconque de x et d'autres quantités quelconques, pourvu que ces quantités y soient regardées comme constantes dans la formation des fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc.

Si dans la formule précédente on fait $z = 0$, l'équation devient identique $fx = fx$, et si on fait $z = 1$, la quantité $x - xz$ s'évanouit; de sorte que si on dénote simplement par f, f', f'', etc. les valeurs des fonctions fx, $f'x$, $f''x$, etc., lorsque $x = 0$, on aura

$$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + \text{etc.}$$

Ainsi, lorsque fx sera une fonction donnée de plusieurs variables x, y, etc., il n'y aura qu'à chercher par les règles générales, les fonctions dérivées par rapport à x seul, et y faire ensuite $x = 0$, on aura tous les termes du développement de la fonction suivant les puissances ascendantes de x; et il est clair que les valeurs des quantités f', f'', etc., seront des fonctions de y, etc. sans x, toutes dérivées de la fonction primitive, suivant une loi dépendante de la manière dont la quantité x entrera dans cette fonction.

34. On pourrait trouver ce développement d'une manière plus simple, en supposant tout de suite

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

A, B, C, etc. étant des quantités indépendantes de x. Pour les déterminer, on considérera que cette équation devant être identique, doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x. Donc, 1°. en faisant $x = 0$, on aura $f = A$; 2°. en prenant les fonctions primes de tous ses termes (art. 10, 17), on aura encore l'équation identique

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.},$$

où, faisant de nouveau $x = 0$, on aura $f' = B$; 3°. en prenant

de nouveau les fonctions primes, on aura

$$f''x = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.},$$

où, faisant derechef $x = 0$, on aura $f'' = 2C$. Continuant de la même manière, on trouvera

$$f''' = 2.3D, \quad f^{IV} = 2.3.4E, \quad \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$A = f, \quad B = f', \quad C = \frac{1}{2} f'', \quad D = \frac{1}{2.3} f''', \quad \text{etc.},$$

ce qui donnera, par la substitution, la même série pour fx que ci-dessus. Mais cette méthode est moins directe que la précédente, et elle suppose déjà la théorie des fonctions dérivées; elle est d'ailleurs moins rigoureuse, en ce qu'elle suppose de plus que la somme de tous les termes affectés de x devient nulle lorsque $x = 0$, quoique les coefficiens de ces termes augmentent à l'infini dans les équations dérivées; mais le grand avantage de la méthode précédente, consiste en ce qu'elle donne le moyen d'arrêter le développement de la série à tel terme que l'on voudra, et de juger de la valeur du reste de la série.

Ce problème, l'un des plus importans de la théorie des séries, n'a pas encore été résolu d'une manière générale. On pourrait, à la vérité, le résoudre pour chaque fonction en particulier, par les méthodes exposées dans le chapitre premier; mais il serait impossible de parvenir par cette voie à une solution générale pour une fonction quelconque.

35. Reprenons donc la formule générale trouvée ci-dessus (art. 33),

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x - xz) + \text{etc.},$$

et supposons qu'on veuille s'arrêter au premier terme $f(x - xz)$. Comme tous les termes suivans sont multipliés par x, nous supposerons

$$fx = f(x - xz) + xP,$$

P étant regardé comme une fonction de z, qui devra être nulle lorsque $z = 0$, puisqu'alors $f(x - xz)$ devient fx.

Comme cette équation doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de z, qui est arbitraire, son équation prime, relativement à z, aura donc lieu aussi (art. 17). On prendra donc les fonctions primes relativement à cette variable, et il est facile de voir que la fonction prime du terme $f(x - xz)$ sera $-xf'(x - xz)$; car on a démontré (art. 16) que si $y = fp$, p étant une fonction de x, on a

$$y' = p' f'p;$$

ainsi en rapportant les fonctions dérivées à la variable z et faisant $p = x - xz$, on aura

$$p' = -x \quad \text{et} \quad y' = -xf'p = -xf'(x - xz).$$

Donc, à cause que fx ne renferme point z, l'équation prime relative à z de l'équation ci-dessus, sera

$$0 = -xf'(x - xz) + xP',$$

P' étant la fonction prime de P relativement à z; d'où l'on tire

$$P' = f'(x - xz).$$

On aura donc la valeur de P, en cherchant une fonction de z dont la fonction prime soit égale à $f'(x - xz)$, et qui de plus soit telle, qu'elle devienne nulle lorsque $z = 0$. Cette valeur de P ainsi trouvée, si on y fait $z = 1$, on aura

$$fx = f. + xP.$$

Supposons, en second lieu,

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + x^2Q,$$

Q étant une fonction de z, qui devra être nulle, comme l'on voit, lorsque $z = 0$.

En prenant, comme ci-dessus, les fonctions primes relativement à z, on aura cette équation prime

$$0 = -xf'(x - xz) + xf'(x - xz) - x^2zf''(x - xz) + x^2Q',$$

où les fonctions désignées par f′, f″ sont les fonctions primes et secondes de fx relativement à x, et dans lesquelles on a mis ensuite $x - xz$ pour x. On tire de là, en effaçant ce qui se détruit,

$$Q' = zf''(x - xz);$$

de sorte qu'on aura la valeur de Q en cherchant une fonction de z, dont la fonction prime ait la valeur qu'on vient de trouver pour Q′, et qui ait la condition de devenir nulle lorsque $z = 0$. Si ensuite on fait $z = 1$, on aura

$$fx = f. + xf'. + x^2Q.$$

Soit en troisième lieu,

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x - xz) + x^3R,$$

R étant une fonction de z, qui s'évanouisse lorsque $z = 0$. On trouvera, en prenant les fonctions primes relativement à z, et effaçant les termes qui se détruisent mutuellement,

$$R' = \frac{z^2}{2} f'''(x - xz),$$

la fonction représentée par f‴ étant la fonction tierce de fx relativement à x, transformée par la substitution de $x - xz$ à la place de x.

Il faudra donc, pour avoir la valeur de R, trouver une fonction primitive de z, dont la fonction prime soit la valeur précédente de R′, et qui soit telle, qu'elle s'évanouisse lorsque $z = 0$. Cette fonction étant trouvée, on aura, en faisant $z = 1$,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''. + x^3R,$$

et ainsi de suite.

En continuant ainsi, on aura la formule de l'art. 33,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2} f''. + \frac{x^3}{2.3} f'''. + \text{etc.}$$

Mais l'analyse précédente a l'avantage de donner la manière d'avoir les restes xP, x^2Q, x^3R, etc. de la série, lorsqu'on veut l'interrompre à son premier, second, troisième, etc. terme.

36. Voilà le problème résolu analytiquement; mais comme les quantités P, Q, R, etc. ne sont connues que par leurs fonctions primes, il reste encore à remonter de ces fonctions aux fonctions primitives; ce qui peut être souvent fort difficile, et même impossible.

Cependant, si on connaissait la quantité P, on en pourrait déduire toutes les autres par les simples fonctions dérivées; car la comparaison des valeurs de fx donne

$$P = zf'(x - xz) + xQ,$$

et l'on a trouvé $f'(x - xz) = P'$; donc substituant, on aura

$$P = zP' + xQ,$$

d'où l'on tire

$$Q = \frac{P - zP'}{x}.$$

On a ensuite

$$Q = \frac{z^2}{2} f''(x - xz) + xR,$$

et l'on a trouvé $zf''(x - xz) = Q'$; donc $Q = \frac{z}{2} Q' + xR$, d'où l'on tire

$$R = \frac{Q - \frac{1}{2} zQ'}{x}.$$

On trouvera de même

$$S = \frac{R - \frac{1}{3} zR'}{x},$$

et ainsi de suite.

Si on fait $P = zp$, $Q = z^2q$, $R = z^3r$, etc., on aura

$$q = -\frac{p'}{x}, \quad r = +\frac{q'}{2x}, \quad s = -\frac{r'}{3x}, \text{ etc.}$$

et la fonction fx deviendra, en remettant i à la place de xz;

$$\begin{aligned} fx &= f(x-i)+ip, \\ &= f(x-i)+if'(x-i)+i^2q, \\ &= f(x-i)+if'(x-i)+\tfrac{i^2}{2}f''(x-i)+i^3r, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ainsi connaissant le premier reste ip, on pourra connaître tous les autres restes i^2q, i^3r, etc., par les simples fonctions dérivées relatives à $z=\frac{i}{x}$; et si on prend simplement les fonctions dérivées relativement à i, on aura

$$q=-p', \quad r=-\frac{q'}{2}, \quad s=-\frac{r'}{3}, \quad \text{etc.}$$

Par exemple, en faisant $fx=\frac{1}{x}$ comme dans l'article 4, on aura $f(x-i)=\frac{1}{x-i}$, et prenant les fonctions dérivées par rapport à x, on aura

$$f'(x-i)=-\frac{1}{(x-i)^2}, \quad f''(x-i)=\frac{2}{(x-i)}, \quad \text{etc.},$$

or on trouve,

$$p=\frac{fx-f(x-i)}{i}=-\frac{1}{x(x-i)};$$

de là en prenant les fonctions dérivées par rapport à i, on tirera tout de suite

$$q=-p'=\frac{1}{x(x-i)^2}, \quad r=-\frac{q'}{2}=-\frac{1}{x(x-i)^3}, \quad \text{etc.}$$

Donc si on fait ces substitutions dans les expressions de fx, et qu'on y mette ensuite $x+i$ à la place de x, on aura

$$\frac{1}{x+i}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x(x+i)}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^2(x+i)}=\text{etc.},$$

comme dans l'article cité.

Soit encore $fx=\sqrt{x}$, on aura $f(x-i)=\sqrt{x-i}$, et prenant

les fonctions dérivées par rapport à x,

$$f'(x-i)=\frac{1}{2\sqrt{x-i}},\quad f''(x-i)=-\frac{1}{4(x-i)^{\frac{3}{2}}},\quad \text{etc.}$$

Ici on aura

$$p=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-i}}{i}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-i}};$$

et de là en prenant les fonctions dérivées relatives à i,

$$q=-\frac{1}{2\sqrt{x-i}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^2},$$

$$r=\frac{1}{8(x-i)^{\frac{3}{2}}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^2}+\frac{1}{4(x-i)\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^3}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+3\sqrt{x-i}}{8(x-i)^{\frac{3}{2}}\times(\sqrt{x}+\sqrt{x-i})^3},\quad \text{etc.}$$

Par ces substitutions dans les expressions de fx, on aura, en mettant $x+i$ à la place de x,

$$\sqrt{x+i}=\sqrt{x}+\frac{i}{\sqrt{x+i}+\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{i}{2\sqrt{x}}-\frac{i^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+i}+\sqrt{x})^2}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{i}{2\sqrt{x}}-\frac{i^2}{8x\sqrt{x}}+\frac{i^3(\sqrt{x+i}+3\sqrt{x})}{8x\sqrt{x}(\sqrt{x+i}+\sqrt{x})^3}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{i}{2\sqrt{x}}-\frac{i^2}{8x\sqrt{x}}+\frac{i^3}{16x^2\sqrt{x}}+\text{etc.},$$

comme dans le même article cité.

37. On peut aussi tirer directement de la formule de l'art. 3,

$$f(x+i)=fx+iP,$$

la loi de la série et l'expression des restes, en prenant alternativement les fonctions dérivées par rapport à x et à i; nous marquerons ces dernières par un trait placé au bas.

On a d'abord par les fonctions dérivées relatives à x, $f'(x+i)=f'x+iP'$; ensuite par les fonctions dérivées relatives à i, $f'(x+i)=P+iP_{,}$; car il est visible que relativement à i, la dérivée de $f(x+i)$ est la même que relativement à m. On aura donc

$$f'x+iP'=P+iP_{,};\quad \text{d'où l'on tire}\quad P=f'x+i(P'-P_{,}).$$

Faisons

$$Q = P' - P_1,$$

on aura, en substituant la valeur de P,

$$f(x+i) = fx + if'x + i^2Q.$$

Prenons de nouveau les fonctions dérivées par rapport à x et par rapport à i, on aura

$$f'(x+i) = f'x + if''x + i^2Q' \quad \text{et} \quad f'x+i) = f'x + 2iQ + i^2Q_1,$$

donc

$$f''x + iQ' = 2Q + iQ_1, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{f''x + i(Q' - Q_1)}{2};$$

Donc si on fait

$$R = \frac{Q' - Q_1}{2},$$

on aura en substituant,

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + i^3R.$$

On trouvera de même, en faisant

$$S = \frac{R' - R_1}{3},$$

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''x + i^4S,$$

et ainsi de suite.

Si on fait, par exemple, $fx = \frac{1}{x}$, ce qui donne

$$P = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+i)},$$

on aura

$$P' = \frac{1}{x^2(x+i)} + \frac{1}{x(x+i)^2}, \quad P_1 = \frac{1}{x(x+i)^2};$$

donc

$$Q = \frac{1}{x^2(x+i)};$$

ensuite,

$$Q' = -\frac{2}{x^3(x+i)} - \frac{1}{x^2(x+i)^2}, \quad Q_1 = -\frac{1}{x^2(x+i)^2},$$

et de là

$$R = -\frac{1}{x^3(x+i)};$$

on trouvera de même

$$S = \frac{1}{x^4(x+i)};$$

et ainsi de suite, ce qui redonnera la série déjà trouvée.

Mais pour notre objet, il importe moins de connaître les restes exacts de la série développée jusqu'à un terme quelconque, que d'avoir des limites de ces restes pour pouvoir apprécier l'erreur qu'on peut commettre en ne tenant compte que de quelques-uns des premiers termes.

38. Pour cela, nous allons établir ce lemme général :

Si une fonction prime de x, telle que $f'x$, est toujours positive pour toutes les valeurs de x, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, b étant $> a$, la différence des fonctions primitives qui répondent à ces deux valeurs de x, savoir, $fb - fa$, sera nécessairement une quantité positive.

Reprenons la formule $f(x+i) = fx + iP$, dans laquelle P est une fonction de x et i, qui, en faisant $i = 0$, devient $f'x$ (art. 3, 8); il est évident que si $f'x$ est une quantité positive, la valeur de P sera nécessairement positive depuis $i = 0$ jusqu'à une certaine valeur de i, qu'on pourra prendre aussi petite qu'on voudra. Donc lorsque la valeur de la fonction prime $f'x$ est positive, on pourra toujours prendre pour i une quantité positive et assez petite, pour que la quantité $f(x+i) - fx$ soit nécessairement positive.

Mettons successivement à la place de x les quantités a, $a+i$, $a+2i$, $a+3i$, etc., $a+ni$, il en résultera que l'on peut prendre i positif et assez petit pour que toutes les quantités $f(a+i) - fa$, $f(a+2i) - f(a+i)$, $f(a+3i) - f(a+2i)$, jusqu'à $f[a+(n+1)i] - f(a+ni)$, soient nécessairement positives, si les quantités $f'a$, $f'(a+i)$, $f'(a+2i)$, etc. jusqu'à $f'(a+ni)$ le sont. Donc aussi, dans ce cas, la somme des premières quantités, c'est-à-dire, la quantité $f[a+(n+1)i] - fa$ sera positive.

Faisons maintenant $a+(n+1)\,i=b$, on aura

$$i=\frac{b-a}{n+1},$$

et l'on en conclura que la quantité $fb-fa$ sera nécessairement positive, si toutes les quantités $f'a$, $f'\left(a+\frac{b-a}{n+1}\right)$, $f'\left(a+\frac{2(b-a)}{n+1}\right)$, $f'\left(a+\frac{3(b-a)}{n+1}\right)$, etc. jusqu'à $f'\left(a+\frac{n(b-a)}{n+1}\right)$, sont positives, en prenant n aussi grand qu'on voudra.

Donc, à plus forte raison, la quantité $fb-fa$ sera positive, si $f'x$ est toujours une quantité positive, en donnant à x toutes les valeurs possibles, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, puisque parmi ces valeurs se trouveront nécessairement les valeurs a, $a+\frac{b-a}{n+1}$, $a+\frac{2(b-a)}{n+1}$, etc., $a+\frac{n(b-a)}{n+1}$, en prenant n aussi grand qu'on voudra.

39. A l'aide de ce lemme, on peut trouver des limites en plus et en moins de toute fonction primitive dont on connaît la fonction prime.

Soit la fonction primitive Fz dont la fonction prime $F'z$ soit exprimée par z^mZ, Z étant une fonction donnée de z. Soit M la plus grande, et N la plus petite valeur de Z pour toutes les valeurs de z comprises entre les quantités a et b, en regardant comme plus grandes les négatives moindres, et comme moindres les négatives plus grandes, ce qui est conforme à la marche du calcul, puisque, par exemple, $-1>-2$, $-5>-7$, et de même $-2<-1$, et ainsi des autres. Donc les quantités $M-Z$ et $Z-N$ seront toujours positives depuis $z=a$ jusqu'à $z=b$, et il en sera de même des quantités $z^m(M-Z)$ et $z^m(Z-N)$.

Donc, 1°. si on fait $f'z=z^m(M-Z)$, on aura par le lemme précédent $fb-fa>0$; or z^mZ étant $F'z$, sa fonction primitive sera Fz, et comme M est une quantité constante, la fonction

tion primitive de Mz^m est $\frac{Mz^{m+1}}{m+1}$; donc on aura

$$fz = \frac{Mz^{m+1}}{m+1} - Fz;$$

et faisant successivement $z = a$ et $z = b$, l'équation $fb - fa > 0$ donnera

$$\frac{Mb^{m+1}}{m+1} - Fb - \frac{Ma^{m+1}}{m+1} + Fa > 0;$$

d'où l'on tire

$$Fb < Fa + \frac{M(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

2°. Si on fait $f'z = z^m(Z - N)$, on aura aussi $fb - fa > 0$, et l'on trouvera comme ci-dessus,

$$fz = Fz - \frac{Nz^{m+1}}{m+1};$$

donc faisant successivement $z = a$ et $= b$, l'équation $fb - fa > 0$ donnera

$$Fb - \frac{Nb^{m+1}}{m+1} - Fa + \frac{Na^{m+1}}{m+1} > 0;$$

d'où l'on tire

$$Fb > Fa + \frac{N(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

Appliquons ces résultats aux quantités P, Q, R, etc. de l'art. 35.

Comme ces quantités sont regardées comme des fonctions de x, nous supposerons d'abord $P = Fz$, et par conséquent

$$P' = F'z = f'(x - xz);$$

donc, puisqu'on a supposé $F'z = z^m Z$, prenant $m = 0$, on aura

$$Z = f'(x - xz).$$

Faisons maintenant $a = 0$ et $b = 1$, la condition de la fonction

P, qui doit être nulle lorsque $z = 0$, donnera $Fa = 0$, et alors Fb sera la valeur de P répondant à $z = 1$.

Donc, si M et N sont la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x - xz)$, relativement à toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$Fb < M \text{ et } > N.$$

Par conséquent M et N seront les deux limites de la quantité P, en y faisant $z = 1$.

Supposons en second lieu, $Q = Fz$, on aura

$$Q' = F'z = zf''(x - xz);$$

donc faisant $m = 1$, on aura

$$Z = f''(x - xz).$$

Soit pareillement $a = 0$ et $b = 1$, on aura aussi par la condition de la fonction Q, qui doit être nulle lorsque z est nul, $Fa = 0$, et alors Fb sera égale à la valeur de Q, répondant à $= 1$.

Donc, si M_1 et N_1 sont la plus grande et la plus petite valeur de $f''(x - xz)$ pour toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$, on aura

$$Fb < \frac{M_1}{2} \text{ et } > \frac{N_1}{2}.$$

de sorte que $\frac{M_1}{2}$ et $\frac{N_1}{2}$ seront les limites de la valeur Q lorsque z y est $= 1$.

Supposons, en troisième lieu, $R = Fz$, on aura

$$R' = F'z = \frac{z^2}{2} f'''(x - xz);$$

donc faisant $m = 2$, $a = 0$, $b = 1$, on trouvera de la même manière que si M_2 et N_2 sont la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{1}{2} f'''(x - xz)$, en donnant à z toutes les valeurs depuis zéro

jusqu'à l'unité, on aura $\frac{M_2}{3}$ et $\frac{N_2}{3}$ pour les limites de la valeur de la quantité R, lorsqu'on y fait $z = 1$.

Et ainsi de suite.

Maintenant il est clair qu'en donnant à z, dans une fonction de $x(1-z)$, toutes les valeurs depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$, les valeurs que recevra cette fonction seront les mêmes que celles que recevrait une pareille fonction de u, en donnant successivement à u toutes les valeurs depuis $u=0$ jusqu'à $u=x$; car faisant $x(1-z)=u$, $z=0$ donne $u=x$, $z=1$ donne $u=0$, et les valeurs intermédiaires de z donneront des valeurs de u intermédiaires entre celles-ci. D'où il est aisé de conclure que les quantités M et N seront la plus grande et la plus petite valeur de de $f'u$, relativement à toutes les valeurs de u, depuis $u=0$ jusqu'à $u=x$; et que par conséquent toute valeur intermédiaire entre M et N pourra être exprimée par $f'u$, en donnant à u une valeur intermédiaire entre 0 et x. Donc la valeur de la quantité P relative à $z=1$ pourra être exprimée par $f'u$, u étant une quantité entre 0 et x. On en conclura de même que la valeur de Q répondant à $z=1$, pourra être exprimée par $\frac{1}{2}f''u$, en donnant à u une valeur intermédiaire entre 0 et x. Et on en conclura pareillement, que la valeur de R relative à $z=1$ pourra être exprimée par $\frac{1}{2.3}f'''u$, en prenant pour u une quantité entre 0 et x.

Et ainsi de suite.

40. D'où résulte enfin ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa généralité, qu'en désignant par u une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites 0 et x, on peut développer successivement toute fonction de x et d'autres quantités quelconques suivant les puissances de x, de cette manière,

$$\begin{aligned} fx &= f. + xf'u \\ &= f. + xf'. + \frac{x^2}{2}f''u, \\ &= f. + xf'. + \frac{x^2}{2}f''. + \frac{x^3}{2.3}f'''u, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

les quantités f., f'., f''., etc. étant les valeurs de la fonction fx et de ses dérivées $f'x$, $f''x$, etc., lorsqu'on y fait $x = 0$.

Ainsi pour le développement de $f(z+x)$, suivant les puissances de x, on aura

$$f. = fz, \quad f'. = f'z, \quad f''. = f''z, \quad \text{etc.},$$

où l'on remarquera que les quantités $f'z$, $f''z$, etc. sont également les fonctions primes, secondes, etc. de fz, ce qui est évident, car il est visible que $f'(z+x)$, $f''(z+x)$, etc. sont également les fonctions primes, secondes, etc. de $f(z+x)$, soit qu'on les prenne relativement à x ou relativement à z, puisque l'augmentation de $z+x$ est la même, en changeant x en $x+i$, ou z en $z+i$.

Prenant donc $f'z$, $f''z$, etc. pour les fonctions dérivées de fz, on aura

$$\begin{aligned} f(z+x) &= fz + xf'(z+u), \\ &= fz + xf'z + \tfrac{x^2}{2} f''(z+u), \\ &= fz + xf'z + \tfrac{x^2}{2} f''z + \tfrac{x^3}{2.3} f'''(z+u), \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

où u désigne une quantité inconnue, mais renfermée entre les limites o et x.

En changeant z en x et x en i, on aura le développement de $f(x+i)$ suivant les puissances de i; et l'on voit que dans ce développement la série infinie, à commencer d'un terme quelconque, est toujours égale à la valeur de ce premier terme, en y mettant $x+j$ à la place de x, j étant une quantité entre o et i; que par conséquent la plus grande et la plus petite valeur de ce terme, relativement à toutes les valeurs de j, depuis o jusqu'à i, seront les limites de la valeur du reste de la série continuée à l'infini.

Si on fait $fz = z^m$, on aura le développement du binome $(z+x)^m$, et on en conclura que la somme de tous les termes, à commencer

d'un terme quelconque

$$\frac{m(m-1).....(m-n+1)}{1.2.....n} z^{m-n}x^n,$$

sera renfermée entre ces limites

$$\frac{m(m-1).....(m-n+1)}{1.2.....n} z^{m-n}x^n$$

et

$$\frac{m(m-1).....(m-n+1)}{1.2.....n} (z+x)^{m-n}x^n;$$

car il est évident que la plus grande et la plus petite valeur de $(z+u)^{m-n}$ seront $(z+x)^{m-n}$ et z^{m-n}.

La perfection des méthodes d'approximation dans lesquelles on emploie les séries, dépend non-seulement de la convergence des séries, mais encore de ce qu'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes qu'on néglige ; et à cet égard on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, sont encore très-imparfaites. Le théorème précédent pourra servir dans beaucoup d'occasions à donner à ces méthodes la perfection qui leur manque, et sans laquelle il est souvent dangereux de les employer.

On trouve dans la leçon IX du *Calcul des Fonctions*, une méthode plus simple d'avoir les limites du développement d'une fonction, avec de nouvelles remarques sur ce sujet. Voyez aussi un Mémoire de M. *Ampère*, dans le tome VI du Journal de l'Ecole Polytechnique.

CHAPITRE VII.

Des Équations dérivées et de leur usage dans l'analyse pour la transformation des fonctions. Théorie générale de ces équations et des constantes arbitraires qui y entrent.

41. Jusqu'a présent nous n'avons considéré les fonctions dérivées, que comme pouvant servir à la formation des séries; mais ces fonctions, considérées en elles-mêmes, offrent un nouveau système d'opérations algébriques, et fournissent des transformations qui sont d'un usage immense dans toute l'analyse.

Nous avons déjà vu (art. 17), que si on a une équation quelconque en x et y, ou simplement en x, laquelle doive avoir lieu quelle que soit la valeur de x, les équations dérivées qu'on obtiendra, en prenant les fonctions dérivées de chaque terme de la proposée, auront lieu aussi. Chacune de ces équations, et même une combinaison quelconque de ces équations, pourra donc tenir lieu de l'équation primitive; et on obtiendra souvent par ce moyen des équations subsidiaires plus simples ou plus faciles à résoudre que les équations principales.

Nous avons nommé *équations primes*, *secondes*, etc., les équations dérivées qu'on obtient en prenant les fonctions primes, secondes, etc. de tous les termes de l'équation primitive donnée; mais nous nommerons en général *équations dérivées du premier ordre*, *du second ordre*, etc., les équations qu'on pourra former par une combinaison quelconque de l'équation primitive et de son équation prime, ou de celles-ci et de l'équation seconde, et ainsi de suite.

Ainsi l'équation primitive contenant x et y, l'équation dérivée

du premier ordre contiendra x, y et y', l'équation dérivée du second contiendra x, y, y' et y''; et ainsi du reste.

42. Nous allons montrer, par quelques exemples, l'usage des équations dérivées pour la transformation des fonctions. Et d'abord nous remarquerons que par la combinaison d'une fonction avec sa fonction prime, on peut faire disparaître un exposant quelconque.

Soit l'équation $y = X^m$, X étant une fonction quelconque de x, en prenant les fonctions primes, on aura (art. 16),

$$y' = mX^{m-1}X';$$

donc, divisant cette équation par la précédente, on aura

$$\frac{y'}{y} = \frac{mX'}{X}, \quad \text{savoir,} \quad Xy' - mX'y = 0,$$

équation dérivée du premier ordre où la puissance X^m ne se trouve plus, et qui dans cet état, est bien plus commode pour développer la valeur de y en série, par la méthode usitée des coefficiens indéterminés.

En effet, si on a, par exemple,

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

et qu'on suppose

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

on aura, en prenant les fonctions primes,

$$X' = b + 2cx + 3dx^2 + \text{etc.},$$
$$y' = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.};$$

donc, substituant et réunissant les termes affectés de la même puissance de x, on aura

$$aB - mbA + [2aC + bB - m(2cA + bB)]\,x$$
$$+ [3aD + 2bC + cB - m(3dA + 2cB + bC)]x^2$$
$$+ \text{etc.} = 0,$$

équation qui devant être identique, c'est-à-dire avoir lieu quel que soit x, pour que l'expression supposée de y soit vraie, donnera autant d'équations particulières qu'il y a de différentes puissances de x, et on tirera de ces équations,

$$B = \frac{mbA}{a},$$

$$C = \frac{2mcA + (m-1)\,bB}{2a},$$

$$D = \frac{3mdA + (2m-1)\,cB + (m-2)\,bC}{3a},$$

etc.

On aura ainsi successivement tous les coefficiens B, C, D, etc. par des formules dont la loi est visible, et qu'on pourra par conséquent continuer aussi loin qu'on voudra.

Mais le premier coefficient A demeure indéterminé; il faut, pour le déterminer, recourir à l'équation primitive $y = X^m$; faisant $x = 0$, on a d'un côté $X = a$, et de l'autre $y = A$; donc $A = a^m$.

43. On peut de même, par les fonctions dérivées, faire disparaître les logarithmes, les exponentielles et les sinus et cosinus.

En effet, si $y = lX$, on aura l'équation du premier ordre $y'X - X' = 0$; si $y = e^X$, on aura celle-ci, $y' - X'y = 0$; mais pour faire disparaître les sinus ou cosinus, il faudra aller à une équation du second ordre.

Soit donc $y = \sin X$, X étant toujours une fonction quelconque de x, en prenant les fonctions primes, on aura (art. 14),

$$y' = X' \cos X,$$

et, prenant de nouveau les fonctions primes,

$$y'' = X'' \cos X - X'^2 \sin X;$$

donc, éliminant de ces trois équations sin X et cos X, on aura cette équation dérivée du second ordre,

$$X'y'' - X''y' + X'^3 y = 0,$$

où

où il n'y a plus de transcendantes; on trouvera la même équation en faisant $y = \cos X$.

Si on fait ici pour X et y les mêmes substitutions que ci-dessus (art. 42), et qu'après avoir ordonné les termes suivant les puissances de x, on égale à zéro la somme de tous ceux qui se trouveront multipliés par la même puissance de x, on aura autant d'équations particulières qui serviront à déterminer les coefficiens indéterminés de l'expression supposée de y par les deux qui précèdent. A l'égard des deux premiers, ils demeureront indéterminés; mais il faudra les déterminer de manière que l'équation primitive et l'équation prime aient lieu en faisant $x = 0$. Or l'équation $y = \sin X$ devient alors $A = \sin a$, et l'équation $y' = X' \cos X$ devient $B = b \cos a$.

44. Non-seulement l'équation dérivée du second ordre que nous venons de trouver, peut servir à développer en série la valeur de sin X ou cos X; elle peut servir aussi à trouver une autre transformation de cette valeur, au moyen des exponentielles.

Supposons, en effet, $y = e^V$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité (art. 12), et V une fonction indéterminée de x; en prenant les fonctions primes et secondes, on aura

$$y' = V' e^V, \quad y'' = (V'^2 + V'') e^V,$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation dont il s'agit, on aura, après la division par la quantité e^V qui en multiplie tous les termes,

$$X'(V'' + V'^2) - X''V' + X'^3 = 0.$$

J'observe qu'on peut satisfaire à cette équation en faisant

$$V' = mX',$$

m étant un coefficient constant, ce qui donne $V'' = mX''$; car substituant ces valeurs, l'équation se réduit à

$$(1 + m^2) X'^3 = 0;$$

donc

$$1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad m = \sqrt{-1}.$$

Ainsi on aura

$$V' = X'\sqrt{-1};$$

et de là, en remontant à l'équation primitive,

$$V = X\sqrt{-1} + a,$$

a étant une constante arbitraire; donc

$$e^V = e^{a+X\sqrt{-1}} = e^a \times e^{X\sqrt{-1}} = Ae^{X\sqrt{-1}},$$

en faisant $e^a = A$ pour plus de simplicité.

On aura donc

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}},$$

et comme le radical $\sqrt{-1}$ peut être pris également en plus et en moins, on aura également

$$y = Be^{-X\sqrt{-1}},$$

B étant une autre constante arbitraire; en effet, il est aisé de voir que chacune de ces deux valeurs satisfait à l'équation

$$X'y'' - X''y' + X'^3y = 0;$$

et on voit aussi facilement que leur somme y satisfait encore, parce que les quantités y, y', y'' n'y sont que sous la forme linéaire. De sorte qu'on aura en général,

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}} + Be^{-X\sqrt{-1}},$$

A et B étant de nouveau deux coefficiens indéterminés comme ci-dessus.

Cette expression de y convient également à sin X et à cos X; la différence consiste dans les constantes A et B qui doivent se déterminer par la comparaison des valeurs de y et de y' pour une valeur quelconque de X. Ainsi, puisque sin X doit devenir nul lorsque $X = 0$ par la nature des sinus, il faudra que l'on ait $A + B = 0$; de plus, y' étant $= X' \cos X$, et l'expression précédente de y donnant $y' = X'(Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos X = (Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})\sqrt{-1};$$

faisant $X = 0$, on sait que $\cos X = 1$; donc $(A - B)\sqrt{-1} = 1$. Ces deux équations donnent

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{-1}};$$

donc enfin,

$$\sin X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} - e^{-X\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

On trouvera de la même manière,

$$\cos X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} - e^{-X\sqrt{-1}}}{2},$$

expressions connues, et que nous avions déjà trouvées par une autre voie (art. 22).

45. Dans les exemples précédens, nous avons cherché l'équation dérivée, et nous avons ensuite déterminé par cette équation la valeur de la fonction primitive y. Cette dernière opération est, comme l'on voit, l'inverse de celle par laquelle on descend de la fonction primitive aux fonctions dérivées ; elle peut toujours s'exécuter par le moyen des séries, en employant, comme nous l'avons fait, une série avec des coefficiens indéterminés, et faisant des equations séparees des termes affectés de chaque puissance de x. De cette manière, on détermine les coefficiens les uns par les autres, et on a souvent l'avantage d'apercevoir la loi générale qui règne entre ces coefficiens.

Mais on peut aussi trouver immédiatement chaque coefficient par la méthode des art. 33 et suivans ; car il n'y a qu'à chercher successivement les valeurs des fonctions dérivées, et si on désigne par (y), (y'), (y''), etc., les valeurs de y, y', y'', etc. lorsque $x = 0$, on a en général

$$y = (y) + x(y') + \frac{x^2}{2}(y'') + \text{etc.}$$

Cette formule a l'avantage de faire voir la raison pourquoi il reste

des coefficiens indéterminés, comme nous l'avons trouvé ci-dessus. En effet, si on veut déterminer la valeur de y par une équation dérivée du premier ordre, cette équation donnera la valeur de y' en x et y, et de là on trouvera une équation du second ordre en y'', y', y, x, une équation du troisième en y''', y'', y', y, x, et ainsi de suite; de sorte qu'en substituant successivement dans ces équations les valeurs de y', y'', etc. données par les équations précédentes, on aura en dernière analyse y', y'', y''', etc. exprimés en x et y. Donc, faisant $x=0$, on aura (y'), (y''), (y'''), etc. exprimés en (y) qui demeurera indéterminé.

De même, si on ne fait dependre la détermination de y que d'une équation dérivée du second ordre en x, y, y' et y'', on en tirera successivement une équation tierce entre x, y, y', y'', y''', et ainsi de suite; et par des substitutions successives, on aura en dernière analyse, y'', y''', etc., donnés en x, y, y'; de sorte qu'en faisant $x=0$, on aura les valeurs de (y''), (y'''), (y^{IV}), etc., exprimées en (y) et (y'), ces deux quantités demeurant indéterminées; et ainsi de suite.

Ainsi, lorsqu'on part d'une équation dérivée du premier ordre, il reste une indéterminée (y); lorsqu'on part d'une équation du second ordre, il reste deux indéterminées (y) et (y'), et ainsi de suite; et l'on voit que ces indéterminées sont constantes, puisque ce sont les valeurs de y, y', y'', etc., lorsque $x=0$.

46. Quoique la conclusion précédente soit fondée sur la théorie des séries, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle doit avoir lieu généralement, quelle que soit l'expression de y, puisqu'on peut toujours regarder une expression en série comme le développement d'une expression finie. Mais comme c'est là une propriété caractéristique des équations dérivées entre deux variables, il est important de l'établir sur la nature même de ces équations.

Considérons donc en général l'équation à deux variables $F(x,y)=0$, et désignons simplement par $F(x,y)'=0$ son équation prime, par $F(x,y)''=0$, l'équation seconde, et ainsi de suite, en regardant x et y comme variable à-la-fois. Soient

a, b, c, etc. des constantes quelconques contenues dans la fonction $F(x, y)$, ces constantes seront les mêmes dans les fonctions dérivées; ainsi, puisque les équations $F(x,y)=0$ et $F(x,y)'=0$ ont lieu en même temps, on pourra en éliminer une constante a, et l'équation résultante sera une équation du premier ordre entre x, y et y', qui renfermera une constante de moins que l'équation primitive, et qui aura par conséquent lieu en même temps que celle-ci. De même les trois équations $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$, ayant lieu à la fois, on pourra en éliminer deux constantes a, b; et l'équation résultante sera une équation du second ordre entre x, y, y' et y'', qui renfermera deux constantes de moins que l'équation primitive, et qui aura lieu en même temps qu'elle; et ainsi de suite.

Donc, puisque dans les équations à deux variables, une équation du premier ordre peut renfermer une constante de moins que l'équation primitive, une équation du second ordre peut renfermer deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite, il s'ensuit réciproquement que l'équation primitive doit contenir une constante de plus que l'équation dérivée du premier ordre, deux constantes de plus que l'équation dérivée du second ordre, et ainsi de suite, constantes qui seront par conséquent arbitraires; et il est visible en même temps qu'elles ne sauraient en contenir davantage, puisqu'on ne pourrait pas les faire disparaître toutes par le moyen des équations dérivées.

Donc, si l'on n'a pour la détermination d'une fonction qu'une équation du premier ordre, ou du second, ou etc., l'équation primitive, prise dans toute sa généralité, devra contenir une constante arbitraire, ou deux, etc., suivant l'ordre de l'équation donnée: et on déterminera ces constantes par des valeurs particulières données de la fonction ou de ses dérivées.

Si donc on trouve d'une manière quelconque une équation en x et y qui satisfasse à une équation donnée d'un ordre quelconque, et qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'indice de cet ordre, on en conclura que cette équation sera l'équation primitive de l'équation donnée, et pourra, dans tous les cas, être employée à la place de celle-ci.

47. Au lieu d'éliminer à la fois les deux constantes a et b des trois équations $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$, on peut n'éliminer d'abord que la constante b ou a des deux premières; on aura ainsi deux équations du premier ordre, dont l'une ne renfermera que la constante a, et l'autre la constante b. Si maintenant on élimine de chacune de ces équations la constante a ou b par le moyen de son équation prime, on aura deux équations du second ordre sans a ni b, qui devront coïncider avec l'équation résultante de l'élimination simultanée de ces constantes, par le moyen des trois équations $F(x,y)=0$, $F(x,y)'=0$, $F(x,y)''=0$, parce que la valeur de y'' que ces équations du second ordre donneront, et qui sera exprimée en x, y et y', sans a ni b, ne peut qu'être la même, de quelque manière qu'elle soit déduite de l'équation primitive.

D'où l'on peut conclure qu'une équation du second ordre peut être dérivée de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire de plus.

Et l'on prouvera de la même manière, qu'une équation du troisième ordre pourra être dérivée de trois équations différentes du second ordre, renfermant chacune une constante arbitraire; et ainsi de suite.

En même temps on voit que si pour une équation donnée du second ordre, on en trouve deux du premier ordre qui satisfassent chacune à cette équation, et qui renferment chacune une constante arbitraire a ou b, on en pourra déduire immédiatement l'équation primitive; car il suffira de chasser de ces équations la quantité y', et l'on aura une équation en x et y, avec deux constantes arbitraires a et b.

Il en sera de même pour les équations du troisième ordre; car si on trouve trois équations du second ordre qui satisfassent chacune à une équation du troisième ordre, et qui aient en même temps les constantes arbitraires a, b, c, on aura, en éliminant y' et y'', une équation en x, y et a, b, c, qui sera par conséquent l'équation primitive de l'équation donnée; et ainsi de suite.

48. Mais si pour une équation du second ordre on en trouve

deux du premier ordre qui y satisfassent, et dont une seule renferme une constante arbitraire, alors en éliminant y', on aura une équation en x et y, qui ne renfermera qu'une constante arbitraire, et qui ne sera pas l'équation primitive complète de la proposée du second ordre; mais cette équation satisfera également aux deux du premier ordre, puisqu'elle satisfait à celle du second ordre, qui est également dérivée de ces deux-ci; donc elle pourra être regardée comme l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre qui ne renferme point de constante arbitraire. D'où je conclus qu'étant proposée une équation du premier ordre en x, y et y', si on en déduit d'une manière quelconque une équation du second, soit en éliminant une constante ou non, et qu'ensuite on trouve une autre équation primitive du premier ordre, avec une constante arbitraire a, on aura, par l'élimination de y' entre celle-ci et la proposée, une équation en x et y qui contiendra la constante arbitraire a, et qui sera par conséquent l'équation primitive complète de la proposée.

On prouvera de la même manière que si de la proposée du premier ordre on déduit une équation du troisième ordre, et qu'ensuite on trouve pour celle-ci une équation primitive du second, avec une constante arbitraire dans laquelle la proposée ne soit pas renfermée, il n'y aura qu'à éliminer les y'' et y' au moyen de la proposée, et l'on aura une équation en x et y qui renfermera une constante arbitraire, et qui sera par conséquent l'équation primitive complète de la proposée; et ainsi de suite.

On peut appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs au premier, et en tirer des conclusions semblables.

Le sujet de ce chapitre est traité avec plus de détail dans les leçons X, XI et XII du *Calcul des fonctions*, où le lecteur trouvera une analyse complète des sections angulaires.

CHAPITRE VIII,

Où l'on examine les cas simples dans lesquels on peut passer des fonctions ou des équations dérivées du premier ordre aux fonctions ou aux équations primitives. Des équations linéaires des différens ordres, et de celles qu'on peut rendre linéaires.

49. UNE équation du premier ordre en x, y et y' étant donnée, si on peut, par des opérations quelconques, la ramener à la forme $f(x,y)'=0$, où $f(x,y)'$ désigne la fonction prime d'une fonction de x, y, marquée par $f(x,y)$, on aura sur-le-champ l'équation primitive $f(x,y)=a$, dans laquelle a sera la constante arbitraire.

Par exemple, l'équation $y'=0$ donne sur-le-champ $y=a$; l'équation $xy'-y=0$ étant divisée par x^2, se réduit à $\left(\frac{y}{x}\right)'=0$; j'entends par $\left(\frac{y}{x}\right)'$ la fonction prime de la quantité $\frac{y}{x}$ renfermée entre les deux crochets; d'où l'on tire $\frac{y}{x}=a$, ou bien, en divisant la même équation par xy, elle devient

$$\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}=0,$$

dans laquelle les variables x, y ne sont plus mêlées; prenant donc la fonction primitive de chaque terme, on aura

$$ly-lx=la,$$

la caractéristique l indiquant les logarithmes hyperboliques; d'où l'on tire $\frac{y}{x}=a$, comme plus haut.

En

En général, si on peut réduire l'équation à la forme

$$fx + y'Fy = 0,$$

où les variables sont séparées, il n'y aura qu'à prendre les fonctions primitives de fx et de $y'Fy$, et faire la somme égale à une constante arbitraire a; et la même chose aura lieu si on peut ramener la proposée à cette forme, par une substitution quelconque.

Soit, par exemple, une équation de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

je fais $\frac{y}{x} = u$; donc $y = xu$, $y' = xu' + u$; et l'équation devient, par ces substitutions,

$$xu' + u = fu,$$

laquelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{u'}{u - fu} = 0,$$

qui est comprise dans la précédente.

Si on avait l'équation $y = xfy'$, au lieu de la réduire à la forme précédente, j'en prendrais les fonctions primes, ce qui me donnerait

$$y' = xy''f'y' + fy',$$

équation réductible à la forme

$$\frac{1}{x} + \frac{y''f'y'}{fy' - y'} = 0,$$

et qui, en faisant $y' = u$, rentre encore dans le cas précédent. Ayant trouvé ainsi une équation primitive entre x et u avec une constante arbitraire, c'est-à-dire entre x et y', on chassera y' par le moyen de la proposée, et l'on aura une équation entre x et y avec la constante arbitraire, laquelle sera, par conséquent,

l'équation primitive complète de la proposée. Cette dernière méthode est, comme l'on voit, une application de la théorie de l'article précédent.

50. De cette manière on ramène, comme l'on voit, la recherche des fonctions primitives de deux variables, à celle des fonctions primitives d'une seule variable; mais comme on n'y parvient ordinairement qu'en employant pour x et y d'autres variables, comme t et u, c'est-à-dire en substituant pour x et y des fonctions données de t et u, il faut observer, à l'égard de ces substitutions, que u devenant fonction de t en vertu de l'équation qui a lieu entre x et y, ces deux variables devront être aussi regardées comme fonctions de t. Donc, ayant supposé $y = fx$, on aura, en regardant maintenant x et y comme fonctions de t, $y' = x'f'x$ (art. 16); mais lorsqu'on regarde y simplement comme fonction de x, on a $y' = f'x$, comme nous l'avons fait jusqu'ici; donc, pour passer de cette hypothèse à celle où x et y sont fonctions de t, il faut mettre à la place de y', la quantité $\frac{y'}{x'}$.

Ainsi, ayant à transformer l'équation $y' = F(x, y)$, on commencera par la changer en $y' = x'F(x, y)$, ensuite on y substituera pour x, y, x', y' leurs valeurs en t, u et u', où u' sera la fonction prime de u regardé comme fonction de t.

De même, puisque y'' est la fonction prime de y', regardé comme fonction de x, il faudra substituer pour y'' la quantité $\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}$, c'est-à-dire $\frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}$; et ainsi de suite.

Donc, si dans une équation, au lieu de regarder y comme fonction de x, on voulait réciproquement regarder x comme fonction de y, alors la fonction prime de y deviendrait l'unité, et l'on y substituerait simplement $\frac{1}{x'}$ pour y', $-\frac{x''}{x'^3}$ pour y''; et ainsi de suite.

51. Il y a, au reste, une manière générale de trouver l'équation primitive d'une équation dérivée d'un ordre quelconque; elle con-

siste à rendre le premier membre de l'équation, dont le second est zéro, une fonction dérivée exacte par le moyen d'un multiplicateur. On trouvera dans la leçon XIII du *Calcul des Fonctions*, une démonstration de l'existence de ce multiplicateur, dans toutes les équations dérivées; mais la recherche en est le plus souvent très-difficile, ce qui rend cette méthode plus curieuse qu'utile.

52. Quant à la manière de trouver les fonctions primitives des fonctions d'une seule variable, comme de Fx ou de $y'Fy$, on sait que si Fx est une fonction rationnelle de x, on peut toujours la décomposer en différens termes de la forme x^m ou $\frac{1}{(a+bx)^m}$, m étant un nombre entier positif, et $a+bx$ un facteur du dénominateur de la fonction, s'il en a un. Ainsi la fonction primitive de Fx sera composée d'autant de termes de la forme $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ et $\frac{(a+bx)^{1-m}}{b(1-m)}$, ou lx si $m=-1$, et $\frac{l(a+bx)}{b}$ si $m=1$; et il en sera de même de la fonction primitive de $y'Fy$ (art. 32).

Si Fx contient des quantités irrationnelles, on les fera disparaître par des substitutions, ce qui n'est possible en général par les méthodes connues, que pour les radicaux de la forme $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Quand il y a dans Fx des radicaux plus compliqués, ou même quand il y a plus d'un radical de cette forme, la recherche de la fonction primitive devient impossible en général par les méthodes connues; et on ne peut l'obtenir que par le moyen des séries, soit en faisant disparaître les radicaux par leur résolution en série, soit en employant la méthode générale pour le développement en série de toute fonction de x (art. 33). Pour cela, on supposera $f'x=Fx$; de là on aura

$$f''x=F'x,\quad f'''x=F''x,\quad \text{etc.}$$

Donc la valeur de fx, fonction primitive de Fx, sera représentée ainsi,

$$fx=f.+xF.+\frac{x^2}{2}F'.+\frac{x^3}{2.3}F'',\text{ etc.},$$

les quantités f., F., F', etc. étant les valeurs de fx, Fx, $F'x$, etc., lorsque $x = 0$, où l'on voit que f. sera une constante indéterminée.

53. Si, pour une équation proposée d'un ordre quelconque, on parvient à trouver une équation d'un ordre inférieur qui ne renferme point de constantes arbitraires, ou qui n'en renferme pas autant qu'il peut y en avoir, alors cette équation ne pourra pas être regardée comme une équation primitive complète, mais elle ne sera qu'un cas particulier de cette équation, dans lequel on aurait donné aux constantes arbitraires des valeurs particulières.

Mais il y a un cas très-étendu, dans lequel il suffit d'avoir plusieurs valeurs particulières de y en x pour pouvoir en obtenir la valeur complète; c'est celui où l'équation d'un ordre quelconque ne renferme les y, y', y'', etc. que sous la forme linéaire.

Soit, en effet, proposée l'équation

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle A, B, C, etc. soient des fonctions données de x seul. Soient p, q, r, etc. des fonctions différentes de x, qui, étant substituées pour y, satisfassent chacune en particulier à cette équation, je dis que l'on aura en général

$$y = ap + bq + cr + \text{etc.},$$

a, b, c, etc. étant des constantes arbitraires; ce qui est evident; car cette expression de y étant substituée dans la même équation, y satisfera indépendamment des constantes. D'où il suit que si le nombre des valeurs particulières p, q, r, etc. est égal à celui de l'ordre de l'équation proposée, c'est-à-dire à l'indice de la fonction dérivée $y'''^{\text{etc.}}$ la plus élevée, on aura l'expression complète de y. L'analyse de l'article 44 fournit un exemple de cette méthode.

Mais il y a plus : on peut alors trouver aussi la valeur complète de y, qui satisfera à l'équation

$$Ay + By' + Cy'' + \text{etc.} = X,$$

X étant aussi une fonction quelconque de x.

Comme cette méthode est une des plus utiles dans ce genre d'analyse, je crois devoir l'exposer ici en peu de mots.

54. Supposons que l'équation proposée soit du troisième ordre, on verra aisément que la méthode est générale pour un ordre quelconque. Soit donc l'équation

$$Ay + By' + Cy'' + y''' = X,$$

et soient p, q, r trois valeurs différentes et particulières de y et x, qui satisfassent à l'équation

$$Ay + By' + Cy'' + y''' = 0;$$

ensorte que l'on ait

$$Ap + Bp' + Cp'' + p''' = 0,$$
$$Aq + Bq' + Cq'' + q''' = 0,$$
$$Ar + Br' + Cr'' + r''' = 0.$$

Supposons $y = ap + bq + cr$, et regardons a, b, c comme trois fonctions inconnues de x qu'il s'agira de déterminer; en prenant les fonctions primes, secondes et tierces de y, on aura d'abord

$$y' = ap' + bq' + cr' + pa' + qb' + rc'.$$

Je suppose $pa' + qb' + rc' = 0$, j'aurai simplement

$$y' = ap' + bq' + cr'.$$

De là en prenant de nouveau les fonctions primes, j'aurai

$$y'' = ap'' + bq'' + cr'' + a'p' + b'q' + c'r'.$$

Je suppose derechef $a'p' + b'q' + c'r' = 0$, j'aurai simplement

$$y'' = ap'' + bq'' + cr'';$$

d'où je tire, en prenant encore les fonctions primes,

$$y''' = ap''' + bq''' + cr''' + a'p'' + b'q'' + c'r''.$$

Je substitue maintenant les valeurs de y, y', y'' et y''' dans l'équation proposée, il est visible que par la nature des quantités p, q, r, les termes qui contiendront a, b, c se détruiront, et il ne restera que l'équation

$$a'p'' + b'q'' + c'r'' = \mathrm{X},$$

qui étant combinée avec les deux équations supposées

$$a'p + b'q + c'r = 0,$$
$$a'p' + b'q' + c'r' = 0,$$

servira à déterminer les trois quantités a', b', c', les quantités p, q, r et leurs fonctions primes et secondes étant connues, ainsi que la quantité X.

Supposons donc qu'on ait trouvé $a' = \mathrm{P}$, $b' = \mathrm{Q}$, $c' = \mathrm{R}$, ces quantités P, Q, R étant des fonctions connues de x, il n'y aura qu'à les regarder comme des fonctions primes et en chercher les fonctions primitives, qui contiendront chacune une constante arbitraire qui pourra lui être ajoutée. On aura ainsi les valeurs des inconnues a, b, c, qu'on substituera ensuite dans l'expression de y.

55. Lorsque l'équation n'est que du premier ordre, on n'a besoin que d'une valeur p, et on peut toujours la trouver; car on a alors l'équation $\mathrm{A}p + p' = 0$, à laquelle satisfait cette valeur $p = e^{-\mathrm{M}}$, M étant la fonction primitive de A, de manière que $\mathrm{M}' = \mathrm{A}$, et e dénotant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; en effet, on aura, en prenant les fonctions primes,

$$p' = -\mathrm{M}'e^{-\mathrm{M}} = -\mathrm{A}p.$$

Pour les équations d'un ordre supérieur au premier, il n'y a pas de méthode générale pour trouver les valeurs de p, q, etc., à moins que les coefficiens A, B, C, etc. ne soient constans. Mais, dans ce cas, il est aisé de les trouver; car il n'y a qu'à supposer $p = e^{mx}$, m étant une constante indéterminée, on aura

$$p' = me^{mx}, \quad p'' = m^2e^{mx}, \quad \text{etc.};$$

donc l'équation

$$Ap + Bp' + Cp'' + Dp''' + \text{etc.} = 0$$

deviendra

$$A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + \text{etc.} = 0,$$

laquelle sera, généralement parlant, d'un degré égal à l'ordre de l'équation proposée. Elle aura donc autant de racines qu'il y a d'unités dans ce degré; et si on désigne ces racines par m, n, etc., on aura

$$p = e^{mx}, \quad q = e^{nx}, \quad \text{etc.};$$

de sorte que dans ce cas, la difficulté est réduite à la résolution des équations.

56. On peut souvent rendre linéaires des équations qui ne le sont pas, par le moyen des substitutions; et comme cette transformation est toujours avantageuse, voici deux cas très-étendus où elle réussit :

Le premier est celui de l'équation

$$y = xfy' + Fy',$$

qui est plus générale que celle que nous avons traitée ci-dessus (art. 54). J'en prends d'abord les fonctions primes, j'ai

$$y' = xy''f'y' + fy' + y''F'y';$$

je fais $y' = z$, et par conséquent $y'' = z'$, j'ai

$$z = xz'f'z + fz + z'F'z,$$

équation du premier ordre en x et z, où z est censé fonction de x.

Maintenant je regarde x comme une fonction de z; il faudra mettre $\frac{1}{x'}$ à la place de z' (art. 50), et il viendra l'équation

$$xf'z + (fz - z)\,x' + F'z = 0,$$

qui est, comme l'on voit, du premier ordre, et linéaire en x. On pourra donc, par la méthode précédente, en trouver l'équation

primitive en x et z; mais la proposée, par la substitution de z au lieu de y', devient

$$y = xfz + Fz;$$

éliminant donc z de ces deux équations, on aura une équation en x et y, qui sera l'équation primitive de l'équation proposée.

Le second cas est celui de l'équation

$$y' + My^2 + N = 0,$$

M et N étant des fonctions de x. Ici je fais $y = \frac{z'}{Mz}$, ce qui donne

$$y' = \frac{z''}{Mz} - \frac{z'^2}{Mz^2} - \frac{z'M'}{M^2z};$$

substituant ces valeurs et multipliant par Mz, l'équation devient

$$z'' - \frac{M'z'}{M} + MNz = 0,$$

qui est, comme l'on voit, du second ordre, mais linéaire par rapport à z.

Supposons qu'on ait trouvé d'une manière quelconque deux valeurs particulières de y en x, c'est-à-dire sans constante arbitraire, que nous dénoterons par p et q. Pour la valeur p, on aura $\frac{z'}{Mz} = p$, d'où l'on tire $z = e^P$, en dénotant par P la fonction primitive de pM; on aura de même pour la valeur q, $z = e^Q$, Q étant la fonction primitive de qM. Ayant ainsi deux valeurs particulières de z, on aura la valeur complète (art. 53),

$$z = ae^P + be^Q,$$

a et b étant deux constantes arbitraires; donc, puisque $y = \frac{z'}{Mz}$ et que $P' = pM$, $Q' = qM$, on aura cette valeur complète de y,

$$y = \frac{ape^P + bqe^Q}{ae^P + be^Q},$$

c'est-à-dire,

c'est-à-dire, en faisant $\frac{b}{a} = c$,

$$y = \frac{p + cqe^{Q-P}}{1 + ce^{Q-P}},$$

où c est la constante arbitraire.

Par exemple, si $N = -mM$, m étant une constante, il est aisé de voir que l'on satisfera à la proposée en y, en faisant $y = \sqrt{m}$; et à cause de l'ambiguité du radical, on aura

$$p = \sqrt{m}, \quad q = -\sqrt{m};$$

donc, nommant L la fonction primitive de M, on aura

$$P = L\sqrt{m}, \quad Q = -L\sqrt{m},$$

et la valeur complète de y sera

$$= \frac{(1 - ce^{-2L\sqrt{m}})\sqrt{m}}{1 + ce^{-2L\sqrt{m}}}.$$

Au reste, dans ce cas, l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$\frac{y'}{y^2 - m} + M = 0,$$

où les variables x et y sont séparées, et dont on peut trouver l'équation primitive, comme nous l'avons montré plus haut.

57. Lorsque l'équation proposée n'est pas linéaire en y, y', y'', etc., ou qu'elle n'est pas comprise sous la forme précédente, je ne connais aucune méthode générale pour compléter les valeurs particulières de y qu'on aurait trouvées; mais on y peut toujours parvenir par le moyen des séries.

Supposons en effet que, pour une équation du premier ordre en x, y et y', la valeur complète de y soit $f(x, a)$, a étant la constante arbitraire. En donnant à a une valeur particulière h, la quantité $f(x, a)$ deviendra une valeur particulière de y, que nous nommerons p, et que nous supposerons connue d'une manière quelconque. Faisons maintenant $a = h + i$, et développons la

fonction $f(x, h+i)$ en série ascendante suivant les puissances de i, le premier terme sera $f(x, h)=p$, et les autres termes seront de la forme $qi+ri^2+$ etc., q, r, etc. étant des fonctions de x. Si on substitue cette expression de y dans l'équation donnée du premier ordre, il faudra qu'elle se vérifie, indépendamment de la constante i qui doit demeurer arbitraire.

Soit donc $y'=F(x, y)$ l'équation du premier ordre, à laquelle satisfait la valeur particulière $y=p$, on aura, d'après cette condition,

$$p'=F(x, p).$$

Substituons pour y la série $p+iq+i^2r+$ etc., et développons aussi la fonction $F(x, y)$ en série suivant les puissances de i; si on dénote simplement par $F'(y)$, $F''(y)$, etc. les fonctions primes, secondes, etc. de $F(x, y)$ prises relativement à y seul, et qu'on fasse, pour abréger, $o=iq+i^2r+$ etc., on aura, par la théorie exposée plus haut sur le développement des fonctions,

$$F(x, y)=F(x, p)+oF'(p)+\frac{o^2}{2}F''(p)+\text{etc.}$$

D'un autre côté on aura, en prenant les fonctions primes,

$$y'=p'+q'i+r'i^2+\text{etc.};$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation $y'=F(x, y)$, et ordonnant les termes suivant les puissances de i, on aura, à cause de $p'=F(x, p)$,

$$iq'+i^2r'+\text{etc.}=iqF'(p)+i^2\left[rF'(p)+\frac{q^2}{2}F''(p)+\text{etc.}\right];$$

d'où l'on tire, par la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de i, les équations suivantes,

$$q'=qF'(p), \quad r'=rF'(p)+\frac{q^2}{2}F''(p), \quad \text{etc.}$$

qui serviront à déterminer successivement toutes les inconnues q, r, etc.

Comme les quantités $F'(p)$, $F''(p)$, etc. sont des fonctions don-

nées de x, il est visible qu'on n'aura pour ces inconnues, que des équations linéaires du premier ordre, susceptibles de la méthode de l'art. 55; il ne sera pas même nécessaire d'avoir les valeurs complètes de q, r, etc., il suffira d'avoir des valeurs quelconques qui satisfassent à ces équations de condition.

Ayant ainsi déterminé les valeurs des quantités q, r, s, etc., on aura cette valeur complète de y,

$$y = p + iq + i^2r + \text{etc.},$$

dans laquelle i sera la constante arbitraire qui manquait à la valeur particulière $y = p$. Cette valeur sera à la vérité exprimée par une série, mais la convergence de cette série ne dépendra que de la valeur de la constante i.

Cette méthode est aussi applicable, avec l'extension convenable, aux équations des ordres supérieurs au premier; mais les équations qu'on trouvera pour la détermination des fonctions inconnues, seront du même ordre, et par conséquent on ne pourra trouver en général les valeurs de ces fonctions que dans le cas où les coefficiens seront constans.

Au reste, cette méthode est le fondement des solutions des principaux problèmes de la théorie des planètes. Comme les excentricités et les inclinaisons qu'on doit regarder comme des constantes arbitraires, sont fort petites, et que l'effet des attractions est aussi très-petit, le cercle fournit d'abord des valeurs particulières, et on complète ensuite ces valeurs par des séries qui procèdent suivant les puissances de ces constantes très-petites.

CHAPITRE IX.

Des valeurs singulières qui ne sont pas comprises dans les équations primitives complètes. Des équations primitives singulières.

58. La méthode que nous venons d'exposer pour trouver l'équation primitive par le moyen des séries, est fondée sur la supposition que toute fonction $F(x, y)$ de deux variables x, y, puisse toujours, par la substitution de $p + qi + ri^{\alpha} +$ etc. à la place de y, se développer en une série ascendante, suivant les puissances entières de i; mais comme cette série résulte du développement d'une fonction de $y + o$, en faisant $o = qi + ri^{\alpha} +$ etc., et donnant à y une valeur particulière p, il s'ensuit de la théorie que nous avons donnée dans le chapitre V, que ce développement pourrait contenir des puissances fractionnaires ou négatives de o, auquel cas la série dont il s'agit contiendrait nécessairement de pareilles puissances de i. Alors la série qui doit représenter la valeur de y, pourra ne plus avoir la même forme; mais comme $y = f(x, a)$, et qu'on suppose $a = h + i$ et $p = f(x, h)$, le premier terme sera toujours p, et le second pourra encore être supposé de la forme qi; car s'il était de la forme qi^{n}, n étant un exposant quelconque, il n'y aurait qu'à substituer $i^{\frac{1}{n}}$ à la place de i, et supposer que a devienne $h + i^{\frac{1}{n}}$, ce qui est indifférent, puisqu'on regarde i comme une constante arbitraire; mais les termes suivans pourront être de la forme $ri^{m} + si^{n} +$ etc., où m devra être > 1, $n > m$, etc. par l'hypothèse.

Substituant donc, dans $F(x, y)$, pour y, la série

$$p + qi + ri^{m} + si^{n} + \text{etc.},$$

et développant suivant les puissances ascendantes de i, on aura une série de cette forme

$$F(x,p) + Pi^{\mu} + Qi^{\nu} + \text{etc.}$$

μ étant différent de l'unité, $\nu > \mu$, etc., et P, Q étant des fonctions données de x. Donc l'équation $y' = F(x,y)$ deviendra, par ces substitutions,

$$iq' + i^m r' + i^n s' + \text{etc.} = Pi^{\mu} + Qi^{\nu} + \text{etc.},$$

laquelle devra se vérifier indépendamment de la valeur de i.

Donc si $\mu > 1$, on pourra faire $q' = 0$, $m = \mu$ et $r' = P$, ensuite $n = \nu$, $s' = Q$, etc. Ainsi on aura d'abord $q =$ à une constante, ou plus simplement $q = 1$; ensuite, comme P ne dépend que de q et de x, on trouvera la valeur de r en prenant la fonction primitive de P; et ainsi de suite.

59. Mais si $\mu < 1$, alors il sera impossible de satisfaire à l'équation, de manière que i demeure une constante arbitraire; et l'on devra en conclure que la valeur particulière p ne pouvant pas être complétée ainsi, ne saurait être contenue dans l'expression générale $f(x, a)$ qui représente la valeur complète de y.

Maintenant il est visible que quel que puisse être le premier terme Pi^{μ} du développement de $F(x,y)$ par la substitution de $p + qi + ri^m + \text{etc.}$ à la place de y, il ne peut venir que des termes $p + qi$, de sorte qu'il sera le même que si on substituait simplement $p + qi$ à la place de y. Donc le développement de $F(x, y)$ par la substitution de $p + o$ à la place de y, sera $F(x,p) + \frac{Po^{\mu}}{q^{\mu}} + \text{etc.}$; donc, puisque la série résultante de ce développement contient un terme affecté de o^{μ}, où μ est > 0 et < 1, il s'ensuit de la théorie donnée dans l'article 29, que la fonction prime $F'(y)$ devra devenir infinie, lorsque $y = p$.

De là on tire cette conclusion, que la valeur particulière p ne pourra pas être contenue dans l'expression complète de y, si

cette valeur rend la fonction $F'(y)$ infinie, c'est-à-dire, la fonction $\frac{1}{F'(y)}$ nulle.

Réciproquement donc, l'équation $\frac{1}{F'(y)} = 0$ donnera toutes les valeurs de y, qui, pouvant satisfaire à l'équation $y' = F(x, y)$ comme valeurs particulières, ne seront pas renfermées dans la valeur complète. On pourra appeler ces valeurs, *valeurs singulières*, pour les distinguer des autres ; et en général, on pourra appeler *équation primitive singulière*, toute équation en x et y qui satisfera à une équation du premier ordre entre x, y et y', ou à une équation d'un ordre supérieur, et qui ne sera pas comprise dans l'équation primitive complète, c'est-à-dire, qui ne sera pas un cas particulier de cette équation.

60. Nous venons de voir qu'il y a une espèce d'équations qui peuvent satisfaire à des équations d'un ordre supérieur, et qui ne satisfont pas aux équations d'où celles-ci peuvent être dérivées, parce qu'elles ne sont pas renfermées dans les équations complètes d'un ordre inférieur à celles-ci. Ces équations ne forment pas une exception à la théorie générale exposée plus haut (art. 46); mais elles résultent d'une considération particulière dans la manière dont les équations d'un ordre supérieur sont dérivées par l'élimination des constantes. En effet, on y a vu que les deux équations $F(x, y) = 0$ et $F(x, y)' = 0$ donnent, par l'élimination d'une constante a, une équation dérivée du premier ordre entre x, y et y', dont $F(x, y) = 0$ sera l'équation primitive.

Or, il est évident que le résultat de cette élimination serait le même, si la quantité a, au lieu d'être constante, était une fonction quelconque de x; mais dans ce cas, la fonction prime de $F(x, y)$ ne serait plus simplement $F(x, y)'$, elle contiendrait de plus une partie provenant de la variation de a; et si on désigne par $F'(a)$ la fonction prime de $F(x, y)$, prise relativement à la variable a, on aura $a'F'(a)$ pour la partie dont il s'agit, a' étant la fonction prime de a regardé comme fonction de x.

Ainsi, dans le cas où a serait fonction de x, l'équation prime de

$F(x, y) = 0$ serait $F(x, y)' + a'F'(a) = 0$; donc, pour qu'elle se réduise à $F(x, y)' = 0$, comme dans le cas de a constante, il faudra que l'on ait $F'(a) = 0$, équation qui servira à déterminer la valeur de a, et qui n'est autre chose, comme l'on voit, que l'équation prime de l'équation primitive, prise relativement à a. D'où il s'ensuit que si on substitue cette valeur de a dans l'équation primitive $F(x, y) = 0$, on aura une équation en x et y, qui satisfera également à l'équation du premier ordre, et qui ne sera pas renfermée dans l'équation primitive où a est la constante arbitraire.

On pourra appliquer la même théorie aux équations des ordres supérieurs, et en déduire des conclusions semblables.

61. Pour voir maintenant si l'équation qui résulte de cette considération est la même que l'équation primitive singulière, déduite de l'analyse précédente ; supposons, comme plus haut (art. 58), que l'équation du premier ordre soit réduite à la forme $y' = F(x, y)$, et que son équation primitive complète soit $y = f(x, a)$, a étant la constante arbitraire. Pour en déduire l'équation primitive où a est variable, on prendra l'équation prime relativement à a seul ; et si on désigne par $\varphi(x, a)$ la fonction prime de $f(x, a)$, prise relativement à a, on aura $\varphi(x, a) = 0$; d'où l'on tirera a, qu'on substituera dans $f(x, a)$, et l'on aura une valeur particulière de y, qui satisfera aussi à la proposée du premier ordre. Nous appellerons p cette valeur particulière, comme dans l'article cité.

Maintenant, puisque la valeur complète $f(x, a)$ de y doit satisfaire à l'équation $y' = F(x, y)$, quelle que soit la constante a, il s'ensuit qu'en faisant la substitution, l'équation résultante $f'(x, a) = F[x, f(x, a)]$ devra avoir lieu, quelle que soit la valeur de a. Par conséquent son équation prime, prise relativement à a, regardée comme seule variable, devra avoir lieu aussi, quelle que soit la valeur de a (art. 17).

Puisque $f'(x, a)$ est la fonction prime de $f(x, a)$, prise relativement à x, la fonction prime de celle-ci, prise relativement

à a, sera donc la fonction seconde de $f(x, a)$, prise d'abord relativement à x, et ensuite relativement à a, laquelle est la même chose, comme nous le démontrerons plus bas, que la fonction seconde de $f(x, a)$, prise d'abord relativement à a, et ensuite relativement à x. Ainsi, ayant désigné par $\varphi(x, a)$ la fonction prime de $f(x, a)$ par rapport à a, on aura $\varphi'(x, a)$ pour la fonction prime de $f'(x, a)$, prise également par rapport à a, les traits appliqués aux caractéristiques f et φ ne se rapportant qu'à la variable x.

A l'égard de la fonction $F[x, f(x, a)]$, comme elle résulte de la substitution de $f(x, a)$ à la place de y dans $F(x, y)$, sa fonction prime relativement à a, sera exprimée par $F'(y) \times \varphi(x, a)$, (art. 16), puisque nous avons désigné par $F'(y)$ la fonction prime de $F(x, y)$ relativement à y; et par $\varphi(x, a)$ la fonction prime de $f(x, a)$ ou y, relativement à a.

Donc l'équation prime de l'équation $f'(x, a) = F(x, y)$, prise relativement à a, sera

$$\varphi'(x, a) = F'(y) \times \varphi(x, a);$$

d'où l'on tire

$$F'(y) = \frac{\varphi'(x, a)}{\varphi(x, a)}.$$

Or, nous venons de trouver que pour avoir la valeur particulière p, il faut substituer dans $f(x, a)$ la valeur de a, tirée de l'équation $\varphi(x, a) = 0$. Dénotons par X cette valeur de a, qui sera une fonction de x, la fonction $\varphi(x, a)$ aura cette forme

$$\varphi(x, a) = V(X - a)^m,$$

m étant > 0, et V étant une fonction de x, qui ne deviendra ni nulle ni infinie lorsque $a = X$; on tirera de là

$$\varphi'(x, a) = V'(X - a)^m + mVX'(X - a)^{m-1}.$$

Donc on aura

$$F'(y) = \frac{V'}{V} + \frac{mX'}{X - a}.$$

Mais y devient p lorsque $a = X$; donc $F'(y)$ deviendra infini lorsque

lorsque $y = p$, comme dans le cas de l'article 59. Ainsi les deux méthodes des articles 58 et 60 conduisent aux mêmes résultats et donnent les mêmes valeurs singulières ; mais la seconde a l'avantage d'être plus directe et de donner la vraie métaphysique de cette espèce de paradoxe.

62. Supposons, pour donner un exemple, que l'équation primitive soit

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

en prenant les fonctions primes, on aura l'équation prime

$$x - ay' = 0 ;$$

éliminant a par le moyen de l'équation primitive, on aura l'équation du premier ordre

$$x - [-y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}]\, y' = 0,$$

dont celle-là sera l'équation primitive complète, a étant la constante arbitraire.

Maintenant, si on prend la fonction prime de la même équation $x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$, relativement à la quantité a regardée comme une fonction de x, on aura

$$-2(y + a)\, a' = 0,$$

ce qui donne

$$y + a = 0, \quad a = -y ;$$

et substituant cette valeur dans la même équation primitive, on aura

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0.$$

Cette équation satisfera par conséquent aussi à la même équation du premier ordre, ce qui est aisé à vérifier ; car elle donne

$$y^2 = b^2 - x^2 \quad \text{et} \quad yy' = -x,$$

valeurs qui étant substituées dans la quantité

$$x + yy' - y'\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)},$$

la rendent identiquement nulle. Ce sera donc l'équation primitive singulière.

En effet, suivant la théorie de l'art. 61, on aura dans le cas présent;

$$F(x,y)=\frac{x}{-y+\sqrt{(x^2+y^2+b^2)}} \quad \text{et} \quad p=\sqrt{(b^2-x^2)};$$

donc en prenant les fonctions primes relativement à y seul, on trouvera

$$F'(y)=\frac{x}{[-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}},$$

quantité qui devient infinie, comme l'on voit, par la supposition de $y=p=\sqrt{(b^2-x^2)}$.

63. Supposons maintenant que l'on ait l'équation du premier ordre $y'=Fy$, et que la fonction Fy de y soit telle qu'elle devienne nulle lorsque y est égal à une constante donnée b; il est visible que cette valeur de y satisfera à l'équation; car $y=b$ donne aussi $y'=0$. On demande si cette valeur de y est une valeur particulière comprise dans la valeur complète, ou bien si ce n'est qu'une valeur singulière. On prendra la fonction prime de Fy, et si $F'y$ devient infini lorsque $y=b$, la valeur b ne sera qu'une valeur singulière, sinon elle sera une valeur particulière.

Soit $Fy=K(y-b)^m$, m étant >0 et K une constante, on aura

$$F'y=mK(y-b)^{m-1},$$

quantité qui devient infinie lorsque $m<1$; donc la valeur $y=b$ sera une valeur singulière, si $m>0$ et <1, et une simple valeur particulière, si $m=$ ou >1. En effet, l'équation $y'=K(y-b)^m$ étant divisée par $(y-b)^m$ et mise sous la forme

$$(y-b)^{-m}y'-K=0,$$

a pour équation primitive

$$\frac{(y-b)^{1-m}}{1-m}-Kx=a,$$

a étant la constante arbitraire ; d'où l'on tire

$$y = b + [(m-1)(a+\mathrm{K}x)]^{\frac{1}{1-m}}.$$

Donc pour que l'on ait $y = b$, il faudra que la quantité $(a+\mathrm{K}x)^{\frac{1}{1-m}}$ devienne nulle. Or, si $m > 0$ et < 1, l'exposant $\frac{1}{1-m}$ sera positif, par conséquent il sera impossible de donner à a une valeur qui fasse évanouir la quantité dont il s'agit. Mais si $m > 1$, alors l'exposant $\frac{1}{1-m}$ devenant négatif, la quantité $(a+\mathrm{K}x)^{\frac{1}{1-m}}$ deviendra nulle lorsque a sera infinie ; car faisant $a = \frac{1}{c}$, cette quantité deviendra

$$\frac{\frac{1}{c^{m-1}}}{(1+\mathrm{K}cx)^{\frac{1}{m-1}}},$$

laquelle devient zéro lorsque $c = 0$.

La même chose a lieu lorsque $m = 1$, alors l'équation primitive contient des logarithmes ou des exponentielles, car on a

$$y' = \mathrm{K}(y-b),$$

et divisant par $y-b$,

$$\frac{y'}{y-b} - \mathrm{K} = 0,$$

dont l'équation primitive est

$$\mathrm{l}(y-b) - \mathrm{K}x = \mathrm{l}a, \quad \text{d'où l'on tire} \quad y = b + ae^{\mathrm{K}x},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et a la constante arbitraire. Ici il est évident qu'en faisant a égal à zéro, on aura $y = b$.

Supposons encore $\mathrm{F}y = \sqrt{\mathrm{Y}}$, Y étant une fonction de y qui devienne nulle lorsque $y = b$, on aura

$$\mathrm{F}'y = \frac{\mathrm{Y}'}{2\sqrt{\mathrm{Y}}};$$

donc, puisque Y devient nul lorsque $y=b$, si Y′ ne devient pas nul en même temps, F′y deviendra alors infini, et la valeur $y=b$ ne sera qu'une valeur singulière. Donc, pour que cette valeur soit une simple valeur particulière, il faudra que Y′ devienne nul en même temps que Y, en faisant $Y=b$.

Cette théorie des équations primitives singulières, est présentée d'une manière plus générale et avec de nouveaux détails, dans les leçons XIV, XV, XVI et XVII sur le *Calcul des Fonctions*, auxquelles nous renvoyons les lecteurs qui desireraient approfondir davantage ce point d'analyse.

CHAPITRE X.

De l'emploi des fonctions dérivées dans l'analyse, et de la détermination des constantes arbitraires. Application à la sommation des suites et à la résolution des équations du troisième degré.

64. PAR les principes que nous venons d'établir à l'égard des constantes arbitraires, on voit que ces constantes forment la liaison entre les équations primitives et les équations dérivées : celles-ci sont par elles-mêmes plus générales que les équations d'où elles dérivent, à raison des constantes qui ont disparu ou qui peuvent avoir disparu ; elles équivalent proprement à toutes les équations primitives qui ne différeraient entre elles que par les valeurs de ces constantes.

On peut donc toujours passer d'une équation regardée comme primitive, à une de ses dérivées d'un ordre quelconque, et réciproquement revenir de celle-ci à celle-là, pourvu que cette dernière opération introduise toujours des constantes arbitraires, et qu'on ait soin de déterminer ces constantes d'une manière conforme à l'équation primitive, comme nous en avons déjà donné des exemples (art. 49 et suiv.). Avec cette attention, on pourra employer dans l'analyse les opérations relatives aux fonctions, comme on y emploie les opérations ordinaires d'algèbre.

Ainsi, ayant une équation en x et y, on pourra immédiatement en déduire des équations dérivées d'un ordre quelconque ; mais pour revenir de celles-ci à une équation en x et y, il faudra tenir compte des constantes arbitraires, et les déterminer de manière que les valeurs de y et de ses dérivées y', y'', etc. soient les

mêmes pour une valeur donnée de x, comme $x = 0$, que celles qui résultent de l'équation donnée.

Si l'équation proposée n'était que du premier ordre en x, y, y', alors cette équation ne pouvant fournir que les valeurs de y', y'', etc. en x et y, ces valeurs, pour $x = 0$, contiendraient la valeur indéterminée de y; par conséquent les constantes arbitraires dépendraient alors de cette valeur, qui serait elle-même une constante arbitraire; de sorte que dans ce cas, toutes les constantes arbitraires se réduiraient à une seule. Elles se réduiraient à deux, par la même raison, si l'équation proposée était du second ordre en x, y, y' et y''; et ainsi de suite.

65. Pour faire mieux sentir l'esprit et l'usage de ces opérations, nous allons les appliquer encore à quelques exemples qui serviront en même temps d'exercice de calcul.

Soit proposée la série

$$1 + \frac{m}{n}x + \frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)}x^3 + \text{etc.},$$

dont on demande la somme.

Supposons-la égale à y, ensorte qu'on ait une équation en x et y; je multiplie cette équation par x^{n-1}, ce qui donne

$$yx^{n-1} = x^{n-1} + \frac{m}{n}x^n + \frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^{n+1} + \text{etc.}$$

Je prends les fonctions primes de tous les termes, j'ai

$$y'x^{n-1} + (n-1)yx^{n-2} = (n-1)x^{n-2} + mx^{n-1} + \frac{m(m+1)}{n}x^n + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)}x^{n+1} + \text{etc.},$$

où l'on voit qu'il a disparu un facteur du dénominateur de chaque terme.

Je multiplie maintenant l'équation précédente par x^{m-n}, j'ai

celle-ci,

$$y'x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2}=(n-1)x^{m-2}+mx^{m-1}+\frac{m(m+1)}{n}x^m$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)}x^{m+1}+\text{etc.}$$

Je fais le premier membre $=p'$, p' étant la fonction prime de p, et je prends l'équation primitive, j'ai

$$p=\frac{n-1}{m-1}x^{m-1}+x^m+\frac{m}{n}x^{m+1}+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}x^{m+2}+\text{etc.}$$

Je n'ajoute point de constante arbitraire ici, parce qu'elle peut être censée renfermée dans p.

Maintenant, en comparant cette nouvelle série avec la proposée qu'on a supposée égale à y, il est visible qu'on aura l'équation

$$p=\frac{n-1}{m-1}x^{m-1}+x^m y;$$

prenant les fonctions primes, et substituant pour p' sa valeur $y'x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2}$, on aura cette équation du premier ordre linéaire en y,

$$(n-1)x^{m-2}+y'x^m+mx^{m-1}y=y'x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2},$$

laquelle se réduit à cette forme,

$$y'+\frac{n-1-mx}{x(1-x)}y=\frac{n-1}{x(1-x)}.$$

Cette équation étant susceptible de la méthode de l'art. 55, on pourra donc trouver la valeur y en x, qui sera par conséquent la somme de la série proposée. Mais cette valeur devra contenir une constante arbitraire, qu'on déterminera de manière que y soit $=1$ lorsque $x=0$, comme il résulte de la série donnée.

Si la série n'avait contenu que des facteurs simples, comme

$$1+\frac{m}{n}x+\frac{m+1}{n+1}x^2+\frac{m+2}{n+2}x^3+\text{etc.},$$

on eût trouvé, par les mêmes opérations,

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \text{etc.}$$

Or, on sait que

$$1 + x + x^2 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x};$$

donc on aurait, dans ce cas,

$$p = \frac{n-1}{m-1} x^{m-1} + \frac{x^m}{1-x};$$

prenant les fonctions primes, et substituant la valeur de p', on aurait

$$y' x^{m-1} + (n-1) y x^{m-2} = (n-1) x^{m-2} + \frac{m x^{m-1}}{1-x} + \frac{x^m}{(1-x)^2},$$

savoir,

$$y' + \frac{(n-1) y}{x} = \frac{n-1}{x} + \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2},$$

équation également linéaire du premier ordre.

Cette méthode s'applique à des séries plus compliquées, et peut conduire à des équations linéaires d'un ordre supérieur au premier. J'ai cru devoir au moins l'indiquer, étant presque la seule méthode générale pour la sommation des suites.

66. Soit maintenant proposée l'équation

$$y = Ax + Bx^2 + x^3,$$

dans laquelle on demande l'expression de x et y. Cette expression peut s'obtenir par la formule connue pour la résolution des équations du troisième degré. Voici comment on y peut parvenir par la théorie des fonctions.

En prenant les fonctions primes et secondes, on aura

$$y' = A + 2Bx + 3x^2, \quad y'' = 2B + 6x;$$

si

si donc je forme la quantité

$$y+(m+nx)y'+(p+qx+rx^2)y'',$$

où m, n, p, q, r sont des coefficiens arbitraires, j'aurai un quatrinome qui contiendra les puissances x, x^2 et x^3, et je pourrai faire évanouir les termes multipliés par chacune de ces puissances; j'aurai ainsi une équation du second ordre de la forme

$$y+(m+nx)y'+(p+qx+rx^2)y''=C,$$

où C sera une quantité constante; et cette équation renfermera encore deux coefficiens indéterminés.

Je pourrai donc encore faire ensorte qu'étant multipliée par $2y'$, elle ait une équation primitive; car pour cela, il suffira de faire $q=2m$, $r=n$, et l'équation primitive sera

$$y^2+(p+2mx+nx^2)y'^2=2Cy+a,$$

a étant une constante arbitraire qu'on déterminera, comme nous l'avons dit, en supposant $x=0$, et mettant pour y et y', leurs valeurs tirées de l'équation proposée. Or elle donne dans ce cas, $y=0$, $y'=A$; donc, faisant ces substitutions dans l'équation précédente, elle donnera $pA^2=a$.

Ainsi on aura cette équation en y, du premier ordre,

$$y^2+(p+2mx+nx^2)y'^2=2Cy+pA^2,$$

où x ne monte qu'au second degré; circonstance sans laquelle on n'aurait rien gagné pour la détermination de x en y.

Mais avant d'aller plus loin, il faut satisfaire aux conditions nécessaires pour que la quantité $y+(m+nx)y'+(p+2mx+nx^2)y''$, après la substitution des valeurs de y, y', y'', devienne égale à une constante C. Cette substitution donne la quantité

$$\begin{aligned}&Ax+Bx^2+x^3+(m+nx)(A+2Bx+3x^2)\\&\quad+(p+2mx+nx^2)(2B+6x);\end{aligned}$$

développant, ordonnant les termes suivant les puissances de x,

et égalant à C le terme sans x, et les autres à zéro, on aura

$$mA + 2pB = C, \quad (1+n)A + 6mB + 6p = 0,$$
$$(1+4n)B + 15m = 0, \quad 1 + 9n = 0,$$

d'où l'on tire

$$n = -\frac{1}{9}, \quad m = -\frac{B}{27}, \quad p = \frac{B^2 - 4A}{27} \quad \text{et} \quad C = \frac{2B^3 - 9AB}{27}.$$

Retenons, pour plus de simplicité, les quantités p et C, et substituons celles de m et n dans l'équation ci-dessus, elle deviendra, en tirant la valeur de y',

$$y' = \frac{3\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}}{\sqrt{\left(9p - \frac{2B}{3}x - x^2\right)}}.$$

Il faut maintenant en déduire l'équation primitive en x et y; mais pour éviter les imaginaires, on doit distinguer deux cas, l'un où les radicaux sont réels, l'autre où ils sont imaginaires; car puisque toute valeur réelle de x donne pour y et y' des valeurs réelles, il est visible que les deux radicaux de l'équation précédente seront réels ou imaginaires ensemble.

Supposons donc en premier lieu que $\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}$ soit une quantité réelle, il faudra donc que $pA^2 + C^2 > (y - C)^2$; par conséquent on pourra supposer

$$y - C = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \sin z,$$

ce qui donnera

$$\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)} = \sqrt{(pA^2 + C^2)} \cos z,$$

et prenant les fonctions primes,

$$y' = \sqrt{(pA^2 + C^2)}\, z' \cos z$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra, en divisant par 3,

$$\left(9p - \frac{2B}{3}x - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z'}{3},$$

dont l'équation primitive peut être mise sous la forme

$$x+\frac{B}{3}=\sqrt{\left(9p+\frac{B^2}{9}\right)}\sin\left(\frac{z}{3}+a\right),$$

a étant une constante arbitraire qu'il faudra déterminer, ensorte que $x=0$ donne $y=0$, conformément à la proposée. Soit a la valeur de z lorsque $y=0$, on aura donc les deux équations

$$-C=\sqrt{(pA^2+C^2)}\sin a,$$

et

$$\frac{B}{3}=\sqrt{\left(9p+\frac{B^2}{9}\right)}\sin\left(\frac{a}{3}+a\right);$$

par lesquelles on déterminera d'abord a, ensuite a. Après quoi on déterminera z par l'équation

$$\sin z=\frac{y-C}{\sqrt{(pA^2+C^2)}};$$

et l'on aura

$$x=-\frac{B}{3}+\sqrt{\left(9p+\frac{B^2}{9}\right)}\sin\left(\frac{z}{3}+a\right).$$

Et comme au même sinus de z répond aussi l'angle z, augmenté d'une ou de deux circonférences, on aura les trois valeurs de x, en prenant pour z ces trois valeurs z, $z+c$, $z+2c$, c dénotant la circonférence du cercle.

C'est le cas qu'on appelle *irréductible*, et où les trois racines sont réelles.

Supposons en second lieu que le radical $\sqrt{(pA^2+2Cy-y^2)}$ soit imaginaire, il n'y aura qu'à multiplier le numérateur et le dénominateur de l'expression de y' par $\sqrt{-1}$, et l'on aura

$$y'=\frac{3\sqrt{(-pA^2-2Cy+y^2)}}{\sqrt{\left(-9p+\frac{2B}{3}x+x^2\right)}};$$

quantité toute réelle.

Ici j'observe que si on fait

$$X=\frac{B}{3}+x+\sqrt{\left(-9p+\frac{2B}{3}x+x^2\right)},$$

$$Y=-C+y+\sqrt{(-pA^2-2Cy+y^2)},$$

et qu'on prenne les fonctions primes, en regardant toujours y comme fonction de x, on aura

$$X' = X\left(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$Y' = y'Y\left(-pA^2 - 2Cy + y^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

de sorte qu'on pourra réduire l'équation précédente à cette forme

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{3Y};$$

dont les deux membres ont pour fonctions primitives lX et $\frac{1}{3}$ lY On aura donc cette équation primitive

$$lX = \tfrac{1}{3}lY + lb,$$

b étant une constante arbitraire; et passant des logarithmes aux nombres, on aura

$$X = b\sqrt[3]{Y}.$$

Pour déterminer b, on fera de nouveau $x = 0$ et $y = 0$. Or, X devient $\frac{B}{3} + \sqrt{-9p}$, et Y devient $-C + \sqrt{-pA^2}$; donc on aura

$$b = \frac{\frac{1}{3}B + \sqrt{-9p}}{\sqrt[3]{-C + \sqrt{-pA^2}}}.$$

Maintenant, ayant la valeur de X en x, il est aisé d'en tirer x; car en en quarrant l'équation

$$\sqrt{\left(-9p + \frac{2B}{3}x + x^2\right)} = X - \frac{B}{3} - x,$$

on en déduira sur-le-champ

$$x = \frac{\left(X - \frac{1}{3}B\right)^2 + 9p}{2X},$$

par conséquent, en mettant pour X la valeur trouvée en y, savoir $b\sqrt[3]{(Y)}$, on aura

$$x = \frac{\left(b\sqrt[3]{Y} - \frac{1}{3}B\right)^2 + 9p}{2b\sqrt[3]{Y}}.$$

Cette expression ne peut donner, comme l'on voit, qu'une seule valeur réelle de x; c'est le cas où l'équation a deux racines imaginaires.

Si on fait $B = o$, les formules qu'on vient de trouver dans les deux cas, se simplifient beaucoup, et se réduisent aux formules connues pour la résolution des équations du troisième degré, privées du second terme; mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce problème, qui appartient proprement à l'algèbre, et que nous n'avons traité ici qu'en passant, et pour montrer, par différentes applications, la manière d'employer l'algorithme des fonctions.

CHAPITRE XI,

Où l'on donne l'équation primitive d'une équation du premier ordre, dans laquelle les variables sont séparées, mais où l'on ne peut point obtenir directement les fonctions primitives de chacun des deux membres. Propriétés remarquables de ces fonctions primitives.

67. PRENONS pour dernier exemple l'équation du premier ordre

$$y' = \frac{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}},$$

en la divisant par le radical en y, on aurait une équation où les variables x et y seraient séparées; mais il serait impossible d'obtenir ainsi l'équation primitive, parce que les deux membres ne sont point réductibles en particulier à des fonctions primes.

Voici néanmoins comment on y peut parvenir par le moyen des fonctions dérivées.

Je suppose d'abord que x et y soient fonctions d'une autre variable t, il faudra pour cela substituer $\frac{y}{x'}$ à la place de y' (art. 50); x' et y' seront alors les fonctions primes de x et y, regardées comme fonctions de t. En supposant que x soit une fonction quelconque de t, l'équation donnera pour y une fonction déterminée de t; ainsi je puis supposer que x soit une telle fonction de t, que l'on ait l'équation

$$x' = \sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)},$$

l'équation précédente, où l'on a mis $\frac{y'}{x'}$ pour y', donnera pareil-

lement

$$y' = \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}.$$

Qu'on fasse disparaître les radicaux dans ces deux équations, qu'ensuite on prenne les fonctions primes, on aura, après avoir divisé l'une par x', l'autre par y',

$$2x'' = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3,$$
$$2y'' = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3.$$

Faisons $x + y = p$, $x - y = q$, ce qui donne

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2};$$

les deux équations précédentes ajoutées et retranchées, donneront

$$p'' = B + Cp + \frac{3D}{4}(p^2 + q^2) + \frac{E}{2}(p^3 + 3pq^2),$$
$$q'' = Cq + \frac{3D}{2}pq + \frac{E}{2}(3p^2q + q^3).$$

De plus, comme $p'q' = x'^2 - y'^2$, si on substitue les valeurs de x' et de y', tirées des premières équations, on aura

$$p'q' = Bq + Cpq + \frac{D}{4}(3p^2q + q^3) + \frac{E}{2}(p^3q + pq^3).$$

Maintenant je fais cette combinaison :

$$qp'' - p'q' = \frac{D}{2}q^3 + Epq^3,$$

multipliant les deux membres par $\frac{2p'}{q^3}$, ils deviennent les fonctions primes de $\frac{p'^2}{q^2}$ et de $Dp + Ep^2$; de sorte que j'aurai d'abord cette équation primitive du premier ordre

$$\frac{p'^2}{q^2} = Dp + Ep^2 + a,$$

où a est une constante arbitraire.

Pour la déterminer, soit m la valeur de y lorsque $x = 0$, on aura

dans ce cas, par les équations ci-dessus,

$$x' = \sqrt{A}, \quad y' = \sqrt{(A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4)},$$

je fais cette dernière quantité $= n$, pour abréger.

Ainsi, puisque $p = x + y$, $q = x - y$, $p' = x' + y'$, $q' = x' - y'$, on aura, lorsque $x = 0$,

$$p = m, \quad q = -m, \quad p' = \sqrt{A} + n, \quad q' = \sqrt{A} - n.$$

Faisant ces substitutions dans l'équation qu'on vient de trouver, on aura

$$a = \frac{(\sqrt{A} + n)^2}{m^2} - Dm - Em^2,$$

où l'on voit que puisque m est une quantité indéterminée, la constante a demeure aussi indéterminée; mais les déterminations précédentes seraient utiles, si par d'autres combinaisons on trouvait de nouvelles équations primitives avec des constantes arbitraires.

Nous avons donc l'équation

$$p' = q\sqrt{(a + Dp + Ep^2)},$$

qui, quoique du premier ordre, peut néanmoins donner tout de suite l'équation primitive en x et y de la proposée, puisque la valeur de p', qui est $x' + y'$, est déjà connue en x et y. En effet, substituant les valeurs de p, q et p', on aura

$$\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)} + \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)} = (x - y)\sqrt{[a + D(x + y) + E(x + y)^2]},$$

où a est la constante arbitraire.

Cette équation en x et y est, comme l'on voit, sous une forme assez simple, et la méthode par laquelle nous y sommes parvenus est fort remarquable; mais cette équation n'est pas la seule qu'on puisse obtenir par les formules que nous venons de trouver.

En effet, si on substitue la valeur précédente de p' dans l'équation

tion trouvée plus haut, qui donne la valeur de $p'q'$, on en tirera

$$q' = \frac{B + Cp + \frac{1}{3}D(3p^2+q^2) + \frac{1}{2}E(p^3+pq^2)}{\sqrt{(a+Dp+Ep^2)}}.$$

Ici remettant pour p et q leurs valeurs $x+y$ et $x-y$, et pour q' sa valeur $x'-y' = \sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Dx^4)} - \sqrt{(A+By+Cy^2+Dy+Ey^4)}$, on aura une nouvelle équation en x et y avec la constante arbitraire a, qui sera également l'équation primitive de la proposée, mais qui ne sera qu'une transformée de l'équation précédente.

68. L'équation du premier ordre dont nous venons de trouver l'équation primitive, peut toujours, par des transformations convenables, se réduire à la forme

$$z' = \frac{\sqrt{(A+B\cos z)}}{\sqrt{(A+B\cos u)}},$$

z étant ici une fonction de u. Comme cette équation, traitée directement de la même manière, est susceptible d'une analyse beaucoup plus simple et plus élégante, j'ai cru qu'on ne serait pas fâché de la trouver ici.

On regardera u et z comme fonction d'une autre variable t; et après avoir substitué en conséquence, $\frac{z'}{u'}$ à la place de z' (art. 50), on fera ces deux équations séparées,

$$u' = \sqrt{(A+B\cos u)}, \quad z' = \sqrt{(A+B\cos z)};$$

après les avoir carrées, on en prendra les fonctions primes, on aura, en divisant l'une par u' et l'autre par z', ces deux-ci du second ordre,

$$2u'' = -B\sin u, \quad 2z'' = -B\sin z.$$

Soit maintenant $z+u = 2p$, $z-u = 2q$, les deux équations précédentes, ajoutées et retranchées, deviendront par les théorèmes connus,

$$2p'' = -B\sin p\cos q, \quad 2q'' = -B\cos p\sin q.$$

Il est d'abord visible que si on ajoute ces deux équations après avoir multiplié la première par q', et la seconde par p', le premier membre deviendra la fonction prime de $2p'q'$, et le second la fonction prime de $-B \sin p \sin q$; de sorte qu'on aura d'abord cette équation primitive du premier ordre,

$$2p'q' = -B \sin p \sin q + a,$$

a étant la constante arbitraire.

Pour la déterminer, supposons que $u = o$ donne $z = m$, on aura donc dans ce cas,

$$u' = \sqrt{(A+B)}, \quad z' = \sqrt{(A+B\cos m)}, \quad p = q = \frac{m}{2},$$

$$p' = \frac{z'+u'}{2}, \quad q' = \frac{z'-u'}{2};$$

donc

$$2p'q' = \frac{z'^2 - u'^2}{2} = \frac{B(\cos m - 1)}{2};$$

$$\sin p \sin q = \left(\sin \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos m}{2};$$

de sorte que l'on aura

$$a = 2p'q' + B \sin p \sin q = o.$$

On aura donc simplement l'équation

$$2p'q' = -B \sin p \sin q;$$

d'où l'on peut conclure que cette équation primitive ne renfermant point de constante arbitraire, doit être comprise dans les équations du premier ordre en z et u, d'où nous sommes partis. En effet, ces équations donnent, en substituant les valeurs de p et q,

$$2p'q' = \frac{z'^2 - u'^2}{2} = \frac{B}{2}(\cos z - \cos u) = -B \sin p \sin q.$$

Divisons maintenant par cette équation du premier ordre, les

deux équations ci-dessus du second en p et q, on aura ces deux-ci,

$$\frac{p''}{p'q'} = \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \frac{q''}{p'q'} = \frac{\cos p}{\sin p},$$

dont la première étant multipliée par q', et la seconde par p', donneront ces équations primitives,

$$lp' = l \sin q + la, \quad lq' = l \sin p + lb,$$

ou bien, en passant des logarithmes aux nombres,

$$p' = a \sin q, \quad q' = b \sin p,$$

a et b étant des constantes arbitraires, qu'on déterminera par les mêmes suppositions que ci-dessus; d'où l'on aura

$$a = \frac{\sqrt{(A + B \cos m)} + \sqrt{(A + B)}}{2 \sin \frac{m}{2}};$$

$$b = \frac{\sqrt{(A + B \cos m)} - \sqrt{(A + B)}}{2 \sin \frac{m}{2}}.$$

Les deux équations qu'on vient de trouver, pourraient donner chacune une équation primitive en u et z par la substitution des valeurs de p, q, p', q'; on aurait ainsi,

$$\sqrt{(A + B \cos z)} + \sqrt{(A + B \cos u)} = 2a \sin \frac{z - u}{2};$$

$$\sqrt{(A + B \cos z)} - \sqrt{(A + B \cos u)} = 2b \sin \frac{z + u}{2}.$$

Comme les valeurs de a et b renferment l'indéterminée m, chacune de ces valeurs pourra être regardée aussi comme indéterminée en particulier; ainsi dans chacune de ces équations à part, on pourra regarder a ou b comme constante arbitraire; mais si on voulait faire une combinaison quelconque de ces équations, il faudrait employer les valeurs de a et b trouvées ci-dessus, et alors la quantité m serait la seule constante arbitraire.

Ces dernières équations étant compliquées de radicaux, il sera

à propos de chercher encore une autre équation primitive d'après les mêmes équations du premier ordre

$$p' = a \sin q, \quad q' = b \sin p;$$

or, en divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{p'}{q'} = \frac{a \sin q}{b \sin p};$$

et multipliant en croix,

$$bp' \sin p = aq' \sin q,$$

d'où l'on tire tout de suite l'équation primitive

$$b \cos p = a \cos q + c,$$

c étant une nouvelle constante arbitraire qu'il faudra déterminer comme ci-dessus. Or, en faisant $u = 0$ et $z = m$, on a

$$p = q = \frac{m}{2};$$

donc l'équation précédente donnera

$$c = (b - a) \cos \frac{m}{2} = - \frac{\sqrt{(A + B)} \cos \frac{m}{2}}{\sin \frac{m}{2}}.$$

Substituant les valeurs de a, b, c, ainsi que celles de $p = \frac{z+u}{2}$ et $q = \frac{z-u}{2}$ dans la même équation, et faisant les réductions des sinus et cosinus, elle prendra cette forme très-simple,

$$\cos \frac{z}{2} \times \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{z}{2} \times \sin \frac{u}{2} \times \frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A + B)}} = \cos \frac{m}{2};$$

c'est l'équation primitive de la proposée du premier ordre en u, z et z', et l'angle m en est la constante arbitraire.

69. On peut regarder les angles $\frac{z}{2}$, $\frac{u}{2}$ et $\frac{m}{2}$ comme les trois côtés d'un triangle sphérique; il est visible qu'alors, dans l'équation précédente, la quantité $\frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A + B)}}$ sera le cosinus de l'angle com-

pris entre les côtés $\frac{z}{2}$ et $\frac{u}{2}$, et par conséquent opposé au côté $\frac{m}{2}$, par les formules connues de la trigonométrie sphérique; c'est la valeur de z' lorsque $u = 0$ et $z = m$. Ainsi cet angle sera constant en même temps que le côté $\frac{m}{2}$, tandis que les deux autres varient.

Soit M cet angle constant, on aura donc

$$\frac{\sqrt{(A + B\cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos M,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos M^2 - \cos m}{\sin M^2} = 2\left(\frac{\sin\frac{m}{2}}{\sin M}\right)^2 - 1.$$

Si on fait cette substitution dans l'équation proposée en u, z et z', et qu'on suppose, pour abréger, $\frac{\sin M}{\sin\frac{m}{2}} = \mu$, elle se réduira à cette forme

$$z' = \frac{\sqrt{1 - \mu^2\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \mu^2\left(\sin\frac{u}{2}\right)^2}},$$

dont l'équation primitive sera la relation entre les côtés $\frac{z}{2}$, $\frac{u}{2}$ et $\frac{m}{2}$ d'un triangle sphérique, dans lequel μ sera le rapport des sinus des angles aux sinus des côtés opposés, rapport qu'on sait être le même pour tous les angles et les côtés opposés; de sorte que ce rapport seul étant donné, il restera l'angle ou le côté pour arbitraire.

La considération du triangle sphérique peut servir à faire voir plus facilement comment l'équation entre ses trois côtés satisfait à l'équation précédente du premier ordre. Cette équation étant

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2} + \cos M \sin\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2} = \cos\frac{m}{2},$$

si on prend les fonctions primes, en regardant z comme fonction

de u, et m, M comme constantes, on aura

$$\left(\cos M \cos\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2} - \sin\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2}\right)z'$$
$$+\cos M \sin\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2} - \cos\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2} = 0;$$

substituons à la place de cos M, sa valeur tirée de la même équation, il viendra celle-ci,

$$\frac{\cos\frac{z}{2}\cos\frac{m}{2} - \cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{z}{2}}z' + \frac{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{m}{2} - \cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = 0.$$

Maintenant, si dans le même triangle sphérique, dont $\frac{u}{2}$, $\frac{z}{2}$; $\frac{m}{2}$ sont les trois côtés, et M l'angle opposé au côté $\frac{m}{2}$, on désigne par V et Z les angles opposés aux côtés $\frac{u}{2}$ et $\frac{z}{2}$, on aura également

$$\cos\frac{u}{2} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{m}{2} + \cos V \sin\frac{z}{2}\sin\frac{m}{2},$$

et

$$\cos\frac{z}{2} = \cos\frac{u}{2}\cos\frac{m}{2} - \cos Z \sin\frac{u}{2}\sin\frac{m}{2};$$

je donne à cos Z le signe —, parce que je suppose l'angle Z obtus. Donc, faisant ces substitutions, et divisant toute l'équation par $\sin\frac{m}{2}$, elle deviendra

$$z'\cos V - \cos Z = 0, \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{\cos Z}{\cos V}.$$

Mais par la propriété générale des triangles sphériques, on a

$$\frac{\sin V}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin Z}{\sin\frac{z}{2}} = \frac{\sin M}{\sin\frac{m}{2}} = \mu;$$

donc

$$\sin V = \mu\sin\frac{u}{2}, \quad \sin Z = \mu\sin\frac{z}{2},$$

et de là,

$$\cos V = \sqrt{1 - \mu^2\left(\sin\frac{u}{2}\right)^2}, \quad \cos Z = \sqrt{1 - \mu^2\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2};$$

substituant ces valeurs, on aura la même équation du premier ordre en u et z.

Si l'angle Z que nous avons supposé obtus, était aigu, ainsi que l'angle V, alors au lieu de l'équation $z' = \frac{\cos Z}{\cos V}$, on aurait celle-ci $z' + \frac{\cos Z}{\cos V} = 0$, qui ne diffère que par le signe de z', et dont l'équation primitive sera la même.

70. Voici encore une considération essentielle sur ces sortes d'équations : l'équation de l'art. 68 étant mise sous cette forme

$$\frac{z'}{\sqrt{(A + B\cos z)}} = \frac{1}{\sqrt{(A + B\cos u)}},$$

supposons que fu soit la fonction primitive de $\frac{1}{\sqrt{(A + B\cos u)}}$, fz sera pareillement la fonction primitive de $\frac{z'}{\sqrt{(A + B\cos z)}}$, z étant regardé comme une fonction de u dont z' est la fonction prime. Ainsi, en repassant aux fonctions primitives, on aura sur-le-champ cette équation primitive

$$fz = fu + k,$$

k étant la constante arbitraire.

Cette équation devra donc coïncider avec l'équation primitive que nous avons trouvée dans l'article 68, et où la constante arbitraire est m; par conséquent sa constante arbitraire ne pourra être qu'une fonction de la constante arbitraire m. Soit donc $k = Fm$, on aura

$$fz = fu + Fm;$$

mais m est la valeur de z lorsque $u = 0$, supposant donc, pour plus de simplicité, que la fonction fu soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $u = 0$, il faudra qu'en faisant $u = 0$, on ait aussi $z = m$, par conséquent on aura $fm = Fm$; donc l'équation primitive qu'on vient de trouver deviendra

$$fz = fu + fm,$$

à laquelle satisfera cette relation algébrique,

$$\cos\tfrac{z}{2}\cos\tfrac{u}{2}+\sin\tfrac{z}{2}\sin\tfrac{u}{2}\sqrt{\left(\tfrac{A+B\cos m}{A+B}\right)}=\cos\tfrac{m}{2}.$$

Ainsi, quoiqu'on ne puisse pas trouver la forme algébrique des fonctions fu, fz, fm, on peut néanmoins trouver une relation algébrique entre trois quantités z, u, m, telle que l'on ait

$$fz = fu + fm.$$

Donc aussi, si dans l'équation précédente on change z en y, et u en z, on aura

$$\cos\tfrac{y}{2}\cos\tfrac{z}{2}+\sin\tfrac{y}{2}\sin\tfrac{z}{2}\sqrt{\left(\tfrac{A+B\cos m}{A+B}\right)}=\cos\tfrac{m}{2},$$

$$\text{et}\quad fy = fz + fm.$$

En changeant encore y en x, z en y, ce qui donnera

$$\cos\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{y}{2}+\sin\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{y}{2}\sqrt{\left(\tfrac{A+B\cos m}{A+B}\right)}=\cos\tfrac{m}{2},$$

on aura de même

$$fx = fy + fm;$$

et ainsi de suite.

On aura donc successivement

$$fz = fu + fm,\quad fy = fu + 2fm,\quad fx = fu + 3fm,\quad \text{etc.};$$

et les relations entre y, u et m; entre x, u et m, etc. se tireront des relations précédentes, en éliminant d'abord z, ensuite y, etc.

On peut appliquer cette théorie à la forme générale de l'équation que nous avons considérée dans l'art. 67, et en tirer des conclusions semblables; mais si on rapporte, comme dans l'art. 69, les formules précédentes aux triangles sphériques, il en résulte une construction élégante que voici:

Soit formé un triangle sphérique, dont les trois côtés soient z, u, m (pour éviter les fractions, je substitue les quantités $2z$, $2u$, $2m$ à la place de z, u, m dans les formules de l'article cité), et

et où l'angle entre u et m soit obtus; l'angle compris entre les deux côtés u et z demeurant constant, qu'on transporte alternativement la base m le long de ces mêmes côtés prolongés, de manière qu'il en résulte une suite de triangles, dont chacun ait toujours un côté commun avec le triangle précédent, et qui aient tous la même base m, et l'angle commun M au sommet; alors, si les côtés qui comprennent cet angle sont successivement pour ces différens triangles u et z, z et y, y et x, etc., on aura

$$fz = fu + fm, \quad fy = fu + 2fm, \quad fx = fu + 3fm, \quad \text{etc.},$$

fu étant la fonction primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2 \sin u^2)}}$, dans laquelle $\mu = \frac{\sin M}{\sin m}$, et ainsi des autres fonctions semblables en z, y, etc.

Par cette construction, on peut trouver facilement les valeurs des côtés y, x, etc. des nouveaux triangles; car en considérant les triangles isoscèles qui ont pour côtés la base m transportée alternativement, les perpendiculaires abaissées de leurs sommets sur leurs bases respectives, couperont ces bases en deux parties égales, et les triangles rectangles formés par ces perpendiculaires et par les côtés qui comprennent l'angle commun M, donneront tout de suite, par l'analogie connue pour les triangles rectangles, ces équations

$$\text{tang}\,\frac{u+y}{2} = \cos M \,\text{tang}\, z,$$

$$\text{tang}\,\frac{x+z}{2} = \cos M \,\text{tang}\, y,$$

etc.

Et si on fait $u = m$, ensorte que le premier triangle soit isoscèle, ayant z pour base, on aura de plus l'équation

$$\text{tang}\,\frac{z}{2} = \cos M \,\text{tang}\, m,$$

et l'on aura alors

$$fz = 2fm, \quad fy = 3fm, \quad fx = 4fm, \quad \text{etc.}$$

Nous remarquerons ici que cette construction est pour les

triangles sphériques, ce que la construction du problème 29 des questions géométriques de l'Arithmétique de Newton, est pour les triangles rectilignes.

En effet, si on rend rectilignes les triangles sphériques dont les côtés sont u, z, y, etc., et les bases m, les équations ci-dessus deviennent

$$z = 2m\cos \mathrm{M}, \quad u+y = 2z\cos \mathrm{M}, \quad x+z = 2y\cos \mathrm{M}, \quad \text{etc.};$$

et il est facile de prouver qu'alors la fonction fu devient proportionnelle à l'angle dont le sinus est $\frac{u\sin \mathrm{M}}{m}$, parce que $\sin u$ et $\sin m$ se changent en u et m; de sorte qu'en prenant la base m pour le sinus de l'angle opposé M, on aura, à cause de $u = m$,

$$z = \sin 2\mathrm{M}, \quad y = \sin 3\mathrm{M}, \quad \text{etc.}$$

71. Nous nous sommes un peu étendus sur les propriétés des fonctions de la forme fu, parce que les géomètres s'en sont beaucoup occupés, et que ces fonctions se présentent dans la solution de plusieurs problèmes.

Si on demande, par exemple, le mouvement d'un pendule qui oscille d'une manière quelconque, et qu'on nomme r la longueur du pendule, $\downarrow$ l'angle dont il est éloigné de la verticale dans un instant quelconque, α la plus grande valeur de $\downarrow$, β la plus petite, en prenant l'unité pour la gravité, et faisant

$$\sin u = \sqrt{\left(\frac{\cos\beta - \cos\downarrow}{\cos\beta - \cos\alpha}\right)},$$

$$\mu = \sqrt{\left(\frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{(\cos\beta+\cos\alpha)^2+\sin\alpha^2}\right)},$$

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{2(\cos\beta+\cos\alpha)}{(\cos\beta+\cos\alpha)^2+\sin\alpha^2}\right)},$$

on aura $\lambda\sqrt{r} \times fu$ pour l'expression du temps depuis le point le plus bas, dans laquelle on suppose comme ci-dessus,

$$f'u = \frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2\sin u^2)}}.$$

La vîtesse angulaire de rotation autour de la verticale, sera

exprimée par

$$\frac{\sqrt{2}.\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{r}\times\sin\psi^2\times\sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta)}};$$

et sera par conséquent nulle lorsque le pendule passera par la verticale, dans lequel cas on a $\beta=0$; c'est le cas des oscillations ordinaires.

72. On peut appeler *analyse directe* des fonctions, la manière de trouver les fonctions et les équations dérivées, parce qu'elle n'est fondée en effet que sur des méthodes directes, et qu'elle n'emploie que des opérations qu'on peut toujours exécuter par les règles que nous avons exposées. Mais la manière de revenir de ces fonctions et de ces équations à celles d'où elles peuvent être dérivées, et qu'on peut regarder comme leurs primitives, forme une autre partie de l'analyse des fonctions, qu'on peut appeler *analyse inverse*, parce qu'elle dépend des mêmes méthodes et des mêmes règles, mais prises inversement, et qui, par cette raison, ne s'appliquent pas toujours avec la même facilité ni le même succès. Il en est de ces deux parties de l'analyse des fonctions, comme de celles de l'arithmétique et de l'algèbre qui ont pour objet les opérations directes de la multiplication et de l'élévation aux puissances, et les opérations inverses de la division et de l'extraction des racines. Les opérations de la première espèce sont toujours possibles par les règles connues, et donnent toujours des résultats exacts; celles de la seconde espèce, au contraire, ne le sont que dans certains cas, au moins rigoureusement, et dans tous les autres, elles ne peuvent donner que des résultats approchés.

L'analyse directe des fonctions est donc renfermée dans les règles que nous avons données pour trouver les fonctions dérivées, du moins pour ce qui regarde les fonctions d'une seule variable. Quant à l'analyse inverse, elle dépend aussi des mêmes règles; mais la difficulté consiste dans leur application aux différens cas.

Nous avons indiqué les méthodes connues pour les principales formes de fonctions ou d'équations, et nous nous sommes sur-

tout appliqués à bien établir les principes généraux de cette analyse inverse.

Comme notre dessein n'est pas d'en donner un traité complet, nous n'ajouterons point ici d'autres détails ; mais ceux qui savent le calcul différentiel, ne peuvent manquer d'apercevoir la conformité de l'analyse des fonctions avec ce calcul, et la correspondance des analyses directes et inverses avec les deux parties de ce calcul qu'on appelle *calculs différentiel et intégral.* Ainsi, il leur sera aisé, s'ils le jugent à propos, de transporter aux fonctions les différentes méthodes d'intégration trouvées jusqu'à présent.

CHAPITRE XII.

Du développement des fonctions de deux variables. De leurs fonctions dérivées. Notation de ces fonctions et conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Loi générale qui règne entre les termes du développement d'une fonction de plusieurs variables, et ceux qui résultent du développement de ces termes eux-mêmes.

73. Nous n'avons encore traité que des fonctions d'une seule variable; il n'est pas difficile d'étendre la théorie de ces fonctions aux fonctions de deux ou de plusieurs variables.

Soit $f(x, y)$ une fonction quelconque de deux variables x et y, qu'on regarde comme indépendantes l'une de l'autre. Si, dans cette fonction, on met à la fois $x+i$ à la place de x, et $y+o$ à la place de y, i et o étant deux quantités indéterminées, qu'ensuite on développe la nouvelle fonction $f(x+i, y+o)$, suivant les puissances ascendantes de i et o, il est clair que le premier terme, sans i ni o, sera $f(x, y)$; et que les autres seront de nouvelles fonctions de x et de y, multipliées successivement par i, o, i^2, io, o^2, i^3, etc.; ces fonctions dérivent de la fonction primitive $f(x, y)$, et c'est la loi de cette dérivation qu'il s'agit de déterminer.

Pour y parvenir de la manière la plus simple, on commencera par supposer qu'il n'y ait que la variable x qui devienne $x+i$, la variable y demeurant la même. Dans ce cas, désignant, comme on l'a fait jusqu'ici, par f', f'', f''', etc. les fonctions primes, secondes, tierces, etc. relativement à x seul, on aura

$$f(x+i,y)=f(x,y)+if'(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x,y)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y)+\text{etc.}$$

Substituons maintenant partout $y+o$ à la place de y, on aura

$$f(x+i,y+o)=f(x,y+o)+if'(x,y+o)+\frac{i^2}{2}f''(x,y+o)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y+o)+\text{etc.}$$

Or, si on désigne par $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$, etc. les fonctions primes, secondes, tierces, etc. relativement à y, il est clair que la fonction $f(x,y+o)$, considérée comme fonction de $y+o$, et indépendamment de x, deviendra

$$f(x,y)+of_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y)+\frac{o^3}{2.3}f_{,,,}(x,y)+\text{etc.}$$

De même, en supposant toujours que les traits appliqués au bas de la lettre f, indiquent les fonctions primes, secondes, etc. relativement à y, des fonctions déjà désignées par f', f'', etc., on aura

$$f'(x,y+o)=f'(x,y)+of'_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f'_{,,}(x,y)+\text{etc.}$$

$$f''(x,y+o)=f''(x,y)+of''_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f''_{,,}(x,y)+\text{etc.},$$

et ainsi de suite

Faisant donc ces substitutions, et ordonnant les termes par rapport aux puissances et aux produits de i et o, on aura

$$f(x+i,y+o)=f(x,y)+if'(x,y)+of_{,}(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x,y)+iof'_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y)+\frac{i^2o}{2}f''_{,}(x,y)+\frac{io^2}{2}f'_{,,}(x,y)+\frac{o^3}{2.3}f_{,,,}(x,y)+\text{etc.},$$

où la forme générale des termes est

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3....m)(1.2.3....n)}\,{}^{m}_{n}(x,y).$$

74. Dans le procédé que nous venons de suivre pour avoir le

développement de $f(x+i, y+o)$, nous avons commencé par substituer dans $f(x, y)$, $x+i$ pour x, et nous avons développé suivant i, nous avons ensuite substitué dans tous les termes de ce développement, $y+o$ pour y, et nous avons développé suivant o. Or, il est visible qu'on aurait identiquement le même résultat, si on commençait par la substitution de $y+o$ pour y, et par le développement suivant o, et qu'on fît ensuite la substitution de $x+i$ pour x, et le développement suivant i. De cette manière, on aurait d'abord les fonctions primes, secondes, etc. relativement à y, savoir, $f_{,}(x,y)$, $f_{,,}(x,y)$, etc.; ensuite on aurait les fonctions primes, secondes, etc. de celles-ci relativement à x, qui, suivant la notation que nous venons d'établir, seraient représentées par $f'_{,}(x,y)$, $f'_{,,}(x,y)$, etc., $f''_{,}(x,y)$, $f''_{,,}(x,y)$, etc.; et on obtiendrait ainsi la même formule que ci-dessus, comme cela doit être. Or, dans le premier procédé, la fonction $f'_{,}(x,y)$ s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à x, ce qui donne $f'(x,y)$, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y; et dans le second procédé, la même fonction s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à y, ce qui donne $f_{,}(x,y)$, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à x.

D'où il suit qu'il est indifférent dans quel ordre se fasse la double opération nécessaire pour passer de la fonction primitive $f(x, y)$ à la fonction dérivée $f'_{,}(x,y)$; et comme on doit dire la même chose des autres fonctions marquées par des traits placés au haut ou au bas de la caractéristique f, on en peut conclure en général que les opérations indiquées par ces traits, sont absolument indépendantes entre elles et qu'elles conduisent aux mêmes résultats, quelqu'ordre qu'on suive en prenant les fonctions primes relativement à x et à y, indiquées par chacun des traits supérieurs ou inférieurs. Ainsi, par exemple, on aura également la valeur de $f''_{,}(x,y)$, en prenant la fonction seconde de $f(x,y)$ relativement à x, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, ou en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à y, et ensuite la fonction seconde de celle-ci relativement à x, ou bien en prenant la fonction prime

de $f(x,y)$ relativement à x, ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, et enfin la fonction prime de cette dernière relativement à x; et ainsi des autres.

Il est évident que cette conclusion a lieu en général, quelles que soient les variables x, y, indépendantes ou non.

75. Soit, par exemple,

$$f(x,y) = x\sqrt{(2xy+y^2)},$$

on aura la fonction prime, relativement à x,

$$f'(x,y) = \sqrt{(2xy+y^2)} + \frac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)}},$$

et sa fonction prime relativement à y sera

$$f_{,}(x,y) = \frac{x^2+xy}{\sqrt{(2xy+y^2)}};$$

ensuite la fonction prime de $f'(x,y)$ relativement à y, sera

$$f'_{,}(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} + \frac{x^2y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et la fonction prime de $f_{,}(x,y)$ relativement à x sera

$$f'_{,}(x,y) = \frac{2x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} - \frac{(x^2+xy)y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quoique ces deux expressions de $f'_{,}(x,y)$ paraissent différentes, elles sont cependant identiques; car elles se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{3x^2y+3xy^2+y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite, en prenant la fonction prime de $f'(x,y)$ relativement à x, c'est-à-dire la fonction seconde de $f(x,y)$ relativement à x, on aura

$$f''(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} - \frac{xy^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3xy^2+2y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et prenant maintenant la fonction prime de celle-ci relativement

à

à y, on aura, après les réductions,

$$f''_{,}(x,y)=\frac{3x^2y^2+3xy^3}{(2xy+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

De même, en prenant la fonction prime de $f'_{,}(x,y)$ relativement à x, on trouvera

$$f''_{,}(x,y)=\frac{3x^2y^2+3xy^3}{(2xy+y^2)^{\frac{5}{2}}};$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là qu'afin que des fonctions données de x et y puissent être prises pour des fonctions dérivées d'une même fonction primitive, il faut qu'elles satisfassent à certaines conditions.

Ainsi, si $F(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ représentent des fonctions données de x, y; pour qu'on puisse supposer $F(x,y)=f'(x,y)$, et $\varphi(x,y)=f_{,}(x,y)$, il faudra que l'on ait

$$f'_{,}(x,y)=F_{,}(x,y)=\varphi'(x,y).$$

Et en général, pour qu'on puisse supposer $F(x,y)=f''_{n}(x,y)$ et $\varphi(x,y)=f'_{q}(x,y)$, il faudra que l'on ait

$$f^{m+p}_{n+q}(x,y)=F^{p}_{q}(x,y)=\varphi^{m}_{n}(x,y).$$

Par exemple, si $F(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\varphi(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}$, on pourra supposer $F(x,y)=f'(x,y)$, $\varphi(x,y)=f_{,}(x,y)$; car on trouve $F_{,}(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\varphi'(x,y)$; mais on ne pourrait pas supposer $F(x,y)=f'_{,}(x,y)$ et $\varphi(x,y)=f''(x,y)$; car alors il faudrait que $F'(x,y)=\varphi_{,}(x,y)$, ce qui n'est pas.

76. En général, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans une fonction, si on donne un accroissement à chacune de ces variables, et qu'on développe la fonction suivant les dimensions formées par ces différens accroissemens, qu'on développe ensuite de la même manière les fonctions produites par le premier développement, et ainsi de suite, il règne entre ces différens dévelop-

$$f(x+i,y)=f(x,y)+if'(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x,y)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y)+\text{etc.}$$

Substituons maintenant partout $y+o$ à la place de y, on aura

$$f(x+i,y+o)=f(x,y+o)+if'(x,y+o)+\frac{i^2}{2}f''(x,y+o)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y+o)+\text{etc.}$$

Or, si on désigne par $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$, etc. les fonctions primes, secondes, tierces, etc. relativement à y, il est clair que la fonction $f(x,y+o)$, considérée comme fonction de $y+o$, et indépendamment de x, deviendra

$$f(x,y)+of_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y)+\frac{o^3}{2.3}f_{,,,}(x,y)+\text{etc.}$$

De même, en supposant toujours que les traits appliqués au bas de la lettre f, indiquent les fonctions primes, secondes, etc. relativement à y, des fonctions déjà désignées par f', f'', etc., on aura

$$f'(x,y+o)=f'(x,y)+of'_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f'_{,,}(x,y)+\text{etc.}$$

$$f''(x,y+o)=f''(x,y)+of''_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f''_{,,}(x,y)+\text{etc.},$$

et ainsi de suite

Faisant donc ces substitutions, et ordonnant les termes par rapport aux puissances et aux produits de i et o, on aura

$$f(x+i,y+o)=f(x,y)+if'(x,y)+of_{,}(x,y)+\frac{i^2}{2}f''(x,y)+iof'_{,}(x,y)+\frac{o^2}{2}f_{,,}(x,y)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x,y)+\frac{i^2o}{2}f''_{,}(x,y)+\frac{io^2}{2}f'_{,,}(x,y)+\frac{o^3}{2.3}f_{,,,}(x,y)+\text{etc.},$$

où la forme générale des termes est

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3....m)(1.2.3....n)}\,{}^{m}_{n}(x,y).$$

74. Dans le procédé que nous venons de suivre pour avoir le

$z+my$, etc. à la place de x, y, z, il est clair qu'elle deviendra

$$\begin{aligned} f(x,y,z\ldots) &+ f(1) + f(2) + f(3) + \text{etc.},\\ &+mf(1) + m^2f(2) + m^3f(3) + \text{etc.},\\ &+mf(1,1) + m^2f(1,2) + m^3f(1,3) + \text{etc.},\\ &+mf(2,1) + m^2f(2,2) + m^3f(2,3) + \text{etc.},\\ &+mf(3,1) + m^2f(3,2) + m^3f(3,3) + \text{etc.},\\ &+\text{etc.} \end{aligned}$$

D'un autre côté, il est visible que ces deux substitutions successives équivalent à une substitution unique qu'on ferait dans la fonction $f(x,y,z\ldots)$, en mettant

$$x+(1+m)\alpha,\quad y+(1+m)\beta,\quad z+(1+m)\gamma,\quad \text{etc.}$$

à la place de x, y, z, etc., et qui donnerait, par le développement,

$$f(x,y,z\ldots)+(1+m)f(1)+(1+m)^2f(2)+(1+m)^3f(3)+\text{etc.}$$

Ainsi, il faudra que ces deux développemens soient identiques, et que par conséquent les termes qui renferment les mêmes dimensions α, β, γ, etc. soient égaux de part et d'autre, quelle que soit d'ailleurs la quantité m. On aura donc les comparaisons suivantes :

$$\begin{aligned} &f(1)+mf(1)=(1+m)f(1),\\ &f(2)+m^2f(2)+mf(1,1)=(1+m)^2f(2),\\ &f(3)+m^3f(3)+m^2f(1,2)+mf(2,1)=(1+m)^3f(3),\\ &f(4)+m^4f(4)+m^3f(1,3)+m^2f(2,2)+mf(3,1)=(1+m)^4f(4); \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Et comparant encore les termes affectés des mêmes puissances de m, on tirera ces valeurs

$$\begin{aligned} &f(1,1)=2f(2),\\ &f(1,2)=3f(3),\quad f(2,1)=3f(3),\\ &f(1,3)=4f(4),\quad f(2,2)=6f(4),\quad f(3,1)=4f(4);\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

pemens, une loi que nous allons exposer d'une manière générale, parce qu'elle peut être utile dans quelques occasions.

Soit $f(x, y, z...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y, z, etc.; supposons que par la substitution de $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, etc., à la place de x, y, z, etc., et par le développement suivant les puissances et les produits de α, β, γ, etc., cette fonction devienne

$$f(x, y, z...)+f(1)+f(2)+f(3)+\text{etc.}$$

Je dénote par $f(1)$ la somme de tous les termes où les quantités α, β, γ, etc. seront à la première dimension, par $f(2)$, la somme de tous les termes où ces mêmes quantités formeront deux dimensions, et ainsi de suite.

Supposons de plus qu'en faisant la même substitution et le même développement dans les fonctions $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, etc.; elles deviennent

$$\begin{aligned}
&f(1)+f(1,1)+f(1,2)+f(1,3)+\text{etc.},\\
&f(2)+f(2,1)+f(2,2)+f(2,3)+\text{etc.},\\
&f(3)+f(3,1)+f(3,2)+f(3,3)+\text{etc.},\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

où je dénote par $f(1,1)$, $f(1,2)$, etc., les rangs successifs des termes du développement de $f(1)$, de manière que, puisque les quantités α, β, γ, etc. sont à la première dimension dans $f(1)$, elles formeront deux dimensions dans $f(1,1)$, trois dimensions dans $f(1,2)$; et ainsi des autres. Par cette notation, on voit qu'en général la quantité désignée par $f(m,n)$ renfermera tous les termes du développement de $f(m)$, où les quantités α, β, γ, etc. formeront $m+n$ dimensions.

Cela posé, si on substitue d'abord $x+\alpha, y+\beta, z+\gamma$, etc. dans la fonction $f(x, y, z...)$, elle deviendra

$$f(x, y, z...)+f(1)+f(2)+f(3)+\text{etc.};$$

et si on substitue ensuite dans cette quantité, $x+m\alpha, y+m\beta$,

rieurs qui se rapportent à l'une des variables x, et par des traits inférieurs qui se rapportent à l'autre variable y, nous nommerons fonctions *primes*, *secondes*, etc., selon x ou y, les fonctions marquées par de seuls traits supérieurs ou inférieurs, et nous nommerons simplement fonctions *primo-primes*, *secundo-primes*, *primo-secondes*, les fonctions marquées à la fois par des traits supérieurs et inférieurs, en énonçant le trait supérieur le premier et l'inférieur le second.

On trouvera plus de détails sur ce sujet, dans la leçon XIX du *Calcul des Fonctions*.

Donc par les termes du premier développement général, on pourra avoir immédiatement ceux de tous les développemens partiels suivans.

77. A l'imitation de ce que nous avons pratiqué pour les fonctions d'une seule variable, si on regarde z comme une fonction de x et y, on pourra dénoter par z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, etc. ces différentes fonctions dérivées, en appliquant à la lettre z les mêmes traits qu'on appliquerait à la caractéristique f de la fonction $f(x,y)$ qu'on suppose représenter la valeur de z, et on nommera ces fonctions de la même manière.

Ainsi, x devenant $x+i$, et y devenant $y+o$, la quantité z, fonction de x, y, deviendra (art. 73),

$$z+iz'+oz_{,}+\frac{i^2}{2}z''+ioz'_{,}+\frac{o^2}{2}z_{,,}+\frac{i^3}{2.3}z'''+\frac{i^2o}{2}z''_{,}+\frac{io^2}{2}z'_{,,}+\frac{o^3}{2.3}z_{,,,}+\text{etc.};$$

le terme général de cette série étant, comme dans l'endroit cité,

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\ldots m)\ (1.2.3\ldots n)}\ z^m_n.$$

A l'égard de la manière de trouver ces différentes fonctions, il est clair qu'il n'y a qu'à suivre les mêmes règles que pour les fonctions d'une seule variable; les traits supérieurs de la caractéristique indiquant l'ordre de la fonction dérivée relativement à x seul, et les traits inférieurs indiquant l'ordre de la fonction dérivée relativement à y seul.

Ainsi, en prenant les fonctions primes de z, selon x et y, on aura les valeurs de z' et $z_{,}$; et de là, en prenant encore les fonctions primes relativement à x et à y, on aura les fonctions dérivées du second ordre z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$; et ainsi de suite.

Il est bon de remarquer ici que pour les fonctions de deux variables, il y a deux fonctions dérivées du premier ordre z' et $z_{,}$, trois du second ordre z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, etc., de sorte que pour l'ordre $m^{\text{ième}}$, il y aura un nombre $m+1$ de fonctions dérivées.

Comme nous distinguons ces fonctions dérivées par des traits supé-

ferons

$$f(x,y) = f(x - xz,\ y - yz) + P,$$

P étant une fonction de z qui devra être évidemment nulle lorsque $z = 0$. Puisque la quantité z peut être quelconque, nous pouvons prendre l'équation prime relativement à z, et par les principes et la notation établis, il est facile de voir que la fonction prime de $f(x - xz, y - yz)$, prise relativement à z, sera

$$-xf'(x - xz,\ y - yz) - yf_{,}(x - xz,\ y - yz);$$

donc, désignant par P′ la fonction prime de P, prise aussi relativement à z, on aura, pour la détermination de P, l'équation du premier ordre

$$P' = xf'(x - xz, y - yz) + yf_{,}(x - xz, y - yz).$$

Considérons, en second lieu, les trois premiers termes du développement de $f(x, y)$, et faisons

$$f(x,y) = f(x - xz,\ y - yz) + xzf'(x - xz,\ y - yz) + yzf_{,}(x - xz, y - yz) + Q,$$

Q sera une fonction de z qui devra, par la nature même de cette équation, devenir nulle lorsque $z = 0$. A cause de l'indétermination de z, on pourra prendre l'équation prime relativement à z; et désignant par Q′ la fonction prime de Q, on trouvera, après avoir effacé les termes qui se détruisent dans l'équation prime, cette équation du premier ordre pour la détermination de Q,

$$Q' = x^2zf''(x - xz,\ y - yz) + 2xyzf'_{,}(x - xz,\ y - yz) + y^2zf_{,,}(x - xz, y - yz);$$

et ainsi de suite.

Pour déduire de ces équations les valeurs de P, Q, etc., il faudrait chercher les fonctions primitives des quantités P′, Q′, etc. relativement à z, et les prendre telles qu'elles soient nulles lorsque $z = 0$. Mais comme nous n'avons pas besoin des expressions générales de ces quantités, mais seulement de leurs valeurs relatives à $z = 1$, que même il suffit d'avoir des limites de ces valeurs, on

CHAPITRE XIII,

Où l'on donne la manière de développer les fonctions d'un nombre quelconque de variables en séries terminées, composées d'autant de termes qu'on voudra, et d'avoir la valeur des restes.

78. PAR une méthode analogue à celle du chapitre VI, on peut aussi avoir le développement d'une fonction quelconque de x et y suivant les puissances de x et y, et déterminer les restes de la série lorsqu'on veut l'arrêter à des termes quelconques. En changeant dans la formule de l'article 73, x et y en $x-i, y-i$; ensuite i et o en xz, yz, on aura

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x-xz, y-yz) + xzf'(x-xz, y-yz) \\ & + yzf_{,}(x-xz, y-yz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz, y-yz) \\ & + xyz^2f'_{,}(x-xz, y-yz) + \frac{y^2z^2}{2} f_{,,}(x-xz, y-yz) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

où z sera une quantité quelconque indéterminée qui étant supposée égale à zéro, rendra l'équation identique, et qui étant faite $= 1$, donnera

$$f(x,y) = f. + xf.' + yf._{,} + \frac{x^2}{2} f.'' + xyf.'_{,} + \frac{y^2}{2} f._{,,} + \text{etc.},$$

formule générale du développement de la fonction $f(x,y)$, suivant les puissances de x et y, dans laquelle les quantités désignées par f., f.', f.$_{,}$, etc. dénotent les valeurs des fonctions dérivées suivant x et y, en faisant $x = o$ et $y = o$.

Supposons maintenant qu'on ne veuille faire ce développement que par parties, et arrêtons-nous d'abord au premier terme, nous

$$f(x+i,y+o) = f(x,y) + if'(x+\lambda i, y+\lambda o) + of_{,}(x+\lambda i, y+\lambda o),$$

$$= f(x,y) + if'(x,y) + of_{,}(x,y) + \frac{i^2}{2} f''(x+\lambda i, y+\lambda o) + iof'_{,}(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x+\lambda i, y+\lambda o)$$

$$= f(x,y) + if'(x,y) + of_{,}(x,y) + \frac{i^2}{2} f''(x,y) + iof'_{,}(x,y) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x,y) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{i^2 o}{2} f''_{,}(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{io^2}{2} f'_{,,}(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{o^3}{2.3} f_{,,,}(x+\lambda i, y+\lambda o),$$

$$= \text{etc.}$$

La quantité λi répond, comme l'on voit, à la quantité que nous avons désignée par j dans l'article 40; nous préférons ici l'expression λi, parce que le même coefficient λ se trouve dans la quantité λo. De ces formules qu'il serait maintenant aisé d'étendre aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, on peut déduire la conclusion suivante :

Lorsque dans le développement d'une fonction suivant les puissances et les produits de certaines quantités, on veut s'arrêter aux termes d'un ordre donné, c'est-à-dire, dans lesquels ces quantités forment des dimensions d'un degré égal à l'exposant de cet ordre, on peut supposer le reste du développement égal aux seuls termes de l'ordre suivant, mais en y conservant ces mêmes quantités sous les fonctions, et les multipliant toutes par un coefficient λ dont la valeur sera entre les limites o et 1, et qui sera la même dans la même fonction, mais qui pourra être différente dans les différentes fonctions.

79. Au reste, on pourrait aussi appliquer au développement de la fonction $f(x+i, y+o)$ la méthode de l'article 37, en pre-

pourra faire usage de la méthode employée dans le chapitre cité, pour parvenir à des conclusions semblables à celles de l'article 39.

Ainsi, en désignant par λ un nombre indéterminé, ou plutôt inconnu, toujours compris entre 0 et 1, et qui devra être partout le même dans la même fonction, mais qui pourra être différent dans les différentes fonctions, on trouvera les expressions suivantes :

$$P = xf'(\lambda x, \lambda y) + yf_{,}(\lambda x, \lambda y),$$
$$Q = \tfrac{1}{2}[x^2 f''(\lambda x, \lambda y) + 2xyf'_{,}(\lambda x, \lambda y) + y^2 f_{,,}(\lambda x, \lambda y)];$$

et ainsi des autres.

Donc, enfin, substituant ces valeurs de P, Q, etc. dans les développemens de $f(x, y)$, et faisant $z = 1$, on aura ces formules générales qui renferment une extension du théorème de l'art. 40.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f. + xf'(\lambda x, \lambda y) + yf_{,}(\lambda x, \lambda y), \\ &= f. + xf.' + yf._{,} + \frac{x^2}{2} f''(\lambda x, \lambda y) \\ &\quad + xyf'_{,}(\lambda x, \lambda y) + \frac{y^2}{2} f_{,,}(\lambda x, \lambda y); \\ &= f. + xf.' + yf._{,} + \frac{x^2}{2} f.'' + xyf.'_{,} + \frac{y^2}{2} f._{,,} \\ &\quad + \frac{x^3}{2.3} f'''(\lambda x, \lambda y) + \frac{x^2 y}{2} f''_{,}(\lambda x, \lambda y) \\ &\quad + \frac{xy^2}{2} f'_{,,}(\lambda x, \lambda y) + \frac{y^3}{2.3} f_{,,,}(\lambda x, \lambda y), \\ &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Donc, si l'on a la fonction $f(x + i, y + o)$ à développer suivant les puissances de i et de o, il n'y aura qu'à mettre i et o à la place de x et y dans les formules précédentes, et les quantités f., f.', $f._{,}$, etc. deviendront $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f_{,}(x, y)$, etc., où les fonctions dérivées peuvent être prises relativement à x et y, puisque la fonction $f(x + i, y + o)$ est telle que ses dérivées relativement à x et y, sont les mêmes que les dérivées relativement à i et o. Ainsi, on aura

f(x

fonctions d'une seule variable, peut s'appliquer de même aux fonctions de deux variables.

Ainsi, il sera facile d'étendre aux fonctions de deux variables, les remarques que nous avons faites dans le chapitre V, sur le développement des fonctions, lorsqu'on donne aux variables des valeurs déterminées, et d'en déduire des conséquences et des résultats semblables.

Enfin, il est visible qu'on pourra traiter aussi par les mêmes principes, les fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables, puisqu'il ne s'agira que de répéter les mêmes opérations séparément pour chaque variable.

nant les fonctions dérivées par rapport à i et o. En effet, soit

$$f(x+i,y+o)=f(x,y)+iP+oQ.$$

En prenant d'abord les fonctions dérivées par rapport à x et y, on aura

$$f'(x+i,y+o)=f'(x,y)+iP'+oQ',$$
$$f_{,}(x+i,y+o)=f_{,}(x,y)+iP_{,}+oQ_{,}.$$

Ensuite si on prend les fonctions dérivées par rapport à i et o, et qu'on les désigne par des traits placés au haut et au bas, mais en arrière des lettres, on aura aussi

$$f'(x+i,y+o)=P+i'P+o'Q,$$
$$f_{,}(x+i,y+o)=Q+i_{,}P+o_{,}Q;$$

puisqu'il est évident que les fonctions dérivées de $f(x+i,y+o)$ sont les mêmes par rapport à x et i, et par rapport à y et o. De là on aura

$$P=f'(x,y)+i(P'-{}'P)+o(Q'-{}'Q)$$
$$Q=f_{\backprime}(x,y)+i(P_{,}-{}_{\backprime}P)+o(Q_{\backprime}-{}_{,}Q).$$

Donc si on fait

$$R=P'-{}'P,\quad S=Q'-{}'Q+P_{\backprime}-{}_{,}P,\quad T=Q_{\backprime}-{}_{,}Q,$$

on aura, en substituant ces valeurs,

$$f(x+i,y+o)=f(x,y)+if'(x,y)+of_{\backprime}(x,y)+i^{2}R+ioS+o^{2}T,$$

et l'on pourra de la même manière pousser le développement aussi loin qu'on voudra; de sorte qu'en connaissant les expressions analytiques des premiers restes P, Q, on trouvera tous les suivans par les simples fonctions dérivées de ces restes.

8o. Puisque les fonctions dérivées de deux variables se forment de la même manière, et par les mêmes règles que celles d'une seule variable, en considérant chaque variable séparément et successivement, il s'ensuit que tout ce que nous avons démontré sur les

ment à x, y, z, considérées séparément, et comme des variables indépendantes, il est aisé de voir, par les principes établis pour les fonctions d'une seule variable, que $i[F'(x)+z'F'(z)]$ sera le terme affecté de i, et $o[F'(y)+z_{,}F'(z)]$ le terme affecté de o dans le développement de $F(x, y, z)$, après la substitution de $x+i$ et $y+o$ pour x et y, z étant regardé comme fonction de x et y.

Ainsi, $F'(x)+z'F'(z)$ sera la fonction prime relative à x, et $F'(y)+z_{,}F'(z)$ la fonction prime relative à y de $F(x, y, z)$; de sorte qu'on aura ces deux équations primes

$$F'(x)+z'F'(z)=0, \quad F'(y)+z_{,}F'(z)=0;$$

d'où l'on tire

$$z'=-\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad z_{,}=-\frac{F'(y)}{F'(z)}.$$

Ayant ainsi les valeurs de z' et $z_{,}$, on en déduira celles de z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, etc., en prenant de nouveau les fonctions primes de celles-ci relatives à x et y; et ainsi de suite.

82. On peut aussi rappeler immédiatement cette théorie à celle des fonctions d'une variable, en regardant z comme donné en x et y, et y comme une fonction indéterminée de x. Ainsi, en regardant d'abord y et z comme fonctions de x, la fonction prime de $F(x, y, z)$ sera,

$$F'(x)+y'F'(y)+z'F'(z);$$

mais z étant considéré comme fonction de x et y, et y comme fonction de x, la fonction prime de z sera représentée par $z'+y'z_{,}$; mettant cette valeur à la place de z', on aura

$$F'(x)+z'F'(z)+y'[F'(y)+z_{,}F'(z)]$$

pour la fonction prime de $F(x, y, z)$.

Donc, ayant l'équation $F(x, y, z)=0$, on aura l'équation prime

$$F'(x)+z'F'(z)+y'[F'(y)+z_{,}F'(z)]=0.$$

CHAPITRE XIV.

Des équations dérivées d'une équation entre trois variables. Des fonctions arbitraires qui entrent dans les équations primitives complètes entre trois variables.

81. Lorsqu'une fonction z n'est donnée que par une équation entre x, y, z, on considérera que comme cette équation doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs de x et y, il s'ensuit qu'elle aura lieu aussi en y mettant $x+i$ et $y+o$ à la place de x et y, quelles que soient les quantités i et o; de sorte qu'en développant, après cette substitution, l'équation suivant les puissances et les produits de i et o, il faudra que les termes multipliés par une même puissance ou produits de i et o, forment des équations séparées. Mais nous venons de voir que dans le développement d'une fonction de x et y, les termes multipliés par i donnent la fonction prime selon x, ceux multipliés par o donnent la fonction prime selon y, ceux multipliés par $\frac{i^2}{2}$ donnent la fonction seconde selon x, etc. Donc, ayant une équation quelconque entre x, y, z, et regardant z comme une fonction de x et y donnée par cette équation, on pourra, en prenant les différentes fonctions dérivées de tous ses termes, en déduire autant d'équations dérivées de différens ordres, qu'on appellera de même, *équations primes, secondes*, etc. selon x ou y, *équations primo-primes, secundo-primes*, etc., et en général, *équations dérivées du premier ordre, du second ordre*, etc. Ces équations serviront à trouver les valeurs de z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, etc.

Si donc on représente par $F(x, y, z) = o$ l'équation proposée pour la détermination de z, et qu'on désigne simplement par $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$, prises relative-

aura encore la même équation du premier ordre par l'élimination des deux arbitraires a et b, quoiqu'elles ne soient pas constantes, pourvu que les deux équations primes soient encore de la même forme.

Désignons simplement par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$, prises relativement aux quantités a et b contenues dans cette dernière fonction; il est aisé de voir par les principes établis, que si a et b sont regardés comme des fonctions de x et y, la fonction prime de $F(x, y, z)$ relative à x, devra être augmentée, à raison des deux nouvelles variables a et b, de la quantité $a'F'(a) + b'F'(b)$, et que la fonction prime, relative à y, devra être augmentée pareillement de $a_,F'(a) + b_,F'(b)$.

Supposons $b = fa$, on aura, en prenant les fonctions primes relativement à x et y,

$$b' = a'f'a \qquad b_, = a_,f'a;$$

donc les quantités à ajouter aux deux fonctions primes seront

$$a'[F'(a) + f'a \times F'(b)] \quad \text{et} \quad a_,[F'(a) + f'a \times F'(b)];$$

par conséquent, elles disparaîtront à la fois en prenant a telle qu'elle satisfasse à l'équation

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0;$$

la fonction fa de a, qu'on a prise pour b, demeurant absolument arbitraire.

De là résultent donc ces conclusions importantes :

1°. Que l'équation primitive qui satisfait en général à une équation du premier ordre, doit renfermer une fonction arbitraire;

2°. Que si pour une équation donnée du premier ordre, on trouve une équation primitive $F(x, y, z) = 0$, qui renferme deux constantes arbitraires a et b, il n'y aura qu'à faire $b = fa$, et prendre a de manière qu'elle satisfasse à l'équation

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0;$$

la fonction désignée par fa sera la fonction arbitraire;

Mais y étant regardé comme une fonction indéterminée de x, l'équation précédente doit avoir lieu, quelle que soit la fonction y'; elle se décomposera donc en ces deux-ci,

$$F'(x)+z'F'(z)=0, \quad F'(y)+z_iF'(z)=0,$$

comme plus haut.

On pourrait trouver de la même manière les équations dérivées des ordres supérieurs.

83. Cela posé, considérons en général l'équation

$$F(x,y,z)=0;$$

elle donne les deux équations primes

$$F'(x)+z'F'(z)=0 \quad \text{et} \quad F'(y)+z_iF'(z)=0,$$

qui auront par conséquent lieu en même temps que la proposée. Donc une combinaison quelconque de ces trois équations aura lieu aussi, et pourra par conséquent tenir lieu de l'équation primitive.

Soient a et b deux constantes quelconques contenues dans la fonction $F(x,y,z)$, ces constantes seront les mêmes dans les fonctions dérivées $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$; ainsi on pourra, au moyen des trois équations dont il s'agit, éliminer ces deux constantes, et l'équation résultante sera une équation du premier ordre entre x, y, z, z' et z_i qui renfermera deux constantes de moins que l'équation primitive. Donc, réciproquement, si on n'a pour la détermination de z en x et y qu'une équation du premier ordre entre x, y, z, z' et z_i, l'équation primitive entre x, y et z devra contenir deux constantes arbitraires.

Ceci est analogue à ce que nous avons vu relativement aux fonctions d'une seule variable (art. 46); mais nous avons vu aussi (art. 60) que la quantité arbitraire qui doit se trouver dans l'équation primitive, peut n'être pas constante, et donner cependant par l'élimination, la même équation du premier ordre. La même chose peut donc avoir lieu ici; et il est aisé de concevoir qu'on

aura encore la même équation du premier ordre par l'élimination des deux arbitraires a et b, quoiqu'elles ne soient pas constantes, pourvu que les deux équations primes soient encore de la même forme.

Désignons simplement par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$, prises relativement aux quantités a et b contenues dans cette dernière fonction; il est aisé de voir par les principes établis, que si a et b sont regardés comme des fonctions de x et y, la fonction prime de $F(x, y, z)$ relative à x, devra être augmentée, à raison des deux nouvelles variables a et b, de la quantité $a'F'(a) + b'F'(b)$, et que la fonction prime, relative à y, devra être augmentée pareillement de $a_{,}F'(a) + b_{,}F'(b)$.

Supposons $b = fa$, on aura, en prenant les fonctions primes relativement à x et y,

$$b' = a'f'a \qquad b_{,} = a_{,}f'a;$$

donc les quantités à ajouter aux deux fonctions primes seront

$$a'[F'(a) + f'a \times F'(b)] \quad \text{et} \quad a_{,}[F'(a) + f'a \times F'(b)];$$

par conséquent, elles disparaîtront à la fois en prenant a telle qu'elle satisfasse à l'équation

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0;$$

la fonction fa de a, qu'on a prise pour b, demeurant absolument arbitraire.

De là résultent donc ces conclusions importantes :

1°. Que l'équation primitive qui satisfait en général à une équation du premier ordre, doit renfermer une fonction arbitraire;

2°. Que si pour une équation donnée du premier ordre, on trouve une équation primitive $F(x, y, z) = 0$, qui renferme deux constantes arbitraires a et b, il n'y aura qu'à faire $b = fa$, et prendre a de manière qu'elle satisfasse à l'équation

$$F'(a) + f'a \times F'(b) = 0;$$

la fonction désignée par fa sera la fonction arbitraire;

3°. Qu'ayant une équation quelconque entre x, y, z qui renferme une fonction donnée, on en peut déduire une équation du premier ordre où cette fonction ne se trouve plus. En effet, si φp est la fonction qu'on veut faire disparaître, p étant une fonction donnée de x, y, z, il n'y aura qu'à prendre les deux équations primes, suivant x et suivant y, de l'équation proposée, on aura trois équations qui renfermeront φp et $\varphi' p$, en désignant par $\varphi' p$ la fonction prime de φp prise relativement à p; d'où, éliminant ces deux fonctions, il résultera une équation du premier ordre où la fonction φp ne se trouvera plus.

84. Soit, par exemple, $z - ax - by - c = 0$ une équation donnée; les deux équations primes seront

$$z' - a = 0, \quad z_{,} - b = 0;$$

éliminant a et b de ces trois équations, on aura l'équation du premier ordre

$$z - xz' - yz_{,} - c = 0,$$

dont $z - ax - by - c = 0$ sera l'équation primitive, a et b étant les constantes arbitraires.

Maintenant, en supposant $z - ax - by - c = \mathrm{F}(x, y, z)$, on aura

$$\mathrm{F}'(a) = -x, \quad \mathrm{F}'(b) = -y.$$

Donc, faisant $b = \mathrm{f}a$, l'équation pour déterminer a sera

$$-x - y\mathrm{f}'a = 0; \quad \text{d'où l'on tire} \quad \mathrm{f}'a = -\frac{x}{y};$$

ce qui donne

$$a = \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

φ désignant la fonction inverse de f'. Ainsi la fonction f étant indéterminée, la fonction φ le sera aussi; donc a et b seront deux fonctions indéterminées de $\frac{x}{y}$, ou plutôt dépendantes d'une même fonction indéterminée de $\frac{x}{y}$; et $b + \frac{ax}{y}$ sera par conséquent une fonction

fonction indéterminée de $\frac{x}{y}$. Désignant donc cette fonction simplement par $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, l'équation primitive deviendra

$$z - y\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - c = 0.$$

Si on prend les deux équations primes de celle-ci, on aura

$$z' - \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \quad \text{et} \quad z_1 - \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \times \frac{x}{y} = 0.$$

Eliminant de ces trois équations les deux inconnues $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$, on aura, comme plus haut,

$$z - xz' - yz_1 - c = 0$$

pour l'équation dérivée du premier ordre, délivrée de la fonction $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

CHAPITRE XV.

Formule remarquable pour le développement en série d'une fonction quelconque de l'inconnue z de l'équation z=x+yf.z.

85. CETTE propriété des équations primes de pouvoir servir à faire disparaître une fonction quelconque, est très-utile dans beaucoup d'occasions, et surtout pour les développemens en série.

Pour en donner un exemple, soit proposée l'équation

$$z = x + yfz$$

pour la détermination de z, fz étant une fonction quelconque de z, et supposons qu'on demande la valeur de z en série suivant les puissances de y; il est visible que les deux premiers termes seront $x + yfx$; et si, pour trouver les termes suivans, on suppose $z = x + yfx + Ay^2 + By^3 + \text{etc.}$, il faudra développer la fonction fz suivant les puissances de y, et comparer ensuite les termes pour pouvoir déterminer les valeurs de A, B, etc.; mais, de cette manière, on n'aurait pas la loi de ces valeurs; il y aura donc de l'avantage à employer, au lieu de l'équation proposée, une équation du premier ordre où la fonction fz ne se trouve pas.

Prenant donc les équations primes suivant x et suivant y, on aura

$$z' = 1 + yf'z \times z', \quad \text{et} \quad z_1 = fz + yf'z \times z_1,$$

en dénotant par $f'z$ la fonction prime de fz relativement à z; d'où éliminant $f'z$, on tire d'abord

$$z_1 - z'fz = 0.$$

Mais l'équation primitive donne

$$fz = \frac{z-x}{y};$$

donc, substituant cette valeur dans la dernière équation, on aura cette équation du premier ordre, délivrée de fz,

$$z'(z-x)-yz_{,}=0.$$

Comme le premier terme de l'expression de z en série de y est évidemment x, nous supposerons en général,

$$z=x+Ay+By^{2}+Cy^{3}+\text{etc.},$$

A, B, C, etc. étant des fonctions de x, nous aurons

$$z'=1+A'y+B'y^{2}+C'y^{3}+\text{etc.},$$

A', B', etc. étant les fonctions primes de A, B, etc., regardées comme fonctions de x; ensuite

$$z_{,}=A+2By+3Cy^{2}+4Dy^{3}+\text{etc.});$$

donc on aura, en substituant ces valeurs,

$$(1+A'y+B'y^{2}+C'y^{3}+\text{etc.})(A+By+Cy^{2}+\text{etc.})$$
$$-A-2By-3Cy^{2}-\text{etc.}=0;$$

savoir,

$$(AA'-B)y+(BA'+AB'-2C)y^{2}$$
$$+(CA'+BB'+AC'-3D)y^{3}+\text{etc.}=0;$$

d'où l'on tire tout de suite

$$B=AA',\quad C=\tfrac{1}{2}(AB'+BA'),$$
$$D=\tfrac{1}{3}(AC'+BB'+CA'),\quad \text{etc.}$$

Ici la quantité A demeure indéterminée; mais nous avons déjà vu que les deux premiers termes de z dans l'équation proposée sont $x+yfx$, par conséquent, on aura $A=fx$, et de là

$$A'=f'x,\quad B=fxf'x,\quad B'=fxf''x+(f'x)^{2};$$

donc

$$C=\tfrac{1}{2}(2fxf'x^{2}+fx^{2}f''x),\quad \text{etc.}$$

Tout se réduit donc à trouver ces fonctions dérivées, et à les mettre sous une forme simple et régulière. Pour cela, nous reprendrons les deux équations primes trouvées ci-dessus (art. 85, 86),

$$z_{,} - z'fz = 0 \quad \text{et} \quad \frac{u'}{u_{,}} = \frac{z'}{z_{,}},$$

lesquelles donnent celles-ci,

$$u_{,} = u'fz \quad \text{et} \quad z_{,} = z'fz.$$

On aura donc, 1°.

$$u_{,} = u'fz;$$

2°. en prenant les fonctions primes selon y,

$$u_{,,} = u'_{,}fz + u'z_{,}f'z,$$

$f'z$ dénote la fonction prime de z relativement à z; or, de la première équation, on tire aussi cette équation prime relative à x,

$$u'_{,} = u''fz + u'z'f'z;$$

donc, substituant, on aura

$$u_{,,} = u''fz^{2} + 2u'z'f'zfz = (u'fz^{2})';$$

3°. en prenant encore les fonctions primes relatives à y, on aura

$$u_{,,,} = (u'fz^{2})'_{,}; \quad \text{or} \quad (u'fz^{2})_{,} = u'_{,}fz^{2} + 2u'z_{,}fz;$$

substituant les valeurs de $u'_{,}$ et de $z_{,}$, données ci-dessus, on aura

$$(u'fz^{2})_{,} = u''fz^{3} + 3u'z'f'zfz^{2} = (u'fz^{3})';$$

donc, prenant les fonctions primes relatives à x, on aura

$$(u'fz^{2})'_{,} = (u'fz^{3})'' = u_{,,,};$$

et ainsi de suite.

Donc, puisque $u = \varphi z$, on aura $u' = z'\varphi'z$, par conséquent,

$$u_{,} = z'\varphi'zfz, \quad u_{,,} = (z'\varphi'zfz^{2})', \quad u_{,,,} = (z'\varphi'zfz^{3})'', \quad \text{etc.},$$

$\varphi'z$ étant la fonction prime de φz relativement à z seul, et les exposans de z indiquant les puissances de fz.

Faisons maintenant $y = 0$, l'équation proposée $z = x + yfz$ donnera $z = x$; donc

$$z' = 1, \quad \varphi z = \varphi x, \quad \varphi' z = \varphi' x \quad \text{et} \quad fz = fx;$$

donc enfin

$$P = \varphi x, \quad Q = \varphi' x fx, \quad R = \frac{1}{2}(\varphi' x fx^2)', \quad S = \frac{1}{2.3}(\varphi' x fx^3)'', \quad \text{etc.}$$

comme ci-dessus.

Pour montrer, par une application, l'usage de cette formule, soit proposée l'équation

$$z = x + yz^m,$$

x et y étant des quantités données, et qu'on demande la valeur de z^n en série suivant les puissances de y; on fera donc

$$fz = z^m, \quad \varphi z = z^n;$$

donc aussi

$$fx = x^m, \quad \varphi x = x^n, \quad \varphi' x = nx^{n-1},$$

et l'on aura sur-le-champ

$$P = x^n,$$

$$Q = nx^{m+n-1},$$

$$R = \frac{n}{2}(x^{2m+n-1})' = \frac{n(2m+n-1)}{2} x^{2m+n-2},$$

$$S = \frac{n}{2.3}(x^{3m+n-1})'' = \frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3} x^{3m+n-3},$$

etc.;

de sorte qu'on aura

$$z^n = x^n + nx^{m+n-1}y + \frac{n(2m+n-1)}{2} x^{2m+n-2}y^2 + \frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3} x^{3m+n-3}y^3 + \text{etc.}$$

Voyez aussi sur ce sujet, la note XI du Traité de la résolution des équations numériques, seconde édition.

CHAPITRE XVI.

Méthode générale pour trouver l'équation primitive d'une équation du premier ordre entre plusieurs variables, lorsque les fonctions dérivées sont linéaires; et pour trouver l'équation primitive d'une équation quelconque du premier ordre entre trois variables.

88. Nous avons vu comment on peut faire disparaître une fonction arbitraire contenue dans une équation donnée, au moyen de ses équations primes; mais il y a, pour y parvenir, un moyen plus simple à quelques égards, fondé sur la considération que nous avons employée plus haut (art. 82).

Considérons en général l'équation $F(x, y, z, \varphi p) = 0$, dans laquelle p soit égale à $f(x, y, z)$, les deux fonctions désignées par les caractéristiques F et f étant données, et la fonction marquée par la caractéristique φ étant arbitraire; on peut supposer y une fonction de x, telle que la fonction prime de p soit nulle; alors p pourra être traitée comme constante dans la fonction $F(x, y, z, \varphi p)$, pourvu qu'on détermine y' par la condition que la fonction prime de $f(x, y, z)$ soit nulle.

Désignons simplement par $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$, et de même par $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ les fonctions primes de $F(x, y, z, \varphi p)$, et de $f(x, y, z)$, prises relativement à x, y, z isolées et regardées comme indépendantes, on aura, comme dans l'endroit cité, les deux équations primes

$$F'(x) + z'F'(z) + y'[F'(y) + z_1F'(z)] = 0,$$
$$f'(x) + z'f'(z) + y'[f'(y) + z_1f'(z)] = 0,$$

dont

dont la première contiendra φp, et dont la seconde ne contiendra point p; celle-ci servira à éliminer l'inconnue y'; la première, jointe à son équation primitive, servira à éliminer l'inconnue φp.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir s'appliquer aux équations qui contiendraient plusieurs fonctions arbitraires de la même fonction p.

En effet, si l'on avait l'équation $(x, y, z, \varphi p, \downarrow p) = 0$, on trouverait d'abord, comme ci-dessus, une équation du premier ordre sans la fonction φp, mais qui contiendrait encore la fonction $\downarrow p$; ensuite, appliquant à cette équation le même procédé, et éliminant de nouveau la fonction y' qui paraîtra dans son équation prime par la même équation ci-dessus, on aura une équation du second ordre qui contiendra $\downarrow p$, et d'où on éliminera cette fonction par le moyen de l'équation du premier ordre; et ainsi de suite, quel que puisse être le nombre des fonctions arbitraires de la même quantité p.

Mais si l'équation proposée contenait les fonctions φp et $\downarrow q$, p et q étant des fonctions différentes de x, y, z, on ne pourrait pas parvenir à une équation du second ordre, débarrassée des fonctions φp et $\downarrow p$, et de leurs dérivées; il faudrait alors passer à des équations d'un ordre supérieur.

89. Considérons les équations du premier ordre qui peuvent résulter de l'élimination d'une fonction arbitraire φp, et supposons, pour plus de simplicité, ce qui est toujours possible, que l'équation primitive soit de la forme

$$\mathrm{F}(x, y, z) = \varphi p, \quad p \text{ étant} = \mathrm{f}(x, y, z),$$

on aura alors les deux équations primes

$$\mathrm{F}'(x) + z'\mathrm{F}'(z) + y'[\mathrm{F}'(y) + z_1\mathrm{F}'(z)] = 0,$$
$$\mathrm{f}'(x) + z'\mathrm{f}'(z) + y'[\mathrm{f}'(y) + z_1\mathrm{f}'(z)] = 0,$$

qui seront délivrées de φp; et il ne s'agira plus que d'éliminer y'.

Le résultat de cette élimination est

$$\frac{\mathrm{F}'(x) + z'\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{f}'(x) + z'\mathrm{f}'(z)} = \frac{\mathrm{F}'(y) + z_1\mathrm{F}'(z)}{\mathrm{f}'(y) + z_1\mathrm{f}'(z)};$$

d'où résulte cette équation de premier ordre

$$F'(x)\times f'(y)-F'(y)\times f'(x)+z'[F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)]+z_{,}[F'(x)\times f'(z)-F'(z)\times f'(x)]=0,$$

qui ne contient que x, y, z avec les fonctions primes z' et $z_{,}$.

Cette équation pourra donc être mise sous cette forme

$$z'+Mz_{,}+N=0,$$

en faisant

$$M=\frac{F'(x)\times f'(z)-F'(z)\times f'(x)}{F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)},$$

$$N=\frac{F'(x)\times f'(y)-F'(y)\times f'(x)}{F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)},$$

d'où l'on peut conclure,

1°. Que toutes les équations du premier ordre entre x, y, z' et $z_{,}$ qui ne seront pas réductibles à la forme précédente, ne pourront pas être dérivées d'une équation primitive entre x, y, z et φp, p étant une fonction de x, y, z;

2°. Que toutes les équations du premier ordre réductibles à la forme précédente, pourront toujours avoir pour équation primitive une équation de la forme supposée $F(x, y, z)=\varphi p$, p étant $=f(x, y, z)$.

Car les valeurs des coefficiens M et N étant données en fonctions de x, y, on aura deux équations par lesquelles on pourra déterminer les deux fonctions marquées par les caractéristiques F et f; et la fonction marquée pour φ demeurera arbitraire.

Ce problème étant l'un des plus intéressans de la théorie des fonctions, je vais en donner ici une solution directe.

90. Regardons, ce qui est permis, y et z comme des fonctions de x, dont les fonctions primes soient y' et z', et considérons les deux quantités $z'+N$ et $Mz'+Ny'$; ces quantités deviendront, par la substitution des expressions précédentes de M et de N,

$$\frac{f'(y)[F'(z)z'+F'(x)]-F'(y)[f'(z)z'+f'(x)]}{F'(z)\times f'(y)-F'(y)\times f'(z)},$$

$$\frac{F'(x)[f'(z)z'+f'(y)y']-f'(x)[F'(z)z'+F'(y)y']}{F'(z)\times fy-F'(y)\times f'(z)}.$$

Si on ajoute et qu'on retranche en même temps du numérateur de la première, la quantité $F'(y) \times f'(y)y'$, et du numérateur de la seconde, la quantité $F'(x) \times f'(x)$, et qu'on fasse attention que $F'(x) + F'(y)y' + F'(z)z'$ est la fonction prime de $F(x, y, z)$, que nous dénoterons simplement par $F(x, y, z)'$, que de même $f'(x) + f'(y)y' + f'(z)z'$ est la fonction prime de $f(x, y, z)$, que nous dénoterons pareillement par $f(x, y, z)'$, on aura

$$z' + N = \frac{f'(y) \times F(x, y, z)' - F'(y) \times f(x, y, z)'}{F'(z) \times f'(y) - F'(y) \times f'(z)},$$

$$Mz' + Ny' = \frac{F'(x) \times f(x, y, z)' - f'(x) \times F(x, y, z)'}{F'(z) f'(y) - F'(y) \times f'(z)};$$

Donc si on fait les deux équations

$$z' + N = o, \quad Mz' + Ny' = o,$$

ces équations seront équivalentes à ces deux-ci

$$F(x, y, z)' = o, \quad \text{et} \quad f(x, y, z)' = o,$$

dont les équations primitives sont évidemment

$$F(x, y, z) = A, \quad f(x, y, z) = B,$$

A et B étant des constantes arbitraires; de sorte que ces équations primitives seront complètes à cause des deux constantes arbitraires A et B.

Mais il est possible qu'en cherchant les équations primitives des équations

$$z' + N = o, \quad Mz' + Ny' = o,$$

où M et N sont des fonctions données de x, y, z, on ne les trouve pas sous la forme précédente. Cependant, sous quelque forme qu'elles puissent se présenter, si elles renferment deux constantes arbitraires a et b, elles doivent être comprises dans les précédentes, et les constantes A et B ne pourront qu'être fonctions des constantes a et b. Si donc on tire de ces équations primitives les va-

leurs des constantes a et b en x, y, z, et que ces valeurs soient P et Q, ensorte que les équations dont il s'agit soient réduites à la forme $P = a$, $Q = b$, il s'ensuit que les fonctions $F(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$ ne pourront être aussi que des fonctions de P et Q.

Donc, puisque l'équation primitive d'où l'équation du premier ordre $z' + Mz_{,} + N = o$ est dérivée, est de la forme

$$F(x, y, z) = \varphi p = \varphi\,[f(x, y, z)],$$

cette équation primitive deviendra

$$\text{fonct.}\,(P, Q) = \varphi(\text{fonct. } P, Q),$$

la fonction marquée par φ demeurant arbitraire : d'où il résulte que P sera une fonction quelconque de Q ; de sorte que l'équation primitive de l'équation du premier ordre

$$z' + Mz_{,} + N = o,$$

pourra être réduite en général à cette forme très-simple,

$$P = \varphi Q,$$

la fonction marquée par la caractéristique φ étant arbitraire. Cette méthode réduit, comme l'on voit, la détermination de la fonction de deux variables à celle de deux fonctions d'une seule variable ; et elle est surtout remarquable par la simplicité et la généralité du résultat.

91. La méthode précédente peut s'étendre aussi aux fonctions de plus de deux variables. Ainsi, si u est une fonction de trois variables x, y, z, déterminée par l'équation

$$F(x, y, z, u) = \varphi(p, q),$$

p et q étant des fonctions données de x, y, z, u, et $\varphi(p, q)$ étant une fonction quelconque de p, q, on trouvera, par une analyse semblable à celle de l'art. 89, et regardant y et z comme des

fonctions de x, dont on déterminera les fonctions primes y' et z', par la supposition que p et q demeurent constantes; on trouvera, dis-je, une équation du premier ordre, dérivée de la fonction φ, de la forme suivante,

$$u' + Lu_{,} + M_{,}u + N = 0,$$

L, M, N étant des fonctions données de x, y, z, u, et $u', u_{,}, {}_{,}u$ étant les fonctions primes de u relativement à x, y et z; de sorte que toute équation entre x, y, z, u et les fonctions primes de u, qui ne serait pas de cette forme, ne pourra pas être dérivée d'une équation primitive de la forme ci-dessus.

Pour les équations du premier ordre réductibles à la forme précédente, on trouvera aussi, par une analyse semblable à celle de l'article précédent, que si on regarde y, z, u comme des fonctions de x déterminées par ces trois équations du premier ordre

$$u' + N = 0, \quad Lu' + Ny' = 0, \quad Mu' + Nz' = 0,$$

et qu'on en cherche les équations primitives qui devront renfermer trois constantes arbitraires a, b, c, qu'ensuite on tire de ces équations les valeurs de ces constantes, de manière que l'on ait

$$a = P, \quad b = Q, \quad c = R,$$

P, Q, R étant des fonctions données de x, y, z, u, on aura sur-le-champ

$$P = \varphi(Q, R)$$

pour l'équation primitive de l'équation proposée, dans laquelle $\varphi(P, Q)$ sera une fonction arbitraire de P et Q.

Cette méthode est présentée d'une manière plus simple et plus directe dans la leçon XX du *Calcul des Fonctions*, à laquelle nous nous contentons de renvoyer.

92. Mais si l'on avait, pour la détermination de z en fonction de x et y, une équation quelconque du premier ordre entre x, y, z, z' et $z_{,}$ non réductible à la forme de l'article 89, la même

bitraire, satisfera dans toute son étendue à l'équation du premier ordre en u, dans laquelle u est regardée comme fonction de x, y, z; mais u a été supposée égale à $z_{,}$, et z doit être, d'après l'équation proposée, une fonction de x et y; donc l'équation $P = \varphi(Q, R)$ est trop générale, et il faudra encore chercher les limitations qu'on doit donner à la fonction arbitraire relativement aux deux quantités P et Q, pour que cette équation réponde exactement à l'équation proposée.

Mais, sans entrer dans cette recherche, j'observe que, quelle que puisse être la vraie forme de la fonction arbitraire, on peut la supposer égale à une constante; de sorte que $P = a$, c'est-à-dire, une des équations primitives des trois équations ci-dessus, avec une constante arbitraire, donnera une valeur de u, qui satisfera à l'équation en u.

Maintenant, en remettant $z_{,}$ pour u dans cette équation, on aura une équation du premier ordre entre x, y, z et $z_{,}$, dans laquelle z devra être regardée comme fonction de x et y; mais puisque cette équation ne contient que la fonction prime $z_{,}$, relative à y, on pourra regarder x comme constante, et z comme une simple fonction de y; on trouvera donc son équation primitive par l'analyse des fonctions d'une seule variable, et puisque x est regardée comme constante, la constante arbitraire qui entrera dans cette équation primitive pourra être aussi une fonction quelconque de x, que nous nommerons p.

On aura ainsi une valeur de z en x et y avec les deux quantités a et p, qui satisfera à l'équation proposée. La constante a demeurera arbitraire; mais la fonction p devra être déterminée conformément à cette équation. Pour cela, il n'y aura qu'à y substituer l'expression de z dont il s'agit; tous les termes qui renfermeront y se détruiront, et il ne restera que des termes qui contiendront x, p et p'; de sorte que l'on aura de nouveau une équation du premier ordre entre les variables x et p, dont l'équation primitive donnera la valeur de p en x, avec une nouvelle constante arbitraire b.

De cette manière, on aura enfin une valeur de z en x et y, avec

tiellement une fonction de x et y, dont z' et $z_{,}$ sont les fonctions primes relativement à chacune de ces variables isolées, la valeur complète de la fonction prime de u relativement à x, sera $u'+_{,}uz'$, et que la valeur complète de la fonction prime de u relativement à y, sera $u_{,}+_{,}uz_{,}$; ces valeurs sont celles qui, dans l'équation ci-dessus, sont représentées simplement par u' et $u_{,}$; mais on a supposé $z_{,}=u$, et par l'équation proposée, on a $z'=\mathrm{F}(x,y,z,u)$; donc les valeurs à substituer à u' et $u_{,}$ seront $u'+_{,}u\mathrm{F}(x,y,z,u)$ et $u_{,}+_{,}uu$. Faisant donc ces substitutions, dans la dernière équation en u, u', $u_{,}$, et ordonnant les termes suivant les quantités u', $u_{,}$ et $_{,}u$, on aura

$$u'-u_{,}\mathrm{F}'(u)+_{,}u[\mathrm{F}(x,y,z,u)-u\mathrm{F}'(u)]-\mathrm{F}'(y)-u\mathrm{F}'(z)=0,$$

équation qui, étant comparée à la formule générale de l'art. 91, donne

$$\mathrm{L}=-\mathrm{F}'(u),\quad \mathrm{M}=\mathrm{F}(x,y,z,u)-u\mathrm{F}'(u)$$

et

$$\mathrm{N}=-\mathrm{F}'(y)-u\mathrm{F}'(z);$$

de sorte que les trois équations par lesquelles il faudra déterminer y, z, u en fonctions de x, seront

$$\begin{aligned} u'-\mathrm{F}'(y)-u\mathrm{F}'(z)&=0,\\ u'\mathrm{F}'(u)+y'[\mathrm{F}'(y)+u\mathrm{F}'(z)]&=0,\\ u'[\mathrm{F}(x,y,z,u)-u\mathrm{F}'(u)]-z'[\mathrm{F}'(y)+u\mathrm{F}'(z)]&=0. \end{aligned}$$

Ainsi la difficulté est réduite à trouver les équations primitives d'où celles-ci peuvent être déduites; mais il suffira d'en trouver une, et il serait même inutile de trouver les deux autres.

93. En effet, supposons qu'on ait trouvé les trois équations primitives avec les trois constantes arbitraires a, b, c, et soient P, Q, R les valeurs de ces constantes qui en résultent, on aura $\mathrm{P}=\varphi(\mathrm{Q},\mathrm{R})$ pour la forme générale de l'équation primitive en u (art. 91).

Cette équation, où la caractéristique φ désigne une fonction ar-

laquelle ne contenant que la variable u, qu'on suppose fonction de x, aura une équation primitive indépendamment des deux autres. En effet, si on multiplie cette équation par e^{-Bx}, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, son premier membre deviendra la fonction prime de $ue^{-Bx} + \frac{Ae^{-Bx}}{B}$, comme il est aisé de s'en assurer, en cherchant la fonction prime de cette quantité par les formules du chapitre III.

Ainsi, comme le second membre est nul, on aura, en passant aux fonctions primitives $\left(u + \frac{A}{B}\right) e^{-Bx} = a$, a étant une constante arbitraire. Cette équation donnera donc

$$u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx},$$

et substituant pour u sa valeur $z_{,}$, on aura l'équation prime

$$z_{,} = -\frac{A}{B} + ae^{Bx};$$

dans laquelle $z_{,}$ étant la fonction prime de z relativement à y seul, on pourra regarder x comme constante, et z comme fonction de y. Ainsi, comme le second membre ne contient ni y ni z, sa fonction primitive dans cette supposition sera simplement $\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y$; donc, passant des fonctions primes relatives à y seul, aux fonctions primitives, on aura l'équation primitive

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + p,$$

p étant une fonction quelconque de x qui peut être ajoutée comme constante, puisque sa fonction prime relativement à y est nulle.

De cette expression de z on tirera celles des deux fonctions primes z' et $z_{,}$ relatives à x et y; et l'on aura

$$z' = aBe^{Bx}y + p',$$
$$z_{,} = -\frac{A}{B} + ae^{Bx};$$

avec deux constantes arbitraires a et b, qui satisfera à la proposée indépendamment des constantes. Cette valeur ne sera que particulière; mais on pourra, par la méthode de l'article 83, trouver la valeur générale de z, qui contiendra une fonction arbitraire.

En effet, si $f(x, y, z, a, b) = 0$ est l'équation trouvée pour la détermination de z, on fera $b = \varphi a$, et on égalera à zéro la fonction prime de $f(x, y, z, a, \varphi a)$, prise relativement à la quantité a, regardée comme seule variable; on aura une équation qui servira à déterminer a, et l'équation $f(x, y, z, a, \varphi a) = 0$ sera l'équation primitive cherchée de la proposée du premier ordre, la fonction marquée par la caractéristique φ demeurant arbitraire.

J'ai cru devoir exposer cette méthode avec tout le détail nécessaire pour la faire bien entendre, parce qu'elle est nouvelle et qu'elle réduit toute l'analyse inverse des fonctions de deux variables qui ne passent pas le premier ordre, à l'analyse des fonctions d'une seule variable.

94. Pour éclaircir cette méthode par un exemple dont le calcul soit assez simple, supposons que l'équation proposée soit de cette forme

$$z' = Ay + Bz + f(x, z_{,}),$$

A et B étant des constantes, et $f(x, z_{,})$ une fonction quelconque donnée de x et de $z_{,}$. En rapportant cette équation à la formule générale de l'article précédent, on aura

$$F(x, y, z, z_{,}) = Ay + Bz + f(x, z_{,});$$

donc

$$F(x, y, z, u) = Ay + Bz + f(x, u),$$

et de là, en prenant les fonctions primes relativement à y et z,

$$F'(y) = A, \quad F'(z) = B;$$

de sorte qu'en faisant ces substitutions dans les trois équations du premier ordre entre x, y, z, u, la première d'entre elles deviendra

$$u' - A - Bu = 0;$$

sant $f(x, Ax+a)=F'x$, les deux équations

$$z=(Ax+a)\,y+Fx+\varphi a,$$
$$y+F'(a)+\varphi'a=0,$$

d'où il faudra éliminer a.

95. Cette dernière méthode est néanmoins sujette à quelques difficultés que nous avons résolues complettement dans la même leçon XX déjà citée, où cette matière est envisagée d'une manière plus générale que nous ne l'avons fait ici.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce qui regarde les fonctions de plusieurs variables. Ceux qui connaissent le calcul qu'on appelle *aux différences partielles*, pourront aisément le rapprocher de l'analyse de ces fonctions, et donner par là à cette analyse les développemens qu'on y pourrait encore desirer.

Notre objet, dans cette première partie, n'a été que d'établir la théorie des fonctions et des équations dérivées, d'une manière purement analytique et indépendante de toute supposition ou considération étrangère.

SECONDE PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Des différentes manières dont on a considéré les tangentes. Théorie des tangentes et des contacts de différens ordres, d'après les principes de la géométrie ancienne.

1. Les opérations ordinaires de l'algèbre suffisent pour résoudre les problèmes de la théorie des courbes, qui ne consistent que dans des rapports de lignes tirées d'une certaine manière et terminées aux courbes; mais la détermination des tangentes, des rayons de courbure, des aires, etc. dépend essentiellement des opérations relatives aux fonctions.

Suivant les anciens géomètres, une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune droite entre elle et la courbe; c'est par ce principe qu'ils ont déterminé les tangentes dans le petit nombre des courbes qu'ils ont considérées. Mais depuis que, par l'application de l'algèbre à la géométrie, les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes sous d'autres points de vue; on les a regardées comme des sécantes dont les deux points d'intersection sont réunis, ou comme le prolongement des côtés infiniment petits de la courbe considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, ou comme la direction du mouvement composé, par lequel la courbe peut être décrite; et ces

différentes manières de considérer les tangentes ont donné lieu aux méthodes algébriques fondées sur l'égalité des racines des équations, et aux méthodes différentielles fondées sur le rapport des différences infiniment petites, ou des fluxions des coordonnées. Ces méthodes ne laissent rien à desirer pour la généralité et la simplicité; mais ceux qui admirent avec raison l'évidence et la rigueur des anciennes démonstrations, regrettent de ne pas trouver ces avantages dans les principes de ces nouvelles méthodes. La théorie des fonctions que nous avons développée dans la première partie, nous met en état de traiter le problème des tangentes, et les autres problèmes du même genre, d'après les notions et les principes des anciens, et de donner ainsi aux résultats de l'analyse le caractère qui distingue leurs solutions.

2. Pour considérer ces questions d'une manière générale, soit $y = fx$ l'équation d'une courbe quelconque proposée, et $q = Fp$ l'équation d'une ligne droite ou d'une autre courbe qu'on veut comparer à celle-là; x et y sont l'abscisse et l'ordonnée de la première courbe, p et q sont aussi l'abscisse et l'ordonnée de l'autre courbe, rapportées aux mêmes axes que x et y.

Pour que ces deux courbes aient un point commun relatif à l'abscisse x, il faut qu'en faisant $p = x$, on ait $q = y$; donc $y = Fx$, et par conséquent $Fx = fx$.

Pour comparer maintenant le cours de ces courbes au-delà de ce point, on mettra dans leurs équations $x + i$ à la place de x et de p, et l'on aura $f(x+i)$ et $F(x+i)$ pour les ordonnées répondant au même point de l'axe des x, et éloignées de la quantité i de l'ordonnée qui passe par le point commun. Donc la différence de ces ordonnées sera $f(x+i) - F(x+i)$, savoir, en développant les fonctions et observant que l'on a déjà $fx - Fx = 0$,

$$i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}(f''x - F''x) + \frac{i^3}{2.3}(f'''x - F'''x) + \text{etc.},$$

et cette différence exprimera la distance des points des deux courbes qui répondent à la même abscisse $x + i$.

On voit d'abord en général que cette distance sera d'autant plus

petite et que par conséquent les courbes se rapprocheront d'autant plus qu'il y aura plus de termes qui disparaîtront au commencement de cette série.

Ainsi le rapprochement sera plus grand, si l'on a $f'x = F'x$, c'est-à-dire, si les fonctions primes des ordonnées des deux courbes deviennent égales pour la même abscisse x; il sera plus grand encore si de plus les fonctions secondes $f''x$ et $F''x$ des mêmes ordonnées deviennent aussi égales, et ainsi de suite.

3. Mais pour voir de plus près en quoi consistent ces différens degrés de rapprochement, nous considérerons une troisième courbe quelconque, rapportée aux mêmes axes par les coordonnées r et s, et dont l'équation soit $s = \varphi r$, et nous supposerons d'abord qu'elle ait aussi avec les deux autres un point commun pour la même abscisse x, ce qui exige que les ordonnées à cette abscisse soient égales, et par conséquent que l'on ait aussi $\varphi x = fx = Fx$.

Soit D la différence des ordonnées des deux premières courbes pour la même abscisse $x + i$, et Δ la différence des ordonnées de la première courbe et de la troisième pour cette même abscisse $x + i$, on aura

$$D = f(x+i) - F(x+i),$$

et de même,

$$\Delta = f(x+i) - \varphi(x+i).$$

Il est clair que la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins que pour une valeur quelconque de i, aussi petite qu'on voudra, la valeur de D ne surpasse celle de Δ, abstraction faite des signes.

Développons les fonctions $f(x+i)$, $F(x+i)$, $\varphi(x+i)$ partiellement, suivant la formule de l'article 40 de la première Partie, et arrêtons-nous d'abord aux deux premiers termes. Nommant j une quantité indéterminée, mais renfermée entre les limites o et i, on aura par cette formule,

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''(x+j),$$

et de même

$$F(x+i)=Fx+if'x+\frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

$$\varphi(x+i)=\varphi x+i\varphi' x+\frac{i^2}{2}\varphi''(x+j);$$

où la quantité j pourra n'être pas la même dans les trois fonctions, pourvu qu'elle soit renfermée entre les mêmes limites.

Faisant ces substitutions dans les expressions de D et Δ, on aura, à cause de $fx=Fx=\varphi x$, en vertu du point commun aux trois courbes,

$$D=i(f'x-F'x)+\frac{i^2}{2}[f''(x+j)-F''(x+j)],$$

$$\Delta=i(f'x-\varphi' x)+\frac{i^2}{2}[f''(x+j)-\varphi''(x+j)].$$

Supposons maintenant que les deux premières courbes soient telles que l'on ait $f'x=F'x$, la valeur D se réduira à

$$D=\frac{i^2}{2}[f''(x+j)-F''(x+j)];$$

et il est aisé de se convaincre que tant que le terme affecté de i dans l'expression de Δ ne sera pas nul, on pourra toujours prendre i assez petit pour que la quantité Δ devienne plus grande que la quantité D, abstraction faite des signes. En effet, en divisant ces deux quantités par i, il suffira que la quantité $f'x-\varphi' x$ soit plus grande que $\frac{i}{2}[\varphi''(x+j)-F''(x+j)]$, ce qui est évidemment toujours possible, en prenant i aussi petit qu'on voudra; et il est visible aussi qu'aussitôt que cette condition aura lieu pour une valeur déterminée de i, elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus petites de i.

Donc, la troisième courbe ne pourra, dans ce cas, passer entre les deux premières, à moins que la quantité $f'x-\varphi' x$ ne devienne nulle, c'est-à-dire, qu'on n'ait $\varphi' x=f'x$, auquel cas la conclusion précédente cessera d'avoir lieu.

4. Supposons ensuite que l'on ait à la fois $F'x = f'x$ et $F''x = f''x$; en prenant trois termes dans le développement des fonctions, nous aurons par la même formule de l'art. 40, (Part I.),

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''(x+j),$$
$$F(x+i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2} F''x + \frac{i^3}{2.3} F'''(x+j),$$
$$\varphi(x+i) = \varphi x + i\varphi'x + \frac{i^2}{2} \varphi''x + \frac{i^3}{2.3} \varphi'''(x+j).$$

Ces valeurs étant substituées dans les expressions générales de D et Δ, à cause de $fx = Fx = \varphi x$, et $f'x = F'x$, $f''x = F''x$, donneront

$$D = \frac{i^3}{2.3} [f'''(x+j) - F'''(x+j)],$$
$$\Delta = i(f'x - \varphi'x) + \frac{i^2}{2} (f''x - \varphi''x) + \frac{i^3}{2.3} [f'''(x+j) - \varphi'''(x+j)].$$

Ici, il est aisé de voir que, tant que les termes affectés de i et de i^2 dans l'expression de Δ ne seront pas nuls, on pourra prendre i assez petit pour que la quantité Δ devienne plus grande que D, abstraction faite des signes. Car divisant ces deux quantités par i, il suffira que la quantité $f'x - \varphi'x + \frac{i}{2}(f''x - \varphi''x)$ soit plus grande que $\frac{i^2}{2.3} [\varphi'''(x+j) - F'''(x+j)]$, ce qui est évidemment possible lorsque $f'x - \varphi'x$ n'est pas nulle; et si $f'x - \varphi'x$ est nulle, alors, en divisant encore par i, il suffira que $f''x - \varphi''x$ soit une quantité plus grande que $\frac{i}{3} [\varphi'''(x+j) - F'''(x+j)]$; ce qui est encore visiblement possible, en diminuant la valeur de i tant qu'on voudra, pourvu que $f''x - \varphi''x$ ne soit pas nulle.

Donc, dans ce cas, la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins qu'on n'ait à la fois $f'x = \varphi'x$ et $\varphi''x = f''x$.

On prouvera de la même manière, que si l'on a pour les deux premières courbes

$$f'x = F'x, \quad f''x = F''x \quad \text{et} \quad f'''x = F'''x,$$

la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins que l'on ait aussi

$$\varphi' x = \mathrm{f}' x, \quad \varphi'' x = \mathrm{f}'' x, \quad \varphi''' x = \mathrm{f}''' x;$$

et ainsi de suite.

5. On peut conclure de là en général, que si l'on a une courbe quelconque, et qu'une autre courbe donnée ait un point commun avec celle-là, ce qui exige que leurs ordonnées pour la même abscisse soient égales; que, de plus, les fonctions primes de ces ordonnées pour la même abscisse commune soient aussi égales; alors il sera impossible qu'aucune autre courbe qu'on mènerait par le même point commun, passe entre les deux courbes, à moins que la fonction prime de son ordonnée pour la même abscisse, ne soit aussi égale à la fonction prime de l'ordonnée commune aux deux courbes.

Et si, outre les fonctions primes de ces ordonnées, leurs fonctions secondes pour la même abscisse étaient aussi égales, alors il serait impossible qu'aucune autre courbe qui passerait par le point commun, passât entre les deux courbes, à moins que les fonctions prime et seconde de son ordonnée ne fussent respectivement égales aux fonctions prime et seconde de l'ordonnée commune aux deux courbes, et ainsi du reste.

A proprement parler, ces courbes ne coïncident que dans le point où les ordonnées sont égales, et l'égalité des fonctions primes, secondes, etc. de ces ordonnées ne les rend pas plus coïncidentes dans d'autres points, mais elle les fait approcher de manière qu'aucune autre courbe pour laquelle la même égalité n'aurait pas lieu, ne puisse passer entre elles.

C'est là l'idée nette qu'on doit se faire de ces différens degrés de rapprochement des courbes, que l'on appelle communément *contact*, *osculation*, etc., et que la manière ordinaire de concevoir le calcul différentiel fait regarder comme des coïncidences plus ou moins rigoureuses, ou plus ou moins étendues.

CHAPITRE II.

Des lignes droites tangentes, des cercles tangens et du lieu de leurs contacts. Des cercles osculateurs et du lieu de leurs contacts. Analyse générale du contact des courbes planes. Du contact dans des cas singuliers, et des lignes assymptotes.

6. Soit proposée une courbe quelconque représentée par l'équation $y = fx$, comparons-la d'abord avec une ligne droite quelconque. Puisque nous avons représenté en général par $q = Fp$ l'équation de la courbe à laquelle on veut comparer la proposée (art. 2), on aura, pour la ligne droite,

$$Fp = a + bp,$$

a et b étant deux constantes qui déterminent la position de cette droite.

La condition d'un point commun donne d'abord

$$fx = Fx = a + bx;$$

et on pourra y satisfaire au moyen d'une des indéterminées a ou b.

Supposons ensuite $f'x = F'x$, il est clair qu'en changeant dans $a + bp$, p en x, et prenant la fonction prime, on aura

$$F'x = b, \quad \text{donc} \quad f'x = b.$$

Ainsi les valeurs de a et b seront déterminées par ces deux conditions; car on aura

$$b = f'x \quad \text{et} \quad a = fx - xf'x.$$

Donc l'équation à la ligne droite cherchée sera

$$q = fx - xf'x + pf'x,$$

p et q étant les deux coordonnées, et l'abscisse x étant regardée comme constante.

Je dis maintenant que cette droite a la propriété qu'aucune autre droite ne pourra être menée entre elle et la courbe.

Car, soit $s = \varphi r = g + hr$ l'équation d'une autre droite quelconque, pour qu'elle passe par le même point commun, il faudra que l'on ait aussi $\varphi x = fx$; et pour qu'elle puisse passer entre la courbe et la droite que nous venons de déterminer, il faudra de plus que l'on ait $\varphi' x = f'x$ (art. 3); ces deux conditions donnent

$$g + hx = fx \quad \text{et} \quad h = f'x;$$

d'où l'on tire pour g et h les mêmes valeurs que nous venons de trouver pour a et b; de sorte que cette dernière droite coïncidera avec la première.

Donc la droite déterminée par l'équation $q = a + bp$, où $a = fx - xf'x$ et $b = f'x$ sera tangente de la courbe représentée par l'équation $y = fx$, au point qui répond à l'abscisse $p = x$.

Puisque $y = fx$, on aura, suivant la notation employée dans la première partie,

$$y' = f'x;$$

donc les expressions de a et b seront plus simplement

$$a = y - xy' \quad \text{et} \quad b = y'.$$

Dans l'équation de la ligne droite $q = a + bp$, il est aisé de voir que b exprime la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe, et que $-\frac{a}{b}$ est l'abscisse qui répond au point où la même droite coupe l'axe. Donc cette droite étant tangente à la courbe au point où $p = x$, y' sera la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe, et $x + \frac{a}{b} = \frac{y}{y'}$ sera ce qu'on appelle la *soutangente*.

7. Représentons par $s = \alpha + \beta r$ une autre droite qui passe par

le même point de la courbe, r et s étant les deux coordonnées de cette droite, on aura pour ce point,

$$r=p=x, \quad s=q=y;$$

donc $$a+bx=\alpha+\beta x.$$

Pour que cette droite coupe la première sous un angle dont la tangente soit m, comme b et β sont les tangentes des angles que ces deux droites font avec le même axe, on aura par les formules connues de la trigonometrie,

$$\beta=\frac{b+m}{1-bm}; \quad \text{donc} \quad \alpha=a-\frac{x(1+b^2)m}{1-bm};$$

où il n'y aura qu'à substituer les valeurs de a et b.

Si l'on veut que cette seconde droite soit perpendiculaire à la tangente, on fera $m=\infty$, c'est-à-dire, $\frac{1}{m}=0$, et l'on aura simplement

$$\alpha=a+x\left(b+\frac{1}{b}\right)=y+\frac{x}{y'}.$$

et $$\beta=-\frac{1}{b}=-\frac{1}{y'}.$$

Ainsi $-\frac{1}{y'}$ sera la tangente de l'angle que cette perpendiculaire qu'on appelle communément *normale*, fera avec l'axe, et $x+\frac{\alpha}{\beta}=-yy'$ sera la partie de l'axe comprise entre le point où elle coupe l'axe et l'ordonnée, c'est-à-dire, la *sounormale*.

Si les deux coordonnées x, y de la courbe étaient exprimées en fonctions d'une troisième variable quelconque, alors prenant x' et y' pour les fonctions primes de x et y relativement à cette autre variable, il n'y aurait qu'à mettre partout dans les formules précédentes $\frac{y'}{x'}$ à la place de y' (art. 50, par. I).

Il serait superflu d'appliquer ces formules à des exemples; car pour peu qu'on sache les premiers élémens du calcul différentiel, on ne peut manquer d'apercevoir l'identité des formules précé-

dentes avec les formules différentielles connues. Il suffit de mettre $\frac{dy}{dx}$ à la place de la fonction dérivée y'.

8. Prenons maintenant le cercle pour le comparer avec la courbe proposée. L'équation générale du cercle rapportée aux coordonnées rectangles p et q, est

$$(p-a)^2+(q-b)^2=c^2,$$

où a et b sont les coordonnées qui répondent au centre, et c est le rayon du cercle. De là on tire

$$q=b+\sqrt{[c^2-(p-a)^2]}=\mathrm{F}p;$$

donc

$$\mathrm{F}x=b+\sqrt{[c^2-(x-a)^2]} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'x=-\frac{x-a}{\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}}.$$

Faisons donc

$$\mathrm{F}x=\mathrm{f}x=y \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'x=\mathrm{f}'x=y',$$

et tirons de ces équations les valeurs de a et b, la seconde donne

$$\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}=-\frac{x-a}{y'};$$

d'où l'on tire

$$x-a=\frac{cy'}{\sqrt{(1+y'^2)}};$$

ensuite la première donne

$$y-b=\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}=-\frac{x-a}{y'}=-\frac{c}{\sqrt{(1+y'^2)}};$$

donc

$$a=x-\frac{cy'}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \quad b=y+\frac{c}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

Si on regarde le rayon c comme donné, il ne reste plus d'arbitraires dans l'équation; et l'on en conclura que le cercle donné, dont le centre est déterminé par les coordonnées a et b, est tel qu'on ne pourrait mener entre lui et la courbe aucun autre arc de même rayon, mais placé différemment.

En effet, ayant trouvé ci-dessus

$$\mathrm{F}'x = -\frac{x-a}{\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}},$$

on en déduira

$$\mathrm{F}''x = -\frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

ainsi, on aura l'équation

$$y'' = -\frac{c^2}{[c^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

or, on a déjà trouvé dans le même endroit

$$\sqrt{[c^2-(x-a)^2]} = -\frac{x-a}{y'} = -\frac{c}{\sqrt{(1+y'^2)}};$$

donc on aura

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{c}; \quad \text{et de là} \quad c = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

Substituant cette valeur dans les expressions de a et b, on aura

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad b = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Les trois constantes a, b, c qui entrent dans l'équation générale du cercle étant ainsi déterminées, on en peut conclure qu'aucun autre cercle ne pourra passer entre la courbe proposée et celui qui est déterminé par ces valeurs de a, b, c. En effet, pour qu'une autre courbe quelconque rapportée aux coordonnées r, s, et représentée par l'équation $s = \varphi r$, pût passer entre la courbe et le cercle dont il s'agit, il faudrait que l'on eût

$$\varphi x = \mathrm{f}x = y, \quad \varphi' x = \mathrm{f}'x = y' \quad \text{et} \quad \varphi'' x = \mathrm{f}''x = y'' \quad \text{(art. 4)};$$

or, si cette courbe est un cercle, prenant les quantités g, h, k, à la place de a, b, c, on aura pour φx, $\varphi' x$, $\varphi'' x$ les mêmes expressions que pour $\mathrm{F}x$, $\mathrm{F}'x$, $\mathrm{F}''x$, en substituant seulement dans celles-ci, g, h, k au lieu de a, b, c; donc les trois équations que l'on aura pour la détermination de g, h, k, seront les mêmes que

que celles par lesquelles on a déterminé a, b, c; donc les valeurs de g, h, k seront nécessairement les mêmes que celles de a, b, c; par conséquent le nouveau cercle qui devrait passer entre la courbe et le cercle déjà déterminé, coïncidera avec celui-ci, et n'en formera qu'un avec lui.

Donc ce cercle aura, relativement aux cercles, la même propriété que la tangente à l'égard des lignes droites; ce sera ce que les géomètres appellent *cercle osculateur* ou *cercle de courbure*, parce qu'il sert à mesurer la courbure de la courbe.

La quantité c sera le rayon de ce cercle, qu'on nomme simplement *rayon de courbure*, et les quantités a, b seront les coordonnées de la courbe qui sera le lieu de tous les centres de ces cercles.

Si l'on veut transporter ces formules au calcul différentiel, il n'y aura qu'à substituer $\frac{dy}{dx}$ à la place de y', et $\frac{d^2y}{dx^2}$ à la place de y''.

10. On peut maintenant présenter cette théorie d'une manière plus générale.

Soient x, y les coordonnées de la courbe proposée, qui peut être quelconque, et p, q les coordonnées de la courbe qu'on veut lui comparer, et qui est supposée donnée.

Supposons que l'équation de cette courbe renferme, avec les variables p et q, des constantes indéterminées a, b, c, etc., et représentons-la par

$$F(p, q, a, b, c\ldots) = 0.$$

Si dans cette équation on change p en x, q en y, on a

$$F(x, y, a, b, c\ldots) = 0,$$

équation qui donne la condition nécessaire pour que la courbe donnée ait un point commun avec la courbe proposée.

Dénotons par $F(x, y, a, b, c\ldots)'$ la fonction prime, par $F(x, y, a, b, c\ldots)''$ la fonction seconde, etc. de la fonction $F(x, y, a, b, c\ldots)$, en regardant y comme fonction de x, et a, b, c, etc. comme des constantes.

Cela posé, s'il n'y a que deux constantes indéterminées a et b, et qu'on les détermine par les deux équations

$$F(x,y,a,b)=0,\quad F(x,y,a,b)'=0,$$

alors la courbe donnée, dont l'équation est $F(p,q,a,b)=0$, sera tangente de la courbe proposée, au point où $p=x$.

S'il y a trois constantes indéterminées a, b, c, et qu'on les détermine par les trois équations

$$F(x,y,a,b,c)=0,\quad F(x,y,a,b,c)'=0,\quad F(x,y,a,b,c)''=0,$$

la courbe donnée, dont l'équation est $F(p,q,a,b,c)=0$, sera osculatoire de la courbe proposée; c'est-à-dire, aura même courbure, au point qui répond à l'abscisse $p=x$; et ainsi de suite.

Cela suit immédiatement des principes établis ci-dessus, car l'équation prime $F(x,y,a,b,c\ldots)'=0$, donne la valeur de y' en $x,y,a,b,c\ldots$; l'équation seconde $F(x,y,a,b,c\ldots)''=0$ donne celle de y'' en x,y,y' et $a,b,c\ldots$; et ainsi de suite.

On peut en général appeler *contact du premier ordre* le rapprochement de deux courbes qui se touchent dans un point; *contact du second ordre*, lorsqu'elles ont de plus la même courbure; et ainsi de suite.

On peut appeler aussi les constantes a, b, c, etc. qui déterminent le contact, *élémens du contact.*

Ainsi, le contact d'un ordre quelconque m dépendra de $m+1$ élémens a, b, c, etc.; et la détermination de ces élémens se tirera de l'équation

$$F(x,y,a,b,c\ldots)=0$$

de la courbe donnée qui forme le contact, et des équations dérivées de celle-ci jusqu'à celle de l'ordre $m^{ième}$.

La propriété analytique de ces contacts est donc que, lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'un ordre donné, leurs ordonnées et les fonctions primes, secondes, etc. de ces ordonnées jusqu'à l'ordre du contact, sont les mêmes; et leur propriété géométrique consiste en ce qu'une autre courbe, qui n'aura pas avec

elle un contact du même ordre, ne pourra être menée entre l'une et l'autre (art. 5).

11. La courbe donnée qui forme le contact étant, par exemple, une ligne droite dont l'équation la plus générale est

$$y - a - bx = 0,$$

ne sera susceptible que d'un contact du premier ordre, puisqu'il n'y a que deux élémens a et b; et l'on aura pour la détermination de ces élémens, les deux équations

$$y - a - bx = 0, \quad y' - b = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = y' \quad \text{et} \quad a = y - xy',$$

comme ci-dessus (art. 6).

Prenons pour la courbe du contact un cercle dont l'équation la plus générale est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0,$$

elle ne sera susceptible que d'un contact du second ordre, puisqu'il n'y a que trois élémens a, b, c. On déterminera donc ces élémens par les trois équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0, \quad x - a + (y-b)y' = 0,$$
$$1 + (y-b)y'' + y'^2 = 0,$$

dont la seconde et la troisième sont les équations prime et seconde de la première. De ces équations on tire tout de suite

$$y - b = -\frac{1+y'^2}{y''}, \quad x - a = \frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \quad c = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

comme plus haut (art. 9).

Si on prenait l'équation à la parabole $y = a + bx + cx^2$, qui n'a aussi que trois constantes arbitraires, on aurait de même, pour la détermination de ces constantes, regardées comme élémens d'un contact du second ordre, les équations

$$y - a - bx - cx^2 = 0, \quad y' - b - 2cx = 0, \quad y'' - 2c = 0,$$

lesquelles donnent

$$c=\frac{y''}{2},\quad b=y'-xy'',\quad a=y-xy'+\frac{x^2y''}{2}.$$

Mais si on prenait l'équation à la parabole cubique $y=a+bx+cx^2+dx^3$, elle pourrait avoir un contact du troisième ordre, dont les élémens seraient a, b, c, d, et se détermineraient par les équations

$$y-a-bx-cx^2-dx^3=0,\quad y'-b-2cx-3dx^2=0,$$
$$y''-2c-6dx=0,\quad y'''-6d=0,$$

on aurait ainsi

$$d=\frac{y'''}{6},\quad c=\frac{y''}{2}-\frac{xy'''}{2},\quad b=y'-xy''+\frac{x^2y'''}{2},$$
$$a=y-xy'+\frac{x^2y''}{2}-\frac{x^3y'''}{6}.$$

Et ainsi de suite.

12. Enfin, si on demande la courbe la plus simple qui aura avec une courbe proposée, un contact d'un ordre quelconque m, prenant x et y pour l'abscisse et l'ordonnée de la proposée, p et q pour celles de la courbe cherchée, et regardant y comme fonction de x, q comme fonction de p, on fera

$$q=y+(p-x)y'+\frac{(p-x)^2}{2}y''+\frac{(p-x)^3}{2.3}y'''+\text{etc.},$$

en prenant dans le second membre autant de termes qu'il y a d'unités dans $m+1$.

Car en prenant les fonctions dérivées relativement à p, et faisant $p=x$, on aura $q=y$, $q'=y'$, $q''=y''$, etc. jusqu'à $q^m=y^m$; donc ces deux courbes auront dans le point commun qui répond à $p=x$, les conditions nécessaires pour un contact de l'ordre $m^{ième}$ (art. 10).

La courbe représentée par l'équation précédente, et qui est, comme l'on voit, du genre parabolique, aura ainsi dans le point commun à la courbe proposée, le cours le plus approchant de celui de cette courbe, de manière qu'aucune autre courbe du

même genre ne pourra passer entre ces deux, si elle n'est pas d'un degré plus haut.

13. La théorie que nous venons de donner sur le contact des courbes, n'est qu'une suite de la théorie générale du développement des fonctions, exposée dans la première Partie. Mais nous avons vu (art. 29 et suiv., 1re P.) qu'il y a des cas particuliers où ce développement échappe à la forme générale, et que ces cas sont ceux où une valeur donnée de x rend infinies les fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc. Alors le développement de $f(x+i)$ contiendra nécessairement, pour cette valeur de x, d'autres puissances de i que les simples puissances i, i^2, etc., et l'analyse des articles 3 et 4 se trouvera en défaut. Quoique ces exceptions ne portent aucune atteinte à la théorie générale, il est nécessaire, pour ne rien laisser à desirer, de voir comment elle doit être modifiée dans les cas particuliers dont il s'agit.

Supposons donc qu'en faisant $x=m$, la fonction $f(x+i)$ développée en une série ascendante de i, soit de la forme

$$fm+Ai^{\lambda}+Bi^{\lambda+\mu}+Ci^{\lambda+\mu+\nu}+\text{etc.},$$

μ, ν, etc. étant toujours des nombres positifs.

Je remarque d'abord qu'on peut trouver les coefficiens A, B, C, etc., ainsi que les exposans λ, μ, ν, etc., par une méthode semblable à celle de l'article 3 de la première partie. On fera d'abord

$$f(m+i)=fm+i^{\lambda}P,$$

et on prendra pour i^{λ} la plus haute puissance de i qui divisera $f(m+i)-fm$, après les réductions convenables, de manière que le quotient P ne devienne ni nul, ni infini en faisant $i=0$. Lorsque $m=0$, l'exposant λ pourra être négatif; dans tout autre cas, il sera évidemment toujours positif. On fera ensuite

$$P=A+i^{\mu}Q,$$

A étant la valeur de P lorsque $i=0$, et on prendra pour i^{μ} la

plus haute puissance positive de i, qui divisera $P-A$, de manière que le quotient Q ne devienne ni nul, ni infini lorsque $i=0$. On continuera en supposant

$$Q=B+i^{\mu}R,$$

B étant la valeur de Q lorsque $i=0$, et i^{μ} la plus haute puissance positive de i^{μ} qui divisera $Q-B$, ensorte que le quotient R ne soit ni nul, ni infini lorsque $i=0$; et ainsi de suite. On aura, de cette manière,

$$f(m+i)=fm+i^{\lambda}P=fm+i^{\lambda}A+i^{\lambda+\mu}Q$$
$$=fm+i^{\lambda}A+i^{\lambda+\mu}B+i^{\lambda+\mu+\nu}R=\text{etc.}$$

On a, pour trouver les termes successifs d'une série, des méthodes plus courtes ou d'un calcul plus facile, mais la précédente a l'avantage de ne développer la série qu'autant que l'on veut, et de donner la valeur du reste. Nous n'aurons pas besoin, pour notre objet, de connaître ces restes, il nous suffira de savoir qu'ils peuvent toujours s'exprimer par des quantités de la forme que nous venons de trouver.

Cela posé, considérons la courbe représentée par l'équation $y=fx$, x étant l'abscisse, et y l'ordonnée; supposons qu'elle ait un point commun avec une autre courbe dont l'ordonnée soit Fx, et que ce point réponde à l'abscisse m, ensorte que l'on ait $Fm=fm$. Au-delà de ce point, les ordonnées des deux courbes seront $f(m+i)$, $F(m+i)$ pour une abscisse quelconque $m+i$; et leur différence, que je désignerai par D, sera $f(m+i)-F(m+i)$.

Développons la fonction $F(m+i)$ comme la fonction $f(m+i)$, et soit

$$F(m+i)=Fm+i^{\sigma}p,\quad p=\alpha+i^{\tau}q,\quad q=\beta+i^{\tau'}r,\quad \text{etc.},$$

σ, τ, etc. étant des nombres positifs, et α, β, etc. étant les valeurs de p, q, etc. lorsque $i=0$; on aura d'abord, à cause de $Fm=fm$,

$$D=i^{\lambda}A-i^{\sigma}\alpha+i^{\lambda+\mu}Q-i^{\sigma+\tau}q+\text{etc.}$$

Les deux premiers termes du développement de $f(m+i)$ étant $fm+i^{\lambda}A$, et ceux du développement de $F(m+i)$ étant $Fm+i^{\rho}\alpha$, supposons qu'ils deviennent égaux, ensorte qu'on ait aussi $\rho=\lambda$, et $\alpha=A$; la première de ces deux conditions dépendra de la nature des fonctions désignées par f et F, mais la seconde pourra toujours être remplie comme la condition de $Fm=fm$ par le moyen des constantes arbitraires a, b, c, etc., qui entreront dans la fonction Fx. On aura donc, dans ce cas,

$$D=i^{\lambda+\mu}Q-i^{\rho+\sigma}q+\text{etc.}:$$

et il sera impossible qu'aucune autre courbe passe entre les deux courbes dont il s'agit, dans le même point qui répond à l'abscisse m, à moins que les deux premiers termes du développement de $\varphi(m+i)$, φx étant l'ordonnée de cette autre courbe, ne soient aussi les mêmes que ceux du développement de $f(m+i)$.

Car s'ils sont différens, ils ne pourront pas se détruire dans l'expression de la différence Δ des deux ordonnées $f(m+i)$ et $\varphi(m+i)$, et l'on aura en géneral

$$\Delta=i^{\lambda}A-i^{\rho}\alpha+i^{\lambda+\mu}Q-i^{\rho+\pi}q+\text{etc.}:$$

à cause de $\varphi m=fm$ par la condition supposée de la coïncidence des courbes dans le point qui répond à $x=m$. Cette expression de Δ étant comparée à celle $D=i^{\lambda+\mu}Q-i^{\rho+\sigma}q$, il est facile de voir qu'à cause que les exposans μ, σ, π sont nécessairement positifs par la nature du développement, il sera toujours possible de prendre i assez petit pour que la valeur de Δ surpasse celle de D, abstraction faite des signes, tant qu'on n'aura pas $\rho=\lambda$ et $\alpha=A$, comme dans les deux premières courbes. Donc, dans tout autre cas, la troisième courbe passera nécessairement en dehors des deux autres.

En poussant plus loin le développement des fonctions $f(m+i)$ et $F(m+i)$, on prouvera de la même manière, que si les trois premiers termes du développement de ces fonctions sont les mêmes, aucune autre courbe ne pourra passer entre elles, à moins

qu'elle n'ait aussi les mêmes termes communs avec celles-là ; et ainsi de suite.

On pourra donc appeler aussi, comme dans l'article 10, *contact du premier ordre*, *du second*, etc., le rapprochement de deux courbes pour lesquelles les deux premiers termes, ou les trois premiers, ou, etc. seront les mêmes dans les développemens des fonctions qui représentent les ordonnées.

Ainsi, la courbe dont l'équation est $y = fx$ étant donnée, la courbe la plus simple qui aura avec elle un contact du premier ordre au point où $x = m$, sera représentée par l'équation

$$y = fm + A(x - m)^{\lambda};$$

et celle qui aura un contact du second ordre, le sera par

$$y = fm + A(x - m)^{\lambda} + B(x - m)^{\lambda+\mu};$$

et ainsi de suite. Car en substituant $m + i$ pour x, on aura simplement les deux premiers termes $fm + Ai^{\lambda}$, ou les trois premiers $fm + Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu}$, ou, etc. du développement de $f(m + i)$. Ces courbes auront donc aussi dans le même point le cours le plus approchant de celui de la courbe proposée, et pourront par conséquent servir à en faire connaître les propriétés comme les points singuliers, les points de rebroussement, etc.; sur quoi voyez l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.

14. Supposons maintenant que, dans l'équation $y = fx$ de la courbe proposée, on substitue $\frac{1}{i}$ à la place de x, et qu'on développe la fonction $f\frac{1}{i}$ en une série ascendante de la forme

$$Ai^{\lambda} + Bi^{\lambda+\mu} + Ci^{\lambda+\mu+\nu} + \text{etc.}$$

Si on fait la même chose pour l'équation $y = Fx$ d'une autre courbe, et que les premiers termes du développement de $F\frac{1}{i}$ soient

soient les mêmes que ceux du développement de $f\frac{1}{i}$, on pourra prouver, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait ci-dessus, qu'on pourra toujours prendre i assez petit pour qu'aucune autre courbe, représentée par l'équation $y = \varphi x$, et dont la fonction $\varphi\frac{1}{i}$ developpée de même en série ascendante, n'aurait pas autant de termes identiques avec ceux de ces courbes, ne puisse passer entre ces mêmes courbes dans les points qui répondront à l'abscisse $x = \frac{1}{i}$, et à toutes les abscisses plus grandes à l'infini, puisque dès que la condition qui peut empêcher que cette courbe ne passe entre les deux autres, aura lieu pour une certaine valeur de i, elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs de i plus petites.

D'où l'on peut conclure que la courbe dont l'équation sera simplement

$$y = Ax^{-\lambda}, \text{ ou } y = Ax^{-\lambda} + Bx^{-\lambda-\mu}, \text{ ou etc.}$$

ira en s'approchant continuellement de la courbe proposée, à mesure que les abscisses x deviendront plus grandes, mais sans pouvoir jamais l'atteindre, de manière qu'elle parviendra à un terme passé lequel aucune autre courbe du même genre parabolique ou hyperbolique, qui ne sera pas d'un degré plus haut, ne pourra passer entre les deux courbes. Cette seconde courbe sera donc une assymptote de la première; et cette idée de l'assymptote me paraît la plus simple et la plus générale qu'on en puisse donner, en même temps qu'elle est aussi la plus propre à caractériser la nature du rapprochement qui constitue le vrai assymptotisme.

CHAPITRE III.

Problèmes directs et inverses sur le contact des courbes. Analyse des cas où l'on propose une relation entre les deux élémens du contact du premier ordre. De la courbe représentée par l'équation primitive singulière d'une équation du premier ordre.

15. Les problèmes qu'on peut proposer sur les tangentes, les rayons de courbure, etc., et en général sur les contacts des courbes, sont de deux sortes, directs ou inverses. Les problèmes directs se réduisent toujours à trouver quelques-uns des élémens du contact d'un certain ordre; et comme ils ne dépendent que de l'analyse directe des fonctions, ils sont toujours résolubles analytiquement. Dans les problèmes inverses, on suppose qu'il y a une relation donnée entre quelques-uns de ces élémens et les coordonnées x, y, avec les fonctions dérivées y', y'', etc.; et cette relation, en y substituant les expressions générales des élémens en x, y, y', y'', etc., devient une équation dérivée d'un certain ordre, dont il faut trouver l'équation primitive pour avoir celle de la courbe cherchée en x et y. Ces problèmes conduisent donc immédiatement à des équations dérivées, et leur solution dépendant essentiellement de l'analyse inverse des fonctions, se trouve sujette à toutes les difficultés de cette analyse.

Il y a cependant des cas où l'on peut les résoudre directement par des considérations particulières, qui méritent d'autant plus d'attention, qu'elles tiennent à des finesses d'analyse qu'il est intéressant de connaître.

Ces cas sont ceux où la relation donnée n'est qu'entre les élémens mêmes du contact, sans que les coordonnées x, y, y entrent.

Pour donner d'abord, par un exemple, une idée de ces sortes de problèmes, supposons qu'on demande la courbe dont chaque tangente coupera deux ordonnées (prolongées s'il est nécessaire) répondant aux abscisses données $x=m$ et $x=n$, de manière que le produit des parties de ces ordonnées comprises entre la même tangente et l'axe des abscisses, soit toujours constant et égal à K.

Puisque l'équation à la tangente est

$$q=a+bp \text{ (art. 6)},$$

en faisant successivement $p=m$ et $p=n$, on aura les deux valeurs de q, dont le produit devra être égal à K; on aura donc entre les élémens du contact a et b, l'équation

$$(a+mb)(a+nb)=\mathrm{K}.$$

La marche naturelle et directe serait donc de substituer à la place de a et b, leurs valeurs $y-xy'$ et y' (art. cité), on aurait alors cette équation du premier ordre

$$[y+(m-x)y'][y+(n-x)y']=\mathrm{K},$$

dont il ne serait pas aisé de trouver l'équation primitive par les méthodes ordinaires.

Mais si on prend les fonctions primes de cette équation, il vient celle-ci,

$$[y+(n-x)y'](m-x)y''+[y+(m-x)y'](n-x)y''=0,$$

dont tous les termes se trouvent multipliés par y''; de sorte qu'elle peut se décomposer dans ces deux

$$y''=0 \quad \text{et} \quad [y+(n-x)y'](m-x)+[y+(m-x)y'](n-x)=0.$$

La première, qui est du second ordre, donne sur-le-champ celle-ci du premier

$$y'=\mathrm{A},$$

où A est une constante arbitraire ; ainsi par les principes établis dans l'article 46 et suivans, de la 1ère Partie, on aura l'équation primitive complète de la proposée, en y substituant simplement cette valeur de y'.

Cette équation sera donc de la forme

$$(y - Ax + mA)(y - Ax + nA) = K ;$$

savoir, en développant les termes

$$(y - Ax)^2 + (y - Ax)(m + n)A + mnA^2 - K = 0 ;$$

d'où, en extrayant la racine, on tire

$$y = Ax + B ,$$

en prenant pour B la racine de l'équation

$$B^2 + (m + n)AB + mnA^2 - K = 0.$$

D'où l'on voit que l'on n'a de cette manière, qu'une équation à la ligne droite.

En effet, l'équation $y'' = 0$ ayant donné $y' = A$, celle-ci donnera l'équation primitive

$$y = Ax + B ,$$

A et B étant deux constantes arbitraires ; mais par la théorie des articles cités ci-dessus, ces deux constantes ne peuvent pas être arbitraires à la fois ; car il faut que l'équation trouvée coïncide avec la proposée, pour une valeur de x ; or, faisant $x = 0$, on a

$$y = B , \quad y' = A ;$$

donc on aura entre A et B cette équation de condition

$$(B + mA)(B + nA) = K ,$$

qui est la même que celle que nous avons trouvée ci-dessus, pour la détermination de B en A.

Venons maintenant à l'autre équation qui n'est que du premier ordre. Celle-ci servira également à trouver une équation primitive

de la proposée par l'élimination de y'. En effet, elle donne

$$y' = \frac{(2x - m - n)\,y}{2(m-x)(n-x)};$$

valeur qui étant substituée dans la proposée, la réduira à celle-ci,

$$y^2 + \frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0,$$

équation à l'ellipse ou à l'hyperbole, suivant que K sera une quantité positive ou négative. Le grand axe sera $m-n$, le petit axe $\sqrt{K}$, et les deux sommets seront aux points où $x = m$ et où $x = n$.

La propriété des tangentes qui nous a conduits à cette équation, est démontrée dans la proposition XLIIme du troisième livre des coniques d'*Apollonius*; mais l'analyse précédente a l'avantage de faire voir que cette propriété appartient uniquement aux sections coniques.

16. Si on examine maintenant les deux solutions qu'on vient de trouver, il est facile de voir que la première ne donne que la ligne droite même qu'on a supposée tangente, en regardant les deux élémens a et b comme constans; car l'équation $y = Ax + B$ ne diffère point de l'équation $q = a + bp$ de cette tangente, l'équation entre les deux constantes A et B étant évidemment la même que celle que l'on a supposée entre les quantités b et a.

En effet, il est visible que toute droite peut résoudre le problème, pourvu qu'il y ait entre ses deux constantes, la relation donnée par les conditions du problème; et comme il reste une constante arbitraire, il s'ensuit que l'équation de cette droite doit être l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre donnée par le problème. Donc, analytiquement parlant, le problème est résolu complètement par l'équation même $y = a + bx$, a et b étant deux constantes, dont l'une est arbitraire, et l'autre en dépend par l'équation

$$(a + mb)(a + nb) = K.$$

A l'égard de la seconde solution, comme elle ne contient point

de constante arbitraire, elle est à la rigueur moins générale que la première, et ne peut être qu'un cas particulier de celle-ci, ou bien une solution singulière provenant de la considération que nous avons développée dans l'article 60 de la première Partie.

Il est d'abord facile de se convaincre que cette dernière solution ne peut être un cas particulier de la première ; car il faudrait pour cela que l'équation $y=a+bx$ de la première, pût satisfaire à l'équation $y^2+\frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2}=0$ de la seconde, en déterminant convenablement sa constante arbitraire, et par conséquent, qu'en éliminant y de ces deux équations, la résultante ne contînt plus que des constantes, ce qui n'est pas.

Elle ne peut donc être qu'une solution singulière ; et en effet, nous avons vu (1ère Partie, art. 59) que le caractère de l'équation primitive singulière de toute équation du premier ordre de la forme $y'=F(x,y)$ est de rendre infinie la fonction $F'(y)$, c'est-à-dire, la fonction prime de $F(x,y)$ prise relativement à y seul. Or, l'équation de notre problème

$$[y+(m-x)y'][y+(n-x)y']=K,$$

étant mise sous la forme précédente, donne

$$F(x,y)=\frac{y(2x-m-n)+\sqrt{4K(m-x)(n-x)+(m-n)^2y^2}}{2(m-x)(n-x)},$$

d'où l'on tire

$$F'(y)=\frac{(m-n)^2y+(2x-m-n)\sqrt{4K(m-x)(n-x)+(m-n)^2y^2}}{2(m-x)\times(n-x)\sqrt{[4K(m-x)\times(n-x)+(m-n)^2y^2]}},$$

où l'on voit que $F'(y)$ devient infini par l'équation

$$4K(m-x)(n-x)+(m-n)^2y^2=0,$$

qui est celle de la seconde solution.

17. En examinant la manière dont nous sommes parvenus à cette solution, on verra qu'elle dépend de cette circonstance, que

les fonctions primes de a et b regardés comme fonctions de x, y, y', sont entre elles dans un rapport qui ne contient pas la fonction seconde y''; en effet, ayant $b=y'$ et $a=y-xy'$, on a

$$b'=y'' \quad \text{et} \quad a'=-xy'',$$

ce qui donne

$$\frac{a'}{b'}=-x;$$

de sorte que prenant la fonction prime de l'équation

$$(a+mb)(a+nb)=\mathrm{K},$$

et divisant par b', on a une équation qui est également du premier ordre, et le résultat de l'élimination de y' entre ces deux équations, donne l'équation aux sections coniques trouvées plus haut. Or, je considère que les quantités a et b sont données par les équations

$$y=a+bx \quad \text{et} \quad y'=b \quad (\text{art. } 11).$$

Ainsi l'équation dont il s'agit, est le résultat de l'élimination de a, b et y' entre les équations

$$y=a+bx, \quad y'=b, \quad (a+mb)(a+nb)=\mathrm{K},$$

et l'équation prime de cette dernière divisée par b'. On obtiendra donc aussi le même résultat, en éliminant d'abord une des deux quantités a ou b entre les deux équations

$$y=a+bx \quad \text{et} \quad (a+mb)(a+nb)=\mathrm{K},$$

et ensuite éliminant l'autre par le moyen de l'équation résultante et de son équation prime prise en faisant varier cette dernière quantité. Ainsi éliminant d'abord a, on a l'équation

$$[y+(m-x)b][y+(n-x)b]=\mathrm{K}.$$

Prenant l'équation prime relativement à b, et divisant par b', on a

$$[y+(m-x)b](n-x)+[y+(n-x)b](m-x)=0,$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{(2x - m - n)y}{2(m-x)(n-x)},$$

valeur qui, substituée dans l'autre équation, donnera comme ci-dessus l'équation

$$(m-n)^2y^2 + 4K(m-x)(n-x) = 0,$$

qui renferme la seconde solution.

On peut encore considérer que l'équation $(a+mb)(a+nb)=K$ qui contient la relation entre a et b, dans laquelle consiste la condition du problème, donne, par la résolution, $a = fb$, valeur qui étant substituée dans l'équation $y = a + bx$, la réduit à celle-ci $y = fb + bx$, qui ne contient plus que la constante arbitraire b, qu'on éliminera par l'équation prime prise relativement à b, savoir, $f'b + x = 0$, ce qui donnera encore le même résultat. Or, par ce qu'on a vu ci-dessus, l'équation $y = fb + bx$ est l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre donnée par le problème; donc l'équation résultante de l'élimination de b entre celle-ci et l'équation $f'b + x = 0$, sera précisément l'équation primitive singulière, d'après la théorie de l'article 60 de la 1ère Partie.

D'un autre côté, comme l'équation $y = fb + bx$ est l'équation générale des tangentes de la courbe cherchée (art. 15), on en peut conclure que pour avoir l'équation de cette courbe, il n'y a qu'à regarder la constante arbitraire b qui différentie les tangentes, comme variable, et la déterminer par la condition que l'équation prime relative à cette seule variable, ait lieu en même temps. Et de là on voit aussi que l'équation primitive singulière que nous avons trouvée pour l'équation du premier ordre donnée par le problème, n'est autre chose que l'équation de la courbe formée par l'intersection continuelle des droites représentées par l'équation primitive complète de la même équation du premier ordre.

18. Après avoir ainsi éclairci la matière par un exemple, nous allons la traiter d'une manière générale. Soit, comme dans l'article 10, $F(x, y, a, b) = 0$ l'équation de la courbe du contact, que

que nous avons supposée ci-dessus une ligne droite, et soit $\varphi(a, b)=0$ l'équation qui détermine la relation entre les deux élémens a et b, donnée par la nature du problème proposé; suivant la théorie donnée dans ce même article, il faudra déterminer a et b par les deux équations

$$F(x, y, a, b)=0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a, b)'=0.$$

Or, nous avons vu dans la première Partie (art. 46) que si on élimine a et b des trois équations

$$F(x, y, a, b)=0, \quad F(x, y, a, b)'=0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a, b)''=0,$$

on a une équation du second ordre entre x, y, y' et y'', que nous désignerons par $V=0$, et dont $F(x, y, a, b)=0$ sera l'équation primitive complète, a et b étant les constantes arbitraires; nous y avons vu aussi que si on élimine a ou b des deux premières, les deux résultantes seront des équations primitives du premier ordre de la même équation $V=0$, et dont celle-ci sera le résultat, en prenant de nouveau les fonctions primes et éliminant la constante qui y était restée (art. 47). Donc, si de ces deux premières équations on tire les valeurs de a et b, que nous désignerons par P et Q, ensorte que l'on ait $a=P$, $b=Q$, P et Q étant des fonctions de x, y et y'; qu'ensuite on prenne les fonctions primes de ces équations, en y regardant toujours a et b comme constantes, on aura les équations du second ordre $P'=0$, $Q'=0$, qui devront coïncider avec l'équation $V=0$; de sorte qu'on aura nécessairement

$$P'=MV, \quad Q'=NV,$$

M et N étant des fonctions de x, y et y' sans y''; car si, par exemple, M contenait encore y'', alors l'équation $P'=0$ donnerait, outre $V=0$, cette autre équation du second ordre $M=0$, qui ne serait pas comprise dans la même équation $V=0$; ce qui ne se peut.

Substituant donc ces valeurs de a et b dans l'équation du problème $\varphi(a, b)=0$, on aura

$$\varphi(P, Q)=0;$$

prenant ensuite l'équation prime, on aura

$$P'\varphi'(P)+Q'\varphi'(Q)=0,$$

en dénotant par $\varphi'(P)$ et $\varphi'(Q)$ les fonctions primes de $\varphi(P, Q)$ prises relativement à P et Q isolés; donc mettant pour P' et Q' les expressions ci-dessus, cette dernière équation deviendra

$$V[M\varphi'(P)+N\varphi'(Q)]=0,$$

laquelle se décompose naturellement en ces deux-ci,

$$V=0 \quad \text{et} \quad M\varphi'(P)+N\varphi'(Q)=0.$$

La première $V=0$, sera du second ordre et aura pour équation primitive complète,

$$F(x, y, a, b)=0,$$

c'est-à-dire l'équation même de la courbe du contact, dans laquelle une seule des deux constantes a et b sera arbitraire, l'autre étant déterminée par l'équation même du problème $\varphi(a, b)=0$.

L'autre équation $M\varphi'(P)+N\varphi'(Q)=0$ ne sera que du premier ordre et sans constante arbitraire; mais étant combinée avec l'équation $\varphi(P, Q)=0$, elle donnera, par l'élimination de y', une équation entre x et y qui sera l'équation primitive singulière de cette dernière $\varphi(P, Q)=0$.

Cette équation sera donc le résultat de l'élimination des quantités a, b et y' entre les quatre équations

$$F(x,y,a,b)=0,\ F(x,y,a,b)'=0,\ \varphi(a,b)=0 \text{ et } M\varphi'(a)+N\varphi'(b)=0.$$

Or, en regardant a et b comme des fonctions de x et y, les équations $a=P$, $b=Q$ résultant des deux premières, donnent ces deux équations primes

$$a'=P'=MV \quad \text{et} \quad b'=Q'=NV',$$

donc

$$\frac{N}{M}=\frac{b'}{a'};$$

de sorte que la dernière équation se réduira à celle-ci

$$\varphi'(a) + \frac{b'\varphi'(b)}{a'} = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation prime de $\varphi(a, b) = 0$, divisée par a'. D'un autre côté, dans la supposition de a et b variables, il est évident que la fonction prime de $F(x, y, a, b)$ n'est pas simplement $F(x, y, a, b)'$, mais qu'il y faut ajouter les termes dus à la variation de a et b, qui sont $a'F'(a) + b'F'(b)$, en désignant par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, a, b)$ prises relativement à a et à b regardés comme seules variables. Donc prenant les fonctions primes de l'équation $F(x, y, a, b) = 0$, on aura

$$F(x, y, a, b)' + a'F'(a) + b'F'(b) = 0;$$

mais on a déjà l'équation

$$F(x, y, a, b)' = 0;$$

on aura donc nécessairement, dans la supposition de a et b variables, l'équation

$$a'F'(a) + b'F'(b) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{b'}{a'} = -\frac{F'(a)}{F'(b)},$$

c'est la valeur de $\frac{N}{M}$, qu'on peut trouver directement de cette manière, et qu'on voit clairement ne pouvoir être une fonction du premier ordre, puisqu'elle ne contient que les quantités x, y et a, b.

Donc l'équation dont il s'agit sera, en dernière analyse, le résultat de l'élimination de a, b, et $\frac{b'}{a'}$ entre les quatre équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(a, b) = 0,$$
$$F'(a) + \frac{b'}{a'}F'(b) = 0, \quad \varphi'(a) + \frac{b'}{a'}\varphi'(b) = 0,$$

dont les deux dernières sont les fonctions primes des deux pre-

mières, prises relativement à a et b, et divisées par a'; l'équation $F(x, y, a, b) = 0$ n'est plus nécessaire ici; et se trouve remplacée par l'équation $F'(a) + \frac{b'}{a'} F'(b) = 0$, qui en est une suite. Donc, si on réduit d'abord les deux premières en une seule par l'élimination de b, il ne s'agira plus que de prendre l'équation prime de celle-ci relativement à a seul, et d'éliminer ensuite a par le moyen de ces deux, le résultat sera nécessairement le même qu'auparavant.

Si donc on tire de l'équation $\varphi(a, b) = 0$, donnée par les conditions du problème entre les élémens du contact a, b, la valeur de b en a, et qu'on suppose $b = \downarrow a$ ($\downarrow$ étant aussi la caractéristique d'une fonction), qu'on substitue cette valeur dans l'équation $F(x, y, a, b) = 0$ de la courbe du contact, qu'ensuite on prenne la fonction prime de $F(x, y, a, \downarrow a)$ relativement à a seul, fonction que nous désignerons par $a'F'(a, \downarrow a)$, a' étant la fonction prime de a regardé comme fonction de x, on aura ces deux équations

$$F(x, y, a, \downarrow a) = 0 \quad \text{et} \quad F'(a, \downarrow a) = 0,$$

d'où il faudra éliminer a; et il est visible que le résultat ne sera autre chose que l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre, dont $F(x, y, a, \downarrow a) = 0$ sera l'équation primitive complète (art. 60, première Partie).

La courbe représentée par cette équation singulière, sera proprement celle qui résout le problème, et qui aura la propriété d'être touchée dans chaque point par une des courbes représentées par l'équation

$$F(x, y, a, \downarrow a) = 0,$$

a étant constant pour la même courbe, mais variable d'une courbe à l'autre.

19. La manière dont nous sommes parvenus à cette dernière solution, est la plus directe, analytiquement parlant; mais on y peut parvenir plus simplement par la considération suivante. Puisque le problème consiste à trouver la courbe qui aura, dans chaque point, un contact du premier ordre avec la courbe représentée

par l'équation

$$F(x, y, a, \downarrow a) = 0,$$

a étant un paramètre indéterminé, il s'ensuit (art. 10) que l'équation de la courbe cherchée doit donner pour y et pour y' des fonctions de x de la même forme que celles qui résultent des équations

$$F(x, y, a, \downarrow a) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a, \downarrow a)' = 0,$$

en désignant par $F(x, y, a, \downarrow a)'$ la fonction prime de $F(x, y, a, \downarrow a)$ relative à x et y. Or, a étant une quantité indéterminée, on peut la supposer telle que la courbe cherchée soit représentée par la même équation

$$F(x, y, a, \downarrow a) = 0,$$

pourvu que l'équation prime de celle-ci soit aussi de la même forme

$$F(x, y, a, \downarrow a)' = 0.$$

Mais si a est une quantité variable, la fonction prime complète de $F(x, y, a, \downarrow a)$ sera, comme nous l'avons vu ci-dessus,

$$F'(x, y, a, \downarrow a)' + a'F'(a, \downarrow a).$$

Donc la condition dont il s'agit sera remplie si on détermine a par l'équation

$$F'(a, \downarrow a) = 0;$$

ce qui donnera la dernière solution que nous venons de trouver.

Toute équation entre x, y et un paramètre indéterminé a, que nous dénoterons, pour plus de simplicité, par $f(x, y, a) = 0$, représente, en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles, une famille d'une infinité de courbes qui varient de forme ou de position, ou de l'une et de l'autre à la fois, à raison des variations du paramètre; et si on élimine ce paramètre par le moyen des fonctions primes, l'équation résultante du premier ordre appartiendra à toute cette famille de courbes. Elle appartiendra donc aussi à la courbe formée par toutes ces courbes, et qui les enveloppera, ayant avec chacune d'elles un contact du

premier ordre. La même équation $f(x, y, a) = 0$, ainsi que son équation prime $f(x, y, a)' = 0$, prise relativement à x et y seuls, devront donc avoir lieu aussi pour chaque point de cette courbe enveloppante, en regardant le paramètre a comme une quantité variable. Or, dans cette hypothèse, la fonction prime complète de $f(x, y, a)$ est $f(x, y, a)' + a'f'(a)$, en dénotant par $f'(a)$ la fonction prime de $f(x, y, a)$ prise relativement à a seul, et par a' la fonction prime de a, regardée comme une fonction quelconque de x; donc il faudra que la valeur de a soit telle que l'on ait $f'(a) = 0$, ce qui donnera l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre qui répond à l'équation

$$f(x, y, a) = 0,$$

dans laquelle a est regardée comme une constante arbitraire (art 60, première Partie).

D'où l'on peut conclure, en général, que l'équation primitive singulière d'une équation du premier ordre, représente toujours la courbe enveloppante de toutes les courbes qui peuvent être représentées par son équation primitive complète, en donnant à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles.

CHAPITRE IV.

Des contacts du second ordre. Théorie et construction des équations primitives singulières dans les ordres supérieurs. Exemple contenant la théorie analytique des développées.

20. Considérons maintenant les contacts du second ordre, et prenant $F(x,y,a,b,c)=0$ pour l'équation de la courbe du contact, supposons qu'il y ait entre les trois élémens a, b, c la relation donnée par l'équation $\varphi(a,b,c)=0$. Comme les valeurs de ces élémens doivent se tirer des trois équations

$$F(x,y,a,b,c)=0,\ F(x,y,a,b,c)'=0,\ F(x,y,a,b,c)''=0 \text{ (art. 10)},$$

si on désigne ces valeurs par P, Q, R, l'équation du problème sera

$$\varphi(P,Q,R)=0,$$

qu'on voit être du second ordre. Les trois équations $a=P$, $b=Q$, $c=R$ donneront, en prenant les fonctions primes dans la supposition de a, b, c constantes, la même équation $V=0$ du troisième ordre, qui sera le résultat de l'élimination de a, b, c, au moyen des trois équations précédentes, combinées avec l'équation tierce

$$F(x,y,a,b,c)'''=0 \quad \text{(art. 46, première Partie)};$$

par conséquent on aura nécessairement

$$P'=MV,\quad Q'=NV,\quad R'=LV,$$

M, N, L étant des fonctions de x, y, y' et y'' sans y'''; de sorte qu'en prenant les fonctions primes de l'équation $\varphi(P,Q,R)=0$, on aura

$$P'\varphi'(P)+Q'\varphi'(Q)+R'\varphi'(R)=0;$$

savoir :

$$V[M\varphi'(P)+N\varphi'(Q)+L\varphi'(R)]=0,$$

équation qui se partage naturellement dans ces deux-ci,

$$V=0 \quad \text{et} \quad M\varphi'(P)+N\varphi'(Q)+L\varphi'(R)=0,$$

dont la première est du troisième ordre, et dont la seconde n'est que du second.

L'équation $V=0$ a, comme nous l'avons déjà vu, pour équation primitive complète, l'équation même

$$F(x,y,a,b,c)=0$$

de la courbe du contact, dans laquelle a, b, c sont les trois constantes arbitraires; mais comme l'équation du problème $\varphi(P,Q,R)=0$ n'est que du second ordre, il doit y avoir une relation entre ces trois constantes, qui les réduise à deux arbitraires; et cette relation est donnée par l'équation $\varphi(a,b,c)=0$ qui résulte de la précédente, en substituant les valeurs de P, Q, R, tirées des équations $a=P$, $b=Q$, $c=R$.

L'autre équation étant du second ordre, on pourra, par son moyen, éliminer la fonction y'' de l'équation $\varphi(P,Q,R)=0$, et la résultante sera une équation primitive de celle-ci du premier ordre, mais qui ne contiendra point de constante arbitraire. Cette équation sera donc le résultat de l'élimination des quantités a, b, c et y'', au moyen des équations

$$F(x,y,a,b,c)=0, \quad F(x,y,a,b,c)'=0, \quad F(x,y,a,b,c)''=0,$$
$$\varphi(a,b,c)=0 \quad \text{et} \quad M\varphi'(a)+N\varphi'(b)+L\varphi'(c)=0.$$

Or, en regardant a, b, c comme des fonctions de x, y, la fonction prime de $F(x,y,a,b,c)$ sera

$$F(x,y,a,b,c)'+a'F'(a)+b'F'(b)+c'F'(c),$$

en dénotant simplement par $F'(a)$, $F'(b)$, $F'(c)$ les fonctions primes de $F(x,y,a,b,c)$ prises relativement à a, b, c, regardées comme seules variables; donc les deux équations

$$F(x,y,a,b,c)=0 \quad \text{et} \quad F(x,y,a,b,c)'=0$$

emporteront

emporteront celle-ci

$$a'\mathrm{F}'(a) + b'\mathrm{F}'(b) + c'\mathrm{F}'(c') = 0.$$

De plus, la fonction prime de $\mathrm{F}(x, y, a, b, c)'$ sera, par la même raison,

$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c)'' + a'\mathrm{F}'(a)' + b'\mathrm{F}'(b)' + c'\mathrm{F}'(c)',$$

en dénotant de même par $\mathrm{F}'(a)', \mathrm{F}'(b)', \mathrm{F}'(c)'$ les fonctions primes de $\mathrm{F}(x, y, a, b, c)'$, prises relativement à a, b, c, regardées comme seules variables; et comme dans la formation de ces fonctions dérivées on regarde les quantités a, b, c comme indépendantes de x et y, il est aisé de prouver, par les principes établis dans la première Partie (art. 74), que les fonctions $\mathrm{F}'(a)'$, $\mathrm{F}'(b)'$, $\mathrm{F}'(c)'$ seront la même chose que les fonctions primes des fonctions $\mathrm{F}'(a)$, $\mathrm{F}'(b)$, $\mathrm{F}'(c)$, prises relativement à x et y. Donc les deux équations

$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c)' = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x, y, a, b, c)'' = 0$$

emporteront encore nécessairement cette autre-ci

$$a'\mathrm{F}'(a)' + b'\mathrm{F}'(b)' + c'\mathrm{F}'(c)' = 0.$$

Si donc on combine les deux équations

$$\mathrm{F}'(a) + \frac{b'}{a'}\mathrm{F}'(b) + \frac{c'}{a'}\mathrm{F}'(c) = 0,$$

$$\mathrm{F}'(a)' + \frac{b'}{a'}\mathrm{F}'(b)' + \frac{c'}{a'}\mathrm{F}'(c)' = 0$$

avec l'équation

$$\varphi'(a) + \frac{b'}{a'}\varphi'(b) + \frac{c'}{a'}\varphi'(c) = 0,$$

qui résulte de $\varphi(a, b, c) = 0$, en prenant les fonctions primes, on aura, par l'élimination des quantités $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{c'}{a'}$, une équation en a, b, c et x, y, y' sans y'', laquelle sera équivalente à celle qu'on aurait déduite des deux équations

$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c)'' = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{M}\varphi'(a) + \mathrm{N}\varphi'(b) + \mathrm{L}\varphi'(c) = 0,$$

par l'élimination de y''. Ainsi, il n'y aura plus qu'à éliminer a, b, c au moyen des équations

$$F(x,y,a,b,c)=0, \quad F(x,y,a,b,c)'=0 \quad \text{et} \quad \varphi(a,b,c)=0;$$

et le résultat final sera la même équation primitive du premier ordre de l'équation

$$\varphi(P,Q,R)=0,$$

laquelle ne contenant point, par sa nature, de constantes arbitraires, ne pourra être qu'une équation primitive singulière.

En effet, si pour simplifier la solution on commence par tirer la valeur c de l'équation $\varphi(a,b,c)=0$, et qu'on la représente par $\downarrow(a,b)$, alors la solution se réduira à éliminer a, b et $\frac{b'}{a'}$ entre les deux équations

$$F[x,y,a,b,\downarrow(a,b)]=0, \quad F[x,y,a,b,\downarrow(a,b)]'=0,$$

et les deux équations primes de celles-ci, prises relativement à a et b seuls et divisées par a', procédé analogue à celui de l'article 18.

21. En général, si l'on a une équation en x, y et deux constantes arbitraires a et b, que nous représenterons par $f(x,y,a,b)=0$; en éliminant ces deux constantes par le moyen des deux équations dérivées $f(x,y,a,b)'=0$ et $f(x,y,a,b)''=0$, on aura une équation du second ordre $V=0$, qui appartiendra à toutes les courbes représentées par l'équation

$$f(x,y,a,b)=0,$$

en donnant à a et b des valeurs quelconques, et dont par conséquent celle-ci sera l'équation primitive complète.

Donc elle appartiendra aussi à la courbe, ou aux courbes formées par toutes ces courbes, et qui les envelopperont de manière qu'elles aient avec chacune d'elles un contact du second ordre,

c'est-à-dire dans lequel les y, y' et y'' soient les mêmes. Mais les quantités a et b étant constantes dans chaque courbe enveloppée, et variables dans les courbes enveloppantes, pour que les y, y' et y'' soient les mêmes dans les deux hypothèses, il faudra que les équations d'où elles dépendent soient aussi les mêmes. Or, dans la supposition de a et b variables, l'équation $f(x, y, a, b)=0$ donne l'équation prime

$$f(x, y, a, b)' + a'f'(a) + b'f'(b) = 0;$$

donc, pour que cette équation se réduise à

$$f(x, y, a, b)' = 0,$$

comme dans le cas de a et b constantes, il faudra que l'on ait

$$a'f'(a) + b'f'(b) = 0.$$

De la même manière, l'équation $f(x, y, a, b)' = 0$ donne, dans le cas de a et b variables, cette équation dérivée

$$f(x, y, a, b)'' + a'f'(a)' + b'f'(b)' = 0;$$

laquelle ne peut se réduire à $f(x, y, a, b)'' = 0$, comme dans le cas de a et b constantes, qu'en supposant

$$a'f'(a)' + b'f'(b)' = 0.$$

Ayant ainsi les quatre équations

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad f(x, y, a, b)' = 0,$$
$$f'(a) + \frac{b'}{a'} f'(b) = 0 \quad \text{et} \quad f'(a)' + \frac{b'}{a'} f'(b)' = 0,$$

il n'y aura qu'à éliminer a, b et $\frac{b'}{a'}$, et l'on aura une équation du premier ordre entre x, y et y', qui sera celle des courbes enveloppantes, et qui sera en même temps l'équation primitive singulière de la même équation $V = 0$.

On voit par là comment la théorie des équations primitives singulières peut s'étendre au second ordre et aux ordres supérieurs.

On voit en même temps que ces équations représentent toujours des courbes enveloppantes, et qui ont des contacts d'un ordre donné avec les courbes enveloppées, représentées par les équations primitives complètes, dans lesquelles les constantes arbitraires varient d'une courbe à l'autre. Ceci peut servir de supplément et de complément à la théorie des équations primitives exposée dans la première Partie (art. 60).

Au reste, de même que les quatre équations ci-dessus

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad f(x, y, a, b)' = 0,$$
$$f'(a) + \frac{b'}{a'} f'(b) = 0, \quad f'(a)' + \frac{b'}{a'} f'(b)' = 0,$$

donnent, par l'élimination de a, b et $\frac{b'}{a'}$, une équation du premier ordre en x, y et y', ces équations donneront également, par l'élimination de ces trois dernières quantités, une équation en a, b et $\frac{b'}{a'}$, qui renfermera les relations que doivent avoir entre elles les deux variables a et b; d'où l'on voit que ces quantités qui sont indépendantes entre elles dans chacune des courbes enveloppées, ne le sont plus lorsqu'elles se rapportent à la courbe enveloppante. On trouvera des résultats semblables pour les équations et les courbes des ordres supérieurs.

22. Supposons qu'on demande la courbe qui aura dans chacun de ses points un contact du second ordre avec un cercle représenté par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$

et dont les élémens du contact a, b, c aient entre eux la relation déterminée par l'équation

$$\Phi(a, b, c) = 0.$$

La marche naturelle pour résoudre ce problème, serait de substituer dans cette équation, les valeurs des élémens a, b, c trouvés plus haut (art. 11), ce qui donnerait une équation du second ordre, d'où il faudrait remonter à l'équation primitive.

Mais, sans chercher cette équation du second ordre, on peut d'abord conclure de ce que nous venons de démontrer, que l'on aura son équation primitive complète, en supposant les quantités a, b, c constantes, ce qui redonnera la même équation au cercle. On en conclura ensuite que la même équation admettra aussi une équation primitive singulière du premier ordre, qu'on obtiendra en faisant varier les quantités a, b, c, de manière que les équations primes et secondes de l'équation au cercle soient les mêmes que si ces quantités étaient regardées comme constantes; et que cette équation primitive représentera alors la courbe ou les courbes formées par la réunion de tous les cercles représentés par la même équation, c'est-à-dire, qui envelopperont ou embrasseront tous ces cercles.

Cette équation sera donc, par les principes établis ci-dessus, le résultat de l'élimination des quantités a, b, c et $\frac{b'}{a'}$, $\frac{c'}{a'}$, entre les trois équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2, \quad x-a+y'(y-b)=0, \quad \varphi(a,b,c)=0,$$

et les équations primes de celles-ci, prises relativement aux seules variables a, b, c; savoir,

$$x-a+\frac{b'}{a'}(y-b)=\frac{cc'}{a'}, \quad 1+\frac{b'}{a'}y'=0,$$
$$\varphi'(a)+\frac{b'}{a'}\varphi'(b)+\frac{c'}{a'}\varphi'(c)=0.$$

Mais comme cette équation en x et y pourrait se présenter sous une forme assez compliquée, il sera plus simple de chercher à déterminer les valeurs mêmes de x et y par une troisième variable.

Pour cela, on éliminera d'abord y', au moyen des deux équations

$$x-a+y'(y-b)=0 \quad \text{et} \quad 1+\frac{b'}{a'}y'=0,$$

on aura celle-ci,

$$x-a-\frac{a'(y-b)}{b'}=0,$$

qui étant combinée avec la première

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,$$

donnera sur-le-champ

$$x=a+\frac{ca'}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}},\quad y=b+\frac{cb'}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}.$$

De plus, si on substitue ces mêmes valeurs de x et y dans l'équation

$$x-a+\frac{b'}{a'}(y-b)=\frac{cc'}{a'};$$

on aura celle-ci

$$c'=\sqrt{(a'^2+b'^2)},$$

laquelle étant combinée avec l'équation $\varphi(a,b,c)=0$ donnée par le problème, servira à déterminer deux des trois variables a, b, c par la troisième, moyennant quoi, les valeurs de x et y seront aussi exprimées par cette seule variable.

23. Comme les quantités a et b sont les coordonnées de la courbe qui est le lieu de tous les centres des cercles osculateurs (art. 9), si on suppose cette courbe donnée, on aura une équation entre a et b, par laquelle on pourra déterminer b en a. Soit donc $b=\varphi a$, on aura

$$b'=a'\varphi' a,\quad \text{et de là}\quad c'=a'\sqrt{[1+(\varphi' a)^2]};$$

ainsi en désignant par A la fonction primitive de $a'\sqrt{[1+(\varphi' a)^2]}$, on aura

$$c=\mathrm{A}+h,$$

h étant une constante arbitraire; ces valeurs de b et c étant substituées dans les expressions de x, y, on aura la courbe cherchée.

Nous remarquerons maintenant que, quelle que soit la courbe des centres, l'équation $c'=\sqrt{(a'^2+b'^2)}$ fait voir que le rayon c est égal à l'arc de cette courbe (voyez ci-après l'art. 29); de sorte que si on nomme s cet arc, on aura

$$c=s+h.$$

Nous remarquerons de plus que le rayon c sera nécessairement tangent à la même courbe; car l'angle que la tangente de cette

courbe fait avec l'axe, a pour tangente la quantité $\frac{b'}{a'}$ (art. 7), et comme le rayon du cercle osculateur est perpendiculaire à la courbe dont les coordonnées sont x et y (art. 8), la tangente de l'angle qu'il fait avec l'axe sera $= -\frac{1}{y'}$ (art. 7) $= \frac{b'}{a'}$, en vertu de l'équation $1 + \frac{b'y'}{a'} = 0$, et par conséquent la même que celle de la tangente à la courbe.

Mais, quoique cette propriété soit démontrée de cette manière, il est bon de faire voir qu'elle est une conséquence nécessaire de l'analyse employée dans la solution de la question. Pour cela, nous reprendrons les deux premières équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \quad \text{et} \quad x - a + y'(y-b) = 0,$$

lesquelles donnent

$$a = x - \frac{cy'}{\sqrt{(1+y'^2)}} \quad \text{et} \quad b = y + \frac{c}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$

et nous observerons que ces expressions de a et b peuvent représenter à la fois les coordonnées de la perpendiculaire à la courbe dont x et y sont les coordonnées, en regardant x et y comme constantes, et c comme une variable, ainsi qu'on l'a vu dans l'article 8, et les coordonnées de la courbe des centres, en regardant x et y comme variables, et c comme donnée en x et y (art. 9).

Donc la perpendiculaire dont il s'agit sera tangente de cette dernière courbe, si la fonction prime de b, regardée comme fonction de a, est la même pour la droite et pour la courbe (art. 10); ou, en général, si les valeurs de a' et de b', regardées comme fonctions d'une troisième variable, sont les mêmes, et par conséquent aussi, si les valeurs de $\frac{a'}{c'}$ et $\frac{b'}{c'}$ sont les mêmes, soit que les quantités x et y soient traitées comme variables ou non, c'est-à-dire, si dans ces valeurs les parties dépendantes des variations de x et y sont nulles; or, c'est ce qui a lieu en effet, comme on le voit par les

équations de l'article précédent,

$$a'(x-a)+b'(y-b)=cc' \quad \text{et} \quad a'+b'y'=0,$$

qui servent à la détermination de $\frac{a'}{c'}$ et de $\frac{b'}{c'}$, et qui sont les équations primes de

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2 \quad \text{et} \quad x-a+y'(y-b)=0,$$

en y traitant x et y comme constantes, et a, b comme seules variables.

Donc, puisque le rayon osculateur d'une courbe est partout tangent à la courbe des centres, et est en même temps égal à l'arc de cette courbe, il s'ensuit qu'il peut être pris pour ce même arc étendu en ligne droite, et qu'ainsi toute courbe peut être regardée comme formée par le développement de celle qui est le lieu des centres des cercles osculateurs. C'est en quoi consiste la théorie des développées d'*Huyghens*, qui n'avait été démontrée que par des considérations géométriques. L'analyse précédente fournit en même temps l'explication d'un paradoxe qui se présente, lorsqu'on cherche, par les formules connues, la courbe formée par le développement d'une courbe donnée.

Si on substitue dans l'équation de cette courbe les expressions de ses coordonnées a et b en x, y, y' et y'', on a évidemment une équation du second ordre, d'où il paraît s'ensuivre que l'équation en x et y de la courbe cherchée devrait contenir deux constantes arbitraires, tandis que la génération de cette courbe, par le développement de la courbe donnée, n'admet qu'une seule constante arbitraire dépendant du point où commence le développement.

La raison de cette différence consiste, comme nous venons de le démontrer, en ce que l'équation de la courbe engendrée par le développement, est proprement l'équation primitive complète d'une équation du premier ordre, qui n'est elle-même que l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre, donnée par les conditions du problème, et qui, par sa nature, ne peut point avoir de constante arbitraire; de sorte qu'il ne peut y avoir qu'une constante arbitraire, à raison de la première équation primitive.

CHAP. V.

CHAPITRE V.

Des plus grandes et des moindres valeurs des fonctions d'une variable.

24. Il y a un genre de questions qui, quoiqu'indépendantes de la considération des tangentes, peuvent néanmoins s'y rapporter. Ce sont celles qu'on appelle *de maximis* et *minimis*, et qui consistent à trouver pour une fonction donnée d'une variable, la valeur de cette variable qui rend celle de la fonction la plus grande ou la plus petite. Comme les courbes ne sont que la représentation ou le tableau de toutes les valeurs de la fonction de l'abscisse, représentée par l'ordonnée, il est visible que la question de trouver la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction donnée d'une variable, revient à déterminer la plus grande ou la plus petite ordonnée de la courbe dont cette variable serait l'abscisse, et la fonction donnée serait l'ordonnée.

Or, l'inspection seule de la courbe suffit pour faire voir que ces ordonnées ne peuvent être que celles qui répondent aux points dont les tangentes seront parallèles à l'axe des abscisses. Si la courbe est convexe à l'axe, l'ordonnée sera alors évidemment un *minimum ;* et si la courbe est concave, l'ordonnée est un *maximum.*

Nous avons vu (art. 7) que la tangente de l'angle que la tangente d'une courbe fait avec l'axe, est exprimée en général par y', y étant l'ordonnée qu'on suppose fonction de l'abscisse x; donc, pour que cette tangente devienne parallèle à l'axe, il faut que l'on ait $y' = 0$; or, si l'on fait $y' = 0$ dans les expressions des coordonnées a et b (art. 9), qui déterminent le lieu du centre du cercle osculateur, on a

$$a = x, \quad b = y + \frac{1}{y''},$$

d'où l'on voit que si y'' est une quantité positive, ce centre tombera au-delà de la courbe, qui sera par conséquent convexe vers l'axe; et que si y'' est une quantité négative, le même centre tombera en-deçà de la courbe, c'est-à-dire du côté de l'axe, et que par conséquent la courbe sera alors concave vers l'axe. Donc la fonction y sera un *maximum* ou un *mininum*, lorsque sa fonction prime y' sera nulle; et, en particulier, elle sera un *minimum*, lorsque la fonction seconde y'' sera en même temps une quantité positive, et un *maximum*, lorsque y'' sera une quantité négative : c'est en quoi consiste la méthode connue *de maximis* et *minimis*.

25. Mais il n'est pas inutile de faire voir comment cette méthode peut se déduire directement de l'analyse des fonctions, sans la considération intermédiaire des courbes.

Soit fx la fonction de x, dont on demande le *maximum* ou le *minimum*. Soit a la valeur de x, qui répond au *maximum* ou au *minimum*, il faudra que la valeur de fa soit toujours plus grande ou toujours moindre que la valeur de $f(a+i)$, quelle que soit la quantité i, positive ou négative, et quelque petite qu'elle puisse être. Je dis quelque petite que la quantité i puisse être, car une quantité est censée devenir un *maximum* ou un *minimum*, lorsqu'elle parvient au terme de son accroissement ou de sa diminution; de manière qu'en-deçà et au-delà de ce terme, elle se trouve moindre dans le cas du *maximum*, ou plus grande dans le cas du *minimum*, que dans le même terme. Concevons x à la place de a, la condition du *maximum* sera

$$f(x+i) < fx \quad \text{ou} \quad f(x+i) - fx < 0,$$

et celle du *minimum* sera

$$f(x+i) > fx \quad \text{ou} \quad f(x+i) - fx > 0,$$

quelque petit que soit i, positif ou négatif.

Développons la fonction $f(x+i)$ en série, par nos formules (art. 40, première Part.), et arrêtons-nous d'abord aux deux premiers

termes, on aura ainsi

$$f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''(x+j),$$

j étant une quantité renfermée entre les limites o et i. Il faudra donc que l'on ait $if'x+\frac{i^2}{2}f''(x+j)<o$ pour le *maximum*, et $>o$ pour le *minimum*.

Or, nous avons déjà vu (art. 3) qu'on peut prendre i assez petit pour que la valeur absolue du terme $if'x$ soit plus grande que celle du terme $\frac{i^2}{2}f''(x+j)$, ce qui étant vrai pour une valeur de i, aura lieu aussi pour toutes les valeurs de i plus petites; donc la quantité $if'x+\frac{i^2}{2}f''(x+j)$ deviendra alors positive ou négative, suivant que la quantité $if'x$ le sera; mais celle-ci change de signe avec la quantité i; donc il sera impossible que la condition du *maximum* ou du *minimum* ait lieu, à moins que l'on n'ait $f'x=o$.

Prenons maintenant dans le développement de $f(x+i)$ un terme de plus, nous aurons

$$f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+\frac{i^3}{2.3}f'''(x+j);$$

donc, à cause de $f'x=o$, il faudra que l'on ait $\frac{i^2}{2}f''x+\frac{i^3}{2.3}f'''(x+j)<o$ pour le *maximum*, et $>o$ pour le *minimum*. On peut aussi prendre i assez petit pour que la valeur absolue du terme $\frac{i^2}{2}f''x$ soit plus grande que celle de $\frac{i^3}{2.3}f'''(x+j)$; alors la quantité

$$\frac{i^2}{2}f''x+\frac{i^3}{2.3}f'''x(x+j)$$

sera positive ou négative, suivant que celle de $\frac{i^2}{2}f''x$ le sera. Donc, puisque la valeur de i^2 est toujours positive, il faudra, pour le *maximum*, que l'on ait $f''x<o$, et que, pour le *minimum*, l'on ait $f''x>o$.

Si l'on fait $f''x=o$, alors reprenant le développement de

$f(x+i)$, et employant un terme de plus, on aurait

$$f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+\frac{i^3}{2.3}f'''x+\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}(x+j);$$

donc, puisqu'on suppose $f'x=0$ et $f''x=0$, on aurait pour le *maximum*, la condition

$$\frac{i^3}{2.3}f'''x+\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}(x+j)<0;$$

et pour le *minimum*, la condition opposée. Or, on peut prendre i assez petit pour que la valeur absolue du terme $\frac{i^3}{2.3}f'''x$ surpasse celle du terme $\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}(x+j)$; alors la valeur de

$$\frac{i^3}{2.3}f'''x+\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}(x+j)$$

sera positive ou négative suivant celle de $\frac{i^3}{2.3}f'''x$; mais celle-ci change de signe avec la quantité i; donc il sera impossible que la condition du *maximum* ou du *minimum* ait lieu, à moins qu'on n'ait $f'''x=0$.

Employons encore le terme suivant dans le développement de $f(x+i)$, on aura

$$f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+\frac{i^3}{2.3}f'''x+\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}x+\frac{i^5}{2.3.4.5}f^{V}(x+j);$$

et les conditions du *minimum* ou du *maximum* deviendront

$$\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}x+\frac{i^5}{2.3.4.5}f^{V}(x+j)<0 \quad \text{ou} \quad >0,$$

à cause de $f'x=0$, $f''x=0$ et $f'''x=0$. On prouvera ici, comme plus haut, que l'on pourra prendre i assez petit pour que le terme affecté de i^4, pris absolument, c'est-à-dire, abstraction faite du signe, devienne plus grand que l'autre terme affecté de i^5, et que, par conséquent, la somme des deux termes soit nécessairement

positive ou négative, selon que le terme $\frac{i^4}{2.3.4}f^{IV}x$ le sera. D'où il est aisé de conclure, à cause que i^4 est toujours une quantité positive, qu'il faudra, pour le *maximum*, que l'on ait $f^{IV}x < 0$, et pour le *minimum*, $f^{IV}x > 0$; et ainsi de suite.

26. Donc, en général, si y est une fonction quelconque de x, on aura d'abord, pour le *maximum* ou le *minimum*, la condition $y' = 0$, laquelle donnera la valeur de x; ensuite $y'' < 0$ ou > 0, ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé ci-dessus (art. 24). Mais nous venons de trouver de plus que si $y'' = 0$, il faudra que l'on ait aussi en même temps $y''' = 0$, ensuite $y^{IV} < 0$ pour le *maximum*, et $y^{IV} > 0$ pour le *minimum*; et ainsi de suite. En général, si une fonction dérivée d'un ordre quelconque pair disparaît, il faudra que la fonction de l'ordre impair suivant disparaisse aussi, et que la suivante de l'ordre pair soit négative pour le *maximum*, et positive pour le *minimum*.

Si la fonction y n'est donnée que par une équation $F(x, y) = 0$, il n'y aura qu'à prendre l'équation prime

$$F'(x) + y'F'(y) = 0,$$

et faire $y' = 0$, ce qui la réduira à celle-ci

$$F'(x) = 0,$$

laquelle combinée avec $F(x, y) = 0$, servira à déterminer les valeurs de x et y répondant au *maximum* ou au *minimum*. Ensuite on prendra l'équation seconde, et faisant de même $y' = 0$, on aura la valeur de y'', dans laquelle on substituera les valeurs trouvées de x et y, et on pourra juger, par cette valeur, du *maximum* ou du *minimum*; et ainsi de suite.

Si la fonction y'' ou $f''x$ devenait infinie, c'est-à-dire, si $\frac{1}{y''} = 0$, ce serait une marque que le développement de $f(x+i)$ contiendrait, pour la valeur trouvée de x, un terme de la forme Ai^m, m étant entre 1 et 2 (art. 30, Ière Part.); et en considérant la courbe de l'équation $y = fx$, on pourrait connaître par la forme de son

cours dans le point donné, si la fonction y est un *maximum* ou un *minimum* (art. 24). On pourrait même donner pour cela des règles générales, mais qui nous écarteraient trop de notre objet.

Nous ne nous arrêterons pas à donner des exemples des règles précédentes pour la détermination des *maxima* et *minima;* comme elles s'accordent en tout avec celles que l'on connaît d'après le calcul différentiel, on pourra en faire les mêmes applications. Il n'y aura qu'à changer les simboles

$$y', y'', y''' \text{ etc. en } \frac{dx}{dn}, \frac{dy^2}{dx^2}, \frac{dy^3}{dx^3} \text{ etc.}$$

CHAPITRE VI.

De la mesure des aires, et de la longueur des arcs dans les courbes planes. De la mesure des solidités et de celle des surfaces des conoïdes. Principe général de la solution analytique de ces questions.

97. Je viens maintenant à la détermination des aires des courbes, qu'on appelle communément *quadrature des courbes*. Considérons, en général, la courbe représentée par l'équation $y = fx$, y étant l'ordonnée rectangulaire correspondante à l'abscisse x dont elle est une fonction donnée. L'espace terminé par cette courbe, par l'axe des abscisses, et par une ordonnée quelconque y, sera donc aussi déterminé par une fonction de la même abscisse x, que nous désignerons par Fx. Supposons que x devienne $x+i$, cette fonction deviendra $F(x+i)$, et il est clair que $F(x+i) - Fx$ sera alors la portion de l'espace correspondante à la partie i de l'axe, et terminée par les deux ordonnées fx et $f(x+i)$ répondantes aux abscisses x et $x+i$. Or, quelle que soit la courbe proposée, il est aisé de se convaincre, même sans figure, que si les ordonnées vont en augmentant ou en diminuant, depuis fx jusqu'à $f(x+i)$, l'espace dont il s'agit sera, dans le premier cas, plus grand que l'espace rectangulaire ifx, et moindre que l'espace rectangulaire $if(x+i)$, et dans le second cas, plus grand que ce dernier, et moindre que le premier. Donc il sera toujours nécessairement renfermé entre ces limites ifx et $if(x+i)$, lesquelles seront par conséquent les limites de la quantité $F(x+i) - Fx$ qui doit représenter ce même espace.

Développons les fonctions $f(x+i)$ et $F(x+i)$ suivant notre formule (art. 40, Ière Part.), et arrêtons-nous au premier terme pour la

première, et aux deux premiers pour la seconde, on aura

$$f(x+i) = fx + if'(x+j)$$

et

$$F(x+i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

où j est une quantité indéterminée qui peut n'être pas la même pour les deux fonctions, mais qui doit toujours être renfermée entre les limites o et i. Il faudra donc que la fonction Fx soit telle, que la quantité $iF'x + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$ soit renfermée entre les limites ifx et $ifx + i^2f'(x+j)$, quelle que soit la valeur de i, et par conséquent en prenant i aussi petit qu'on voudra. Or, l'intervalle entre les deux limites étant $i^2f'(x+j)$, la différence de la quantité dont il s'agit et de l'une des limites, savoir,

$$i(F'x - fx) + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$$

devra être moindre que $i^2f'(x+j)$, abstraction faite des signes de ces quantités. Mais il est aisé de prouver que cette condition ne peut avoir lieu pour une valeur de i aussi petite qu'on voudra, à moins que le terme affecté de i ne disparaisse; car autrement on pourra toujours prendre i tel que la première quantité soit plus grande que la seconde, puisqu'il suffira que i soit plus petit que $\frac{F'x - fx}{f'(x+j) - \frac{1}{2}F''(x+j)}$. On aura donc nécessairement

$$F'x = fx;$$

et cette condition suffira pour la détermination de la fonction Fx, puisqu'on voit qu'elle ne sera autre chose que la fonction primitive de fx.

Donc, en général, la fonction prime de la fonction qui exprime l'aire d'une courbe par l'abscisse, est la fonction qui représente l'ordonnée de cette courbe; et réciproquement, la fonction qui exprime l'aire ne peut être que la fonction primitive de celle qui exprime l'ordonnée. Ainsi, l'équation d'une courbe étant donnée, pour

pour avoir l'expression de l'aire, c'est-à-dire, la quadrature de la courbe, il n'y aura qu'à chercher la fonction primitive de celle qui représente l'ordonnée, et on pourra ajouter à cette fonction primitive une constante arbitraire (art. 49, première Part.), qu'on déterminera par la condition que l'expression de l'aire devienne nulle au point où l'on voudra la faire commencer.

Nous avons supposé dans l'analyse précédente, que les ordonnées allaient en augmentant ou en diminuant depuis fx jusqu'à $f(x+i)$; cette condition n'aurait pas lieu s'il y avait entre ces deux ordonnées un *maximum* ou un *minimum;* mais comme on peut prendre l'intervalle i aussi petit que l'on veut, il est clair qu'on pourra toujours faire tomber la seconde ordonnée $f(x+i)$ en-deçà du *maximum* ou du *minimum;* et que par conséquent la conclusion que nous en avons tirée demeurera toujours la même.

Si la fonction fx exprimait l'aire de la section d'un solide, faite perpendiculairement à l'abscisse x, on prouverait de la même manière que la solidité serait exprimée par la fonction primitive de fx. Car désignant par Fx la solidité, la différence $F(x+i)-Fx$ exprimerait la portion du solide comprise entre les deux sections $f(x+i)$ et fx, et cette portion serait nécessairement intermédiaire entre les deux solides prismatiques ifx et $if(x+i)$, en prenant la quantité i aussi petite qu'on voudrait; d'où l'on conclurait, comme ci-dessus,

$$F'x = fx.$$

Ainsi, en faisant tourner une courbe autour de l'axe des x, on a un conoïde dont la section perpendiculaire à l'axe et répondante à l'abscisse x, est un cercle du rayon y, et dont l'aire est $\frac{\pi y^2}{2}$, où π est la circonférence du cercle dont le rayon $= 1$. Or, par la nature de la courbe, on a $y = fx$; donc l'aire de la section sera $\frac{1}{2}\pi(fx)^2$; et la solidité Fx du conoïde sera donnée par la fonction prime

$$F'x = \frac{1}{2}\pi(fx)^2.$$

28. Le problème de la quadrature des courbes est, comme l'on voit, le problème le plus simple de l'analyse inverse des fonctions;

puisqu'il ne consiste qu'à trouver la fonction primitive d'une fonction donnée. Nous avons indiqué, dans la première Partie (Chap. VIII), les moyens par lesquels on peut faciliter cette recherche; nous ajouterons ici une observation essentielle.

Comme il est souvent avantageux de substituer d'autres variables à la place de celle qui entre dans la fonction, pour simplifier ou décomposer cette fonction en d'autres plus simples, il ne faudra pas oublier alors de multiplier la fonction dont il s'agit par la fonction prime de sa variable. En effet, nommant u l'aire de la courbe dont y est l'ordonnée, et regardant y et u comme fonctions de x, nous venons de voir que l'on a $u'=y$; mais si on suppose x fonction d'une autre variable, et qu'on désigne par x' et u' les fonctions primes de x et u prises relativement à cette nouvelle variable, il faudra substituer $\frac{u'}{x'}$ à la place de u' (art. 50, première Part.), ce qui donnera $u'=yx'$; et ainsi des autres formules semblables.

Au reste, comme suivant le calcul différentiel, u' est équivalent à $\frac{du}{dx}$, l'équation $u'=y$ donne $du=ydu$, et intégrant, $u=\int ydx$, formule connue pour la quadrature des courbes.

29. Après le problème de la quadrature des courbes, se présente naturellement celui de leur rectification, c'est-à-dire, de la détermination de la longueur même de la courbe.

Nous partirons, pour la solution de ce problème, du principe d'*Archimède*, adopté par tous les géomètres anciens et modernes, suivant lequel deux lignes courbes, ou composées de droites, ayant leurs concavités tournées du même côté et les mêmes extrémités, celle qui renferme l'autre est la plus longue. D'où il suit qu'un arc de courbe tout concave du même côté, est plus grand que sa corde, et en même temps moindre que la somme des deux tangentes menées aux deux extrémités de l'arc, et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection. De là on peut tirer cette autre conséquence, que la longueur du même arc se trouvera comprise entre celles des deux tangentes menées à ses

deux extrémités, et terminées aux deux ordonnées qui répondent à ses extrémités, prolongées, s'il le faut, au-delà de la courbe.

En effet, ayant mené la corde qui joindra les deux extrémités de l'arc, il est aisé de voir que l'une des deux tangentes rencontrera les ordonnées parallèles sous un angle plus aigu que la corde, et que l'autre les rencontrera sous un angle moins aigu, et que par conséquent la corde sera moindre que la première de ces tangentes, et plus longue que la seconde; donc celle-ci sera, à plus forte raison, moindre que l'arc de la courbe. De plus, si on considère les deux triangles opposés au sommet, et formés par l'intersection des deux tangentes, il est visible que les deux parties de la première tangente seront respectivement plus longues que celles de la seconde, parce que les côtés formés par ces parties-là, se trouvent opposés à des angles plus grands que les côtés formés par celles-ci. Donc la première tangente entière sera plus longue que la somme des deux portions de tangentes comprises entre leur point d'intersection et les extrémités de l'arc. Donc elle sera aussi plus longue que l'arc.

Cela posé, fx étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse x, $f'x$ sera (art. 7) la tangente de l'angle sous lequel la tangente de la courbe à l'extrémité de cette ordonnée, est inclinée à l'axe des abscisses; par conséquent $if'x$ sera la partie de l'ordonnée $f(x+i)$ prolongée s'il est nécessaire, comprise entre la tangente et une parallèle à l'axe, menée par l'extrémité de l'ordonnée fx; donc $\sqrt{[i^2+(if'x)^2]}=i\sqrt{[1+(f'x)^2]}$ sera la partie de cette tangente comprise entre les deux ordonnées, éloignées l'une de l'autre de l'intervalle i. De la même manière, on aura $f'(x+i)$ pour la tangente de l'angle sous lequel la tangente de la courbe à l'extrémité de l'ordonnée $f(x+i)$ est inclinée à l'axe, et on trouvera $i\sqrt{\{1+[f'(x+i)]^2\}}$ pour la partie de cette tangente comprise entre les mêmes ordonnées fx et $f(x+i)$.

Soit, pour plus de simplicité,

$$\varphi x=\sqrt{1+(f'x)^2},$$

on aura $i\varphi x$ et $i\varphi(x+i)$ pour les deux tangentes menées aux

deux extrémités de l'arc de la courbe compris entre les ordo
fx et $f(x+i)$, et terminées à ces mêmes ordonnées; do
longueur de cet arc devra être renfermée entre les deux qua
$i\varphi x$ et $i\varphi(x+i)$, en donnant à i une valeur aussi petite
voudra. Donc si Φx est la fonction de x qui exprime l'arc
courbe, il faudra que la quantité $\Phi(x+i)-\Phi x$, expressio
l'arc compris entre les ordonnées fx et $f(x+i)$, soit com
entre ces deux-ci $i\varphi x$ et $i\varphi(x+i)$, quelque petit que so
d'où, par un raisonnement semblable à celui de l'article 27
conclura $\Phi' x = \varphi x$. Donc, pour avoir la longueur indéfinie
courbe, il faudra chercher la fonction primitive de la fonction
où $\sqrt{[1+(f'x)^2]}$; et comme on peut ajouter une constante
traire à la fonction primitive, il faudra déterminer cette const
de manière que l'expression de l'arc s'évanouisse au point où
voudra le faire commencer.

Donc, si on nomme s l'arc de la courbe dont les coordon
sont x et y, on aura, en regardant y et s comme fonctions d
à cause de $fx=y$, $f'x=y'$, l'équation

$$s' = \sqrt{(1+y'^2)},$$

Et si x et y étaient données en fonctions d'une autre varial
comme t, alors, en désignant par x', y', s' les fonctions pri
relativement à cette variable, il faudrait substituer $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{s'}{x'}$ à la pl
de y' et s' (art. 28), ce qui donnerait cette équation

$$s' = \sqrt{(x'^2+y'^2)},$$

entre les coordonnées et l'arc.

Suivant le calcul différentiel, les fonctions dérivées s' et y'
raient exprimées par $\frac{ds}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$, et l'équation $s'=\sqrt{1+y'^2}$
viendrait

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

formule connue des rectifications.

30. Si on imagine que la courbe proposée tournant autour

l'axe des abscisses engendre un conoïde, il est visible que les deux ordonnées fx et $f(x+i)$ décriront en même temps deux cercles dont ces coordonnées seront les rayons, que l'arc de la courbe compris entre ces deux coordonnées décrira une zône conoïdique, et que les deux tangentes menées aux extrémités de cet arc décriront des zônes coniques.

Mais quoique l'une de ces deux tangentes soit toujours plus grande, et l'autre plus petite que la longueur de l'arc, comme nous venons de le démontrer, néanmoins comme elles tombent toutes les deux du même côté de l'arc, il est possible que les zônes coniques qu'elles décrivent soient à la fois plus grandes ou plus petites que la zône conoïdique décrite par l'arc. Pour éviter cet inconvénient, il n'y a qu'à transporter parallèlement à elle-même la seconde tangente qui répond à l'extrémité de l'ordonnée $f(x+i)$, de manière que le point où cette tangente est terminée par la première ordonnée fx, tombe à l'extrémité de cette ordonnée, et devienne sécante de la courbe. Alors cette sécante et la tangente au même point, tomberont l'une d'un côté et l'autre de l'autre côté de l'arc, et même la plus longue tombera toujours en dehors et la plus courte en dedans de l'arc, comme il est facile de s'en convaincre par la construction; de sorte que la zône conoïdique décrite par l'arc, se trouvera nécessairement renfermée entre les zônes coniques décrites par la tangente $i\varphi x$, et par la sécante $i\varphi(x+i)$.

Or, on sait par la géométrie, que la surface convexe d'un cône tronqué est égale à son côté multiplié par la demi-somme des circonférences des deux bases. Donc, si on désigne par π la circonférence du cercle dont le rayon $=1$, la surface de la zône conique décrite par la tangente $i\varphi x$ sera

$$i\varphi x \times \left(fx + \frac{i}{2} f'x\right)\pi,$$

puisque les rayons des deux bases sont, l'un fx, et l'autre $fx+if'x$; et la surface de l'autre zône, décrite par la tangente ou sécante

$i\varphi(i+i)$, sera

$$i\varphi(x+i)\times\left[fx+\frac{i}{2}f'(x+i)\right].\pi;$$

car il est facile de voir que les rayons des bases de ce tronc de cône seront fx et $fx+if'(x+i)$.

Si donc on désigne par Φx la fonction de l'abscisse x qui exprime la surface du conoïde, il est clair que la zône conoïde sera exprimée par la différence $\Phi(x+i)-\Phi x$, et que cette différence devra être renfermée entre les deux quantités

$$i\pi\varphi x\left(fx+\frac{i}{2}f'x\right) \quad \text{et} \quad i\pi\varphi(x+i)\left[fx+\frac{i}{2}f'(x+i)\right],$$

en donnant à i une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra. D'où l'on pourra conclure, par un raisonnement analogue à celui de l'article 27, que cette condition ne pourra avoir lieu, à moins que l'on n'ait

$$\Phi'x=\pi\varphi xfx=\pi fx\sqrt{[1+(f'x)^2]}.$$

Donc on aura la surface du conoïde proposé, en prenant la fonction primitive de la fonction

$$\pi fx\sqrt{[1+(f'x)^2]} \quad \text{ou} \quad \pi y\sqrt{(1+y'^2)}.$$

31. En général, supposons que l'on cherche la fonction Fx par cette condition, que la différence $F(x+i)-Fx$ doive être renfermée entre les deux quantités $if(x,i)$ et $i\varphi(x,i)$, f et φ dénotant des fonctions données de x et i telles qu'en faisant $i=0$, on ait $fx=\varphi x$, et que cette condition doive avoir lieu en donnant à i une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra.

En employant notre théorème, on réduira la fonction $F(x+i)$ à

$$Fx+iF'x+\frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

et les fonctions $f(x,i)$, $\varphi(x,i)$ à

$$fx+if'(x,j), \quad \varphi x+i\varphi'(x,j),$$

la quantité j étant indéterminée, mais comprise entre les limites

o et i, et pouvant être différente dans les différentes fonctions; les fonctions dérivées, marquées par F′, F″, se rapportent à la variable x, et les fonctions dérivées, marquées par f′, φ', se rapportent à la variable i. Donc, puisqu'on suppose $fx = \varphi x$, la condition dont il s'agit se réduira à faire ensorte que la quantité $iF'x + \frac{i^2}{2} F''(x+j)$ soit comprise entre les deux quantités $ifx + i^2 f'(x,j)$ et $ifx + i^2\varphi'(x,j)$, quelque petite que puisse être la valeur de i. Donc il faudra que la différence

$$i(F'x - fx) + i^2[\tfrac{1}{2} F''(x+j) - f'(x,j)]$$

ne soit jamais plus grande que la différence

$$i^2[\varphi'(x,j) - f'(x,j)];$$

mais tant que le terme multiplié par la première puissance de i ne sera pas nul, on pourra toujours prendre i assez petit pour que la première quantité devienne plus grande que la seconde, car il suffira pour cela de prendre i moindre que la quantité $\frac{F'x - fx}{\varphi'(x,j) - \frac{1}{2}F''(x+j)}$, abstraction faite du signe de cette quantité. Donc, la condition proposée emporte nécessairement celle-ci

$$F'x - fx = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad F'x = fx;$$

c'est-à-dire, que la fonction cherchée Fx devra être la fonction primitive de fx; et pour avoir la valeur complète de Fx, il faudra y ajouter une constante arbitraire, qu'on déterminera par les conditions de la question.

CHAPITRE VII.

Théorie du contact des courbes à double courbure. Du rayon osculateur, des centres de courbure, et du lieu de ces centres. Des développées des courbes à double courbure. Quadrature et rectification de ces courbes.

32. Les courbes planes appartiennent à la géométrie de deux dimensions, et ne dépendent par conséquent que de deux coordonnées. Les courbes à double courbure doivent appartenir à la géométrie de trois dimensions, puisqu'elles ne peuvent être tracées que sur la surface des corps solides; aussi dépendent-elles de trois coordonnées perpendiculaires entre elles, dont deux sont fonctions de la troisième, de sorte qu'elles ne peuvent être représentées que par deux équations entre trois indéterminées.

Soit donc pour une courbe quelconque à double courbure,

$$y = fx\,, \quad z = \varphi x\,,$$

x, y, z étant les trois coordonnées rectangulaires. Soit de même pour une autre courbe donnée,

$$q = Fp\,, \quad r = \Phi p\,,$$

p, q, r étant pareillement ses trois coordonnées rapportées aux mêmes axes que les précédentes. Si on veut que ces deux courbes aient un point commun pour l'abscisse x, il faudra qu'en faisant $p = x$, on ait aussi

$$q = y \quad \text{et} \quad r = z\,; \quad \text{donc} \quad y = Fx \quad \text{et} \quad z = \Phi x.$$

Pour un autre point quelconque répondant à l'abscisse $x + i$, les

les ordonnées y et z seront $f(x+i)$, $\varphi(x+i)$, et les ordonnées q, r seront $F(x+i)$, $\Phi(x+i)$; et faisant pour abréger,

$$d = f(x+i) - F(x+i), \quad \delta = \varphi(x+i) - \Phi(x+i),$$

il est facile de concevoir que la distance D entre les points des deux courbes qui répondent à la même abscisse $x+i$, sera exprimée par

$$D = \sqrt{(d^2 + \delta^2)}.$$

De là, par une analyse semblable à celle qui a été développée au commencement de cette seconde Partie, on prouvera que si $f'x = F'x$, $\varphi'x = \Phi'x$, il sera impossible qu'aucune autre courbe donnée qui ne satisferait pas aux mêmes conditions, puisse passer entre les deux courbes dont il s'agit.

Si l'on avait de plus

$$f''x = F''x \quad \text{et} \quad \varphi''x = \Phi''x,$$

on prouverait, de la même manière, qu'aucune autre courbe pour laquelle ces équations n'auraient pas lieu, ne pourrait passer entre les mêmes courbes; et ainsi de suite.

Ainsi, en appliquant aux courbes à double courbure les mêmes notions des différens ordres de contact des courbes ordinaires, on en conclura que les deux premières conditions détermineront un contact du premier ordre, que les deux suivantes détermineront un contact du second ordre; et ainsi de suite.

En général, en nommant x, y, z les coordonnées d'une courbe proposée, et p, q, r les coordonnées de la courbe donnée, pour laquelle on demande les conditions du contact d'un ordre donné avec la courbe proposée, si $F(p, q, r) = 0$, et $\Phi(p, q, r) = 0$ sont les deux équations de la courbe donnée, on aura pour un contact du premier ordre, les quatre équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z)' = 0,$$
$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z)' = 0;$$

pour un contact du second ordre, on aura de plus les deux

équations

$$F(x,y,z)''=0, \quad \Phi(x,y,z)''=0;$$

et ainsi de suite, en regardant, dans ces fonctions dérivées, y et z comme fonctions de x. On satisfera à ces équations par le moyen des constantes arbitraires a, b, c, etc., qui entreront dans les fonctions données $F(p,q,r)$ et $\varphi(p,q,r)$, et qu'on pourra appeler, comme ci-dessus (art. 10), *élémens du contact*, lorsqu'elles seront déterminées en fonctions de x,y,z,y',z', etc.

33. Prenons pour la courbe donnée une ligne droite déterminée par les deux équations

$$q=a+bp, \quad r=c+dp;$$

pour qu'elle ait un contact du premier ordre, c'est-à-dire, pour qu'elle soit tangente d'une courbe quelconque proposée et rapportée aux coordonnées x,y,z, on aura ces quatre équations

$$y=a+bx, \quad z=c+dx, \quad y'=b, \quad z'=d;$$

d'où l'on tire

$$a=y-y'x, \quad c=z-z'x.$$

De sorte que les équations de la tangente rapportée aux coordonnées p, q, r, seront

$$q=y-y'x+y'p, \quad r=z-z'x+z'p.$$

Il est facile de voir que ces deux équations représentent les deux tangentes des courbes planes qui forment les projections de la courbe proposée sur les deux plans des x et y et des x et z (art. 6); de sorte que pour mener une tangente à une courbe à double courbure, il suffira toujours de mener les tangentes à ses deux projections, et la droite dont ces deux tangentes seront les projections, sera la tangente cherchée.

34. Supposons qu'on demande le cercle osculateur d'une courbe à double courbure.

et de là

$$d = -\frac{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2}};$$

$$a = x - \frac{(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

$$b = y + \frac{(1+y'^2+z'^2)[y''+z'(z'y''-y'z'')]}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

$$c = z + \frac{(1+y'^2+z'^2)[z''-y'(z'y''-y'z'')]}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2}.$$

La quantité d sera le rayon osculateur de la courbe proposée, et les quantités a, b, c seront les coordonnées de la courbe des centres de tous les cercles osculateurs; mais cette courbe ne sera pas pour cela une développée, comme dans les courbes à simple courbure.

35. Pour s'en assurer et trouver en même temps les conditions nécessaires pour qu'elle devienne une développée de la courbe à double courbure, il n'y a qu'à employer des considérations semblables à celles de l'article 23.

Reprenons les valeurs de a, b, c, tirées des trois premières équations, nous aurons

$$a = x - \frac{(ny'-mz')d}{R};$$

$$b = y + \frac{(n-z')d}{R};$$

$$c = z - \frac{(m-y')d}{R}.$$

Ces expressions, en regardant les quantités x, y, z, y', z', ainsi que m et n, comme constantes, et la quantité d comme seule variable, donnent les coordonnées de la droite dans laquelle est placé le rayon osculateur; mais en regardant toutes ces quantités comme variables, et m, n, d comme données en x, puisque y et z sont censées données en x, ces mêmes expressions représentent alors les coordonnées de la courbe des centres. Or, pour que la même droite devienne tangente de cette courbe, il faut que les valeurs de $\frac{b'}{a'}$

les deux dernières, on aura les conditions nécessaires pour un contact du second ordre, c'est-à-dire, pour que le cercle devienne osculateur de la courbe.

Comme il y a dans ces équations six quantités indéterminées a, b, c, d, m et n, on pourra satisfaire à toutes ces conditions, et le cercle osculateur sera déterminé de grandeur et de position. Mais si on ne demande qu'un cercle tangent, il restera deux indéterminées, pour lesquelles on pourra prendre le rayon d, et une des deux quantités m et n. Dans ce cas donc, l'équation

$$x-a+y'(y-b)+z'(z-c)=0$$

déterminera le plan dans lequel se trouveront les centres de tous les cercles qui peuvent être tangens; et comme le rayon du cercle tangent est nécessairement perpendiculaire à la courbe, cette équation sera celle d'un plan perpendiculaire à la courbe, en prenant a, b, c pour les coordonnées du plan.

Considérons maintenant le contact du second ordre. Les trois premières équations donneront

$$x-a=\frac{(ny'-mz')d}{R},\quad y-b=-\frac{(n-z')d}{R},\quad z-c=\frac{(m-y')d}{R},$$

en faisant, pour abréger,

$$R=\sqrt{[(ny'-mz')^2+(n-z')^2+(m-y')^2]}.$$

Ces valeurs étant substituées dans la cinquième équation, on en tirera

$$d=\frac{(1+y'^2+z'^2)R}{(n-z')y''-(m-y')z''}.$$

Enfin, la quatrième et la sixième équation donneront

$$m=\frac{z''}{z'y''-y'z''},\quad n=-\frac{y''}{z'y''-y'z''},$$

valeurs qu'on substituera dans les expressions précédentes.

On trouvera d'abord, après quelques réductions,

$$R=\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\times\sqrt{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2}}{z'y''-y'z''},$$

et de là

$$d = -\frac{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2}},$$

$$a = x - \frac{(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

$$b = y + \frac{(1+y'^2+z'^2)[y''+z'(z'y''-y'z'')]}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

$$c = z + \frac{(1+y'^2+z'^2)[z''-y'(z'y''-y'z'')]}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2}.$$

La quantité d sera le rayon osculateur de la courbe proposée, et les quantités a, b, c seront les coordonnées de la courbe des centres de tous les cercles osculateurs; mais cette courbe ne sera pas pour cela une développée, comme dans les courbes à simple courbure.

35. Pour s'en assurer et trouver en même temps les conditions nécessaires pour qu'elle devienne une développée de la courbe à double courbure, il n'y a qu'à employer des considérations semblables à celles de l'article 23.

Reprenons les valeurs de a, b, c, tirées des trois premières équations, nous aurons

$$a = x - \frac{(ny'-mz')d}{R},$$

$$b = y + \frac{(n-z')d}{R};$$

$$c = z - \frac{(m-y')d}{R}.$$

Ces expressions, en regardant les quantités x, y, z, y', z', ainsi que m et n, comme constantes, et la quantité d comme seule variable, donnent les coordonnées de la droite dans laquelle est placé le rayon osculateur; mais en regardant toutes ces quantités comme variables, et m, n, d comme données en x, puisque y et z sont censées données en x, ces mêmes expressions représentent alors les coordonnées de la courbe des centres. Or, pour que la même droite devienne tangente de cette courbe, il faut que les valeurs de $\frac{b'}{a'}$

et $\frac{c'}{a'}$, en regardant b et c comme fonctions de a, ou en général, a, b, c comme fonctions d'une autre variable quelconque, soient les mêmes dans les deux cas. Donc les valeurs de $\frac{a'}{d'}, \frac{b'}{d'}, \frac{c'}{d'}$ devront être aussi les mêmes, soit que les quantités a, b, c, d soient seules variables, soit que les quantités x, y, z, m et n varient aussi en même temps; par conséquent, il faudra que les équations qui déterminent ces valeurs, aient lieu également dans les deux hypothèses.

Or, si on considère les équations qui ont servi à déterminer les quantités a, b, c, d, m et n en x, y, y', y'', et qu'on regarde toutes ces quantités comme variables à la fois, il est clair que les deux équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2 \text{ et } x-a+y'(y-b)+z'(z-c)=0$$

emporteront encore celle-ci

$$-a'(x-a)-b'(y-b)-c'(z-c)=dd',$$

qui n'est que l'équation prime de la première, en supposant a, b, c, d seules variables. De même les deux équations

$$x-a+y'(y-b)+z'(z-c)=0$$

et

$$1+y'^2+z'^2+y''(y-b)+z''(z-c)=0$$

emporteront celle-ci,

$$a'+y'b'+z'c'=0,$$

qui est également l'équation prime de la première, en ne prenant que a, b, c pour variables. Ces deux équations ont donc la condition demandée; mais comme elles ne suffisent pas pour la détermination des trois quantités $\frac{a'}{d'}, \frac{b'}{d'}, \frac{c'}{d'}$, il faudra trouver, de la même manière, une troisième équation qui contienne les fonctions primes a', b', c'; or, les deux précédentes ayant été déduites de l'équation

de la sphère, il faudra tirer la troisième de l'équation du plan

$$x - a + m(y - b) + n(z - c) = 0,$$

laquelle, en faisant tout varier, et ayant égard à l'équation

$$1 + my' + nz' = 0,$$

donnera celle-ci

$$-a' - mb' - nc' + m'(y - b) + n'(z - c) = 0,$$

qui est, comme l'on voit, l'équation prime de la précédente, en supposant a, b, c, m, n variables à la fois; par conséquent, cette équation n'aura pas la condition demandée, à moins que la partie dépendante de la variation des quantités m et n, ne disparaisse, c'est-à-dire, à moins qu'on n'ait

$$m'(y - b) + n'(z - c) = 0.$$

Si cette condition a lieu, alors l'équation restante

$$a' + mb' + nc' = 0,$$

combinée avec les deux équations qu'on vient de trouver, donnera les valeurs de $\frac{a'}{d'}$, $\frac{b'}{d'}$, $\frac{c'}{d'}$, qui seront les mêmes, soit que les quantités a, b, c, d soient seules variables, soit que x, y, z, m et n varient aussi à la fois. Par conséquent, la droite dans laquelle est placé le rayon osculateur, deviendra tangente à la courbe des centres : donc aussi ce rayon sera tangent de la même courbe, puisqu'il est terminé à cette courbe. Dans ce même cas, les expressions précédentes de a, b, c donneront sur-le-champ ces fonctions primes

$$a' = -\frac{(ny' - mz')\,d'}{R}, \quad b' = \frac{(n - z')\,d'}{R}, \quad c' = -\frac{(m - y')\,d'}{R};$$

d'où l'on tire

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2,$$

et de là

$$d' = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

CHAPITRE VIII.

Des surfaces courbes et de leurs plans tangens. Théorie du contact des surfaces courbes. Des contacts des différens ordres.

38. Les surfaces courbes se déterminent aussi par trois coordonnées rectangulaires, comme les lignes à double courbure, mais avec cette différence, que pour les surfaces, deux des coordonnées sont indépendantes entre elles, et la troisième est fonction de ces deux; de sorte qu'une surface n'est représentée que par une seule équation entre les trois coordonnées. Ainsi les deux équations qui déterminent une courbe à double courbure, représentent chacune en particulier une surface courbe, et la courbe représentée par le système de ces deux équations, est formée par l'intersection des deux surfaces. La théorie des surfaces dépend donc de l'analyse des fonctions de deux variables, et peut être traitée comme la théorie des courbes, et par les mêmes principes. Ainsi, de même qu'une ligne droite peut être tangente d'une courbe, un plan peut être tangent d'une surface, et on déterminera le plan tangent par la condition qu'aucun autre plan ne puisse être mené par le point de contact entre celui-là et la surface.

Soient x, y, z les trois coordonnées de la surface donnée, et p, q, r les coordonnées du plan tangent rapportées aux mêmes axes rectangulaires, on aura, par la nature de la surface,

$$z = \mathrm{f}(x, y),$$

et par la nature du plan,

$$r = a + bp + cq,$$

a, b, c étant les trois constantes qui déterminent la position du plan.

D'abord, pour que le plan ait avec la surface un point commun, il faut que son équation subsiste, en supposant que les coordonnées p, q, r deviennent x, y, z; ce qui donnera cette première équation,

$$z = a + bx + cy.$$

Considérons maintenant un autre point de la surface répondant aux coordonnées $x+i, y+o$, l'ordonnée perpendiculaire z deviendra $f(x+i, y+o)$. Faisons aussi dans l'équation du plan,

$$p = x+i, \quad q = y+o,$$

l'ordonnée perpendiculaire r deviendra

$$a + b(x+i) + c(y+o),$$

et la distance entre les points correspondans de la surface et du plan, sera exprimée par

$$f(x+i, y+o) - a - b(x+i) - c(y+o).$$

La fonction $f(x+i, y+o)$ peut se développer dans cette série (art. 73, Ire Partie)

$$f(x,y) + if'(x,y) + of_{,}(x,y) + \frac{i^2}{2} f''(x,y) + iof'_{,}(x,y) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x,y) + \text{etc.};$$

donc, à cause de

$$f(x,y) = z = a + bx + cy,$$

la distance dont il s'agit, que nous désignerons par D, sera exprimée ainsi :

$$D = i[f'(x,y) - b] + o[f_{,}(x,y) - c] + \frac{i^2}{2} f''(x,y) + iof'_{,}(x,y) + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x,y) + \text{etc.}$$

où l'on voit d'abord que les quantités i et o demeurant indéterminées, la valeur de D deviendra la plus petite, si on détermine

les quantités b et c de manière que les termes multipliés par i et o disparaissent, ce qui donnera

$$b = f'(x,y) = z', \quad c = f_{,}(x,y) = z, \quad \text{(art. 77, I}^{re}\text{ Part.)};$$

et comme on a déjà trouvé

$$a + bx + cy = z,$$

on aura les valeurs des trois constantes a, b, c de l'équation du plan en fonctions de x, y, z. Ces valeurs seront donc

$$a = z - xz' - yz_{,}, \quad b = z', \quad c = z_{,};$$

et la position du plan sera entièrement déterminée.

Par l'évanouissement des termes multipliés par les quantités i et o, l'expression de la distance D ne contiendra plus que des termes multipliés par des puissances ou des produits de ces mêmes quantités. Si on faisait passer un autre plan par le même point qui répond aux coordonnées x et y, on trouverait pour la distance que je nommerai Δ, entre les points de la surface et du nouveau plan correspondans aux coordonnées $x+i$ et $y=o$, une expression semblable à celle de D, mais où les termes multipliés par i et par o ne se détruiraient plus. Or, il est facile de voir qu'on peut prendre les quantités i et o assez petites pour que les termes multipliés par les premières puissances de i ou de o deviennent plus grands que les autres termes multipliés par des puissances ou des produits de plusieurs dimensions; ce qui porterait d'abord à conclure que l'on peut toujours donner à i et o des valeurs assez petites pour que la distance Δ surpasse la distance D; ensorte qu'il soit impossible que le dernier plan passe entre le premier et la surface.

39. Mais cette conséquence qui serait légitime si les expressions de D et Δ n'étaient composées que d'un nombre déterminé de termes, pourrait souffrir des difficultés à raison des suites infinies qui entrent dans ces expressions. On peut néanmoins les éviter en employant le développement que nous avons donné dans le

chapitre XIII de la première Partie, et en s'arrêtant aux termes du premier ordre. On aura ainsi

$$\begin{aligned} f(x+i,y+o) = f(x,y) &+ if'(x,y) + of_{,}(x,y) \\ &+ \frac{i^2}{2} f''(x+\lambda i, y+\lambda o) + iof'_{,}(x+\lambda i, y+\lambda o) \\ &+ \frac{o^2}{2} f_{,,}(x+\lambda i, y+\lambda o), \end{aligned}$$

et la valeur de la distance D se réduira à

$$\begin{aligned} D = \frac{i^2}{2} f''(x+\lambda i, y+\lambda o) + iof'_{,}(x+\lambda i, y+\lambda o) \\ + \frac{o^2}{2} f_{,,}(x+\lambda i, y+\lambda o). \end{aligned}$$

Pour tout autre plan représenté par l'équation

$$r = \alpha + \beta p + \gamma q,$$

et ayant le même point commun avec le premier plan et la surface, cette distance, que j'appellerai Δ, contiendrait, outre les termes précédens, encore ceux-ci du premier ordre

$$i[f'(x,y) - \beta] + o[f_{,}(x,y) - \gamma];$$

d'où il est facile de conclure qu'on pourra toujours prendre i et o assez petits pour que cette distance Δ surpasse la distance D. Donc il sera impossible que ce dernier plan puisse passer entre la surface et le plan représenté par l'équation

$$r = a + bp + cq;$$

par conséquent celui-ci sera tangent de la surface donnée, en faisant, comme ci-dessus,

$$a = z - xz' - yz_{,}, \quad b = z', \quad c = z_{,}.$$

D'où l'on voit que la position du plan tangent dépend des deux fonctions primes z' et $z_{,}$.

En effet, il est facile de trouver, d'après l'équation

$$r = a + bp + cq,$$

que si on nomme α l'inclinaison du plan représenté par cette équation sur le plan des coordonnées p et q, et β l'inclinaison de la ligne d'intersection de ces deux plans à l'axe des abscisses p, on aura

$$b = \sin\beta \operatorname{tang}\alpha, \quad c = \cos\beta \operatorname{tang}\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{(b^2 + c^2)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{b}{c}.$$

Donc, puisque les axes des coordonnées x, y, z sont les mêmes que ceux des coordonnées p, q, r, les angles α et β, relativement au plan tangent, seront pareillement déterminés par ces formules

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{(z'^2 + z_,^2)}, \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{z'}{z_,}.$$

40. En général, $z = f(x, y)$ étant l'équation de la surface proposée, et $r = F(p, q)$ celle d'une surface donnée, si on veut que ces deux surfaces aient un point commun qui réponde aux coordonnées x, y, z, il faudra que l'équation $r = F(p, q)$ ait lieu aussi en faisant $p = x$, $q = y$, $r = z$, ce qui donnera

$$z = F(x, y).$$

Ensuite, si on considère les points des deux surfaces qui répondent aux mêmes coordonnées $x + i$ et $y + o$, et qu'on nomme D la distance entre l'un et l'autre, c'est-à-dire la partie de l'ordonnée qui se trouvera comprise entre les deux surfaces, il est visible qu'on aura

$$D = f(x + i, y + o) - F(x + i, y + o).$$

Développons ces deux fonctions par les formules de l'article 78, première Partie, en nous arrêtant d'abord aux termes du premier ordre, nous aurons, en mettant z, z' et $z_,$ à la place de $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f_,(x, y)$,

$$\begin{aligned}D = {} & i[z' - F'(x,y)] + o[z_1 - F_1(x,y)] \\ & + \frac{i^2}{2}[f''(x+\lambda i, y+\lambda o) - F''(x+\lambda i, y+\lambda o)] \\ & + io[f'_1(x+\lambda i, y+\lambda o) - F'_1(x+\lambda i, y+\lambda o)] \\ & + \frac{o^2}{2}[f_{11}(x+\lambda i, y+\lambda o) - F_{11}(x+\lambda i, y+\lambda o)].\end{aligned}$$

Supposons que les termes multipliés par i et par o disparaissent, ce qui a lieu en faisant $z' = F'(x,y)$ et $z_1 = F_1(x,y)$, l'expression de D ne contiendra plus que des termes d'un ordre supérieur; et il est facile de prouver qu'on pourra toujours prendre i et o assez petits pour que cette valeur de D devienne moindre que la valeur d'une pareille quantité pour une autre surface donnée, dans laquelle les termes multipliés par i et par o ne se détruiraient pas. Donc si l'équation $r = F(p,q)$ de la surface donnée contient trois constantes arbitraires a, b, c, et qu'on les détermine de manière à satisfaire aux trois équations

$$z = F(x,y), \quad z' = F'(x,y), \quad z_1 = F_1(x,y),$$

il sera impossible qu'aucune autre surface qui ne satisferait pas aux mêmes conditions, puisse passer entre cette même surface et la surface proposée dont les coordonnées sont x, y, z.

Il est visible que les trois équations précédentes ne sont autre chose que l'équation même de la surface donnée, en y changeant les coordonnées p, q, r en x, y, z, et les deux équations primes de celle-ci, prises suivant x et suivant y. D'où l'on peut conclure, en général, que si $F(p,q,r) = 0$ est l'équation de la surface donnée, les trois équations dont il s'agit seront renfermées dans celles-ci

$$F(x,y,z) = 0, \quad F'(x,y,z) = 0 \quad \text{et} \quad F_1(x,y,z) = 0.$$

en regardant z comme fonction de x et y; de sorte que si on désigne simplement par $F'(x), F'(y), F'(z)$ les fonctions primes de $F(x,y,z)$, prises relativement à x, y, z seuls, les deux dernières équations deviendront,

$$F'(x) + z'F'(z) = 0, \quad F'(y) + z_1F'(z) = 0.$$

Donc, si la surface proposée est représentée par l'équation $f(x, y, z) = 0$, et que la surface donnée qui doit avoir un point de contact avec celle-là, soit représentée par l'équation $F(x, y, z) = 0$, la première donnera, en prenant les fonctions primes relatives à x et y, ces deux-ci

$$f'(x) + z'f'(z) = 0, \quad f'(y) + z_{,}f'(z) = 0.$$

Ces deux équations combinées avec les deux précédentes, de manière à en chasser les dérivées z' et $z_{,}$, on aura ces deux-ci

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{f'(z)}{F'(z)}, \quad \frac{f'(y)}{F'(y)} = \frac{f'(z)}{F'(z)},$$

d'où il s'ensuit que les trois fonctions dérivées $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ doivent être respectivement proportionnelles aux fonctions dérivées $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$.

41. Si dans l'expression générale de la distance D, on développe les deux fonctions qu'elle contient, en poussant le développement jusqu'aux secondes dimensions de i et o, et qu'on suppose que les trois équations ci-dessus aient déjà lieu, on aura simplement

$$D = \frac{i^2}{2}[z'' - F''(x,y)] + io[z'_{,} - F'_{,}(x,y)] + \frac{o^2}{2}[z_{,,} - F_{,,}(x,y)]$$
$$+ \frac{i^3}{2.3}A''' + \frac{i^2 o}{2}A''_{,} + \frac{io^2}{2}A'_{,,} + \frac{o^3}{2.3}A_{,,,},$$

en faisant, pour abréger,

$$A'' = f''(x + \lambda i, y + \lambda o) - F''(x + \lambda i, y + \lambda o),$$
$$A''_{,} = f''_{,}(x + \lambda i, y + \lambda o) - F''_{,}(x + \lambda i, y + \lambda o),$$
etc.

Donc, si l'équation $r = F(p, q)$ de la surface donnée, est telle qu'on puisse encore satisfaire aux trois équations

$$z'' = F''(x,y), \quad z'_{,} = F'_{,}(x,y), \quad z_{,,} = F_{,,}(x,y),$$

les termes du second ordre disparaîtront aussi dans l'expression de

de D, et on prouvera aisément qu'il sera toujours possible de prendre les quantités i et o assez petites pour que la distance D soit plus petite que la distance Δ pour toute autre surface donnée qui ne satisferait pas aux mêmes conditions; d'où il suit qu'il sera impossible que cette surface passe entre la surface donnée dont l'équation est

$$r = F(p, q),$$

et la proposée dont l'équation est

$$z = f(x, y);$$

et ainsi de suite.

Si on représente en général par $F(p, q, r) = o$ l'équation de la surface donnée, qui doit avoir un point de contact avec une autre surface dont les coordonnées sont x, y, z, les trois dernières équations seront renfermées dans celles-ci :

$$F''=(x,y,z)=o, \quad F'_{,}(x,y,z)=o \quad \text{et} \quad F_{,,}(x,y,z)=o,$$

en regardant z comme fonction de x et y; et ainsi des autres.

On pourra donc étendre aux surfaces la théorie des contacts de différens ordres que nous avons exposée relativement aux lignes courbes, et en déduire des résultats semblables. Ainsi, pour le contact du premier ordre, on aura l'équation

$$F(x, y, z) = o$$

avec ses deux équations primes suivant x et y; pour le contact du second ordre, on aura, outre les trois équations précédentes, les trois équations secondes de

$$F(x, y, z) = o,$$

suivant x, suivant y, et suivant x et y; et ainsi de suite.

42. Prenons, pour la surface donnée, la sphère dont l'équation la plus générale est

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2=d^2,$$

p, q, r étant les trois coordonnées d'un point quelconque de sa surface, a, b, c les trois coordonnées qui déterminent la position du centre, et d le demi-diamètre, ou le rayon.

En changeant dans cette équation p, q, r en x, y, z, et prenant ensuite les deux équations primes suivant x et y, on aura ces trois équations.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0,$$
$$x-a+z'(z-c)=0,$$
$$y-b+z_{,}(z-c)=0,$$

par lesquelles on pourra déterminer d'abord les trois constantes a, b, c; on trouvera ainsi

$$a=x+\frac{dz'}{V(1+z'^2+z_{,}^2)},$$
$$b=y+\frac{dz_{,}}{V(1+z'^2+z_{,}^2)},$$
$$c=z-\frac{d}{V(1+z'^2+z_{,}^2)},$$

et le rayon d sera encore arbitraire.

La sphère déterminée par ces élémens sera donc tangente de la surface, et par conséquent son rayon sera perpendiculaire à la même surface. Ainsi en regardant la valeur de ce rayon comme indéterminée, les trois quantités a, b, c seront les coordonnées de la perpendiculaire à la surface, d étant variable, et x, y, z constantes.

Si l'on veut avoir ces élémens a, b, c, ainsi que les angles α et β de l'article 39, exprimés en différentielles, il n'y aura qu'à représenter les fonctions dérivées z', $z_{,}$ par les différences partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$.

43. Pour que la sphère devienne osculatrice de la surface, on aura encore trois autres équations, qui seront les trois équations secondes de la première équation ci-dessus; mais comme il ne reste plus qu'une arbitraire d, il est clair qu'on ne pourra pas satisfaire à toutes ces équations; d'où il suit qu'il est impossible de

trouver en général une sphère osculatrice d'une surface, comme on trouve le cercle osculateur d'une courbe.

Si, au lieu d'une sphère, on voulait employer la surface formée par la rotation d'un arc de cercle autour de sa corde; comme on aurait dans l'équation de cette surface six constantes arbitraires, on pourrait alors déterminer ces élémens de manière que le contact du second ordre eût lieu en général avec une surface quelconque. Il en serait de même pour toute autre surface dont l'équation renfermerait au moins six constantes arbitraires.

CHAPITRE IX.

Des sphères osculatrices. Des lignes de plus grande et de moindre courbure. Propriétés de ces lignes.

44. Nous venons de voir que parmi toutes les sphères touchantes, il ne peut y en avoir aucune qui devienne proprement osculatrice de la surface, mais on peut toujours déterminer celle qui sera osculatrice d'une courbe quelconque tracée sur la même surface. Pour cela, il n'y aura qu'à supposer y fonction de x, comme dans les courbes à double courbure, et prendre, dans cette hypothèse, les équations primes et secondes de l'équation de la sphère

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-d^2=0.$$

L'équation prime sera

$$x-a+y'(y-b)+(z'+y'z_{,})(z-c)=0,$$

en regardant toujours z comme fonction de x et y, dont les deux fonctions primes sont z' et $z_{,}$, et ensuite y comme fonction de x, dont y' est la fonction prime. On trouvera, de la même manière, cette équation seconde

$$1+y'^2+y''(y-b)+(z'+y'z_{,})^2+(z''+2y'z'_{,}+y'^2z_{,,}+y''z_{,})(z-c)=0.$$

L'équation prime est déjà remplie par les deux équations primes de l'article 42,

$$x-a+z'(z-c)=0, \quad y-b+z_{,}(z-c)=0.$$

Ainsi, il ne reste qu'à satisfaire à l'équation précédente, laquelle, à cause de $y-b+z_{,}(z-c)=0$, se réduit à celle-ci

$$1+y'^2+(z'+y'z_{,})^2+(z''+2y'z'_{,}+y'^2z_{,,})(z-c)=0.$$

Si donc on substitue dans cette équation la valeur de c trouvée ci-dessus (article cité), on en pourra tirer la valeur de d, et l'on aura

$$d = -\frac{[1+y'^2+(z'+y'z_{,})^2]\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}}{z''+2y'z'_{,}+y'^2z_{,,}}.$$

Connaissant ainsi le rayon d de la sphère osculatrice, on aura, par les formules du même article, les valeurs des coordonnées a, b, c du centre.

45. La quantité y' qui entre dans les expressions précédentes, dépend de la courbe qui est la projection de celle qu'on suppose tracée sur la surface. Cette courbe étant arbitraire, on peut chercher celle dans laquelle le rayon de courbure d sera un *maximum* ou *minimum;* et pour cela, il n'y aura qu'à égaler à zéro la fonction prime de l'expression de d, regardée comme fonction de y' (art. 26). Mais pour simplifier le calcul, nous observerons que puisque $d=(z-c)\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$, le *maximum* ou *minimum* de d, relativement à y', répondra au *maximum* ou *minimum* de c; ainsi, il n'y aura qu'à prendre l'équation prime de la dernière équation ci-dessus entre c et y', en supposant nulle la fonction prime de c, c'est-à-dire, en ne regardant que y' comme variable. On aura de cette manière l'équation

$$y'+z_{,}(z'+y'z_{,})+(z'_{,}+y'z_{,,})(z-c)=0,$$

qui, étant combinée avec la même équation, servira à déterminer y' et c.

Si on multiplie cette équation par y' et qu'on la retranche de l'équation dont il s'agit, on aura celle-ci plus simple,

$$1+z'^2+y'z'z_{,}+(z''+y'z'_{,})(z-c)=0,$$

qu'on combinera avec la précédente.

Par l'élimination de $z-c$, on aura une équation en y' de cette forme :

$$Ay'^2-By'-C=0,$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned} A &= (1 + z_{,}^{2})\, z_{,}' - z' z_{,} z_{,,} \\ B &= (1 + z'^{2})\, z_{,,} - (1 + z_{,}^{2})\, z'' \\ C &= (1 + z'^{2})\, z_{,}' - z' z_{,} z''; \end{aligned}$$

et la résolution de cette équation donnera

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2A};$$

équation du premier ordre en x, y et y', puisque z étant, par la nature de la surface, une fonction donnée de x et y, les quantités A, B, C seront aussi des fonctions données de x et y. Donc l'équation primitive en x et y renfermera une constante arbitraire, et représentera une infinité de courbes qui seront les projections des lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface proposée.

Si on combine les deux équations ci-dessus de manière à faire disparaître les termes où y' et $z - c$ se trouvent ensemble, on en tirera

$$z - c = \frac{(1 + z'^{2})\, z_{,,} - z' z_{,} z_{,}' - A y'}{z_{,}'^{2} - z'' z_{,,}}.$$

Donc, substituant la valeur de y', et faisant de plus

$$E = 2z' z_{,} z_{,}' - (1 + z'^{2})\, z_{,,} - (1 + z_{,}^{2})\, z'',$$

on aura

$$z - c = \frac{E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2(z'' z_{,,} - z_{,}'^{2})},$$

et de là

$$d = \frac{[E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}]\, \sqrt{(1 + z'^{2} + z_{,}^{2})}}{2(z'' z_{,,} - z_{,}'^{2})};$$

d'où l'on voit que les deux valeurs du radical donnent, l'une le *maximum*, et l'autre le *minimum* du rayon d.

Il y a donc, à chaque point de la surface, deux branches qui se coupent et qui répondent, l'une à une ligne de plus grande, et l'autre à une ligne de moindre courbure; et l'angle sous lequel elles se coupent, dépend de la double valeur de la quantité y', qui est

égale à la tangente de l'angle formé par la tangente de la courbe de projection sur le plan des x et y avec l'axe fixe des x. Or, comme la position de ce plan est arbitraire, on peut la prendre de manière qu'il coïncide avec le plan tangent de la surface, alors la projection de la courbe se confondra avec la courbe même, et les deux valeurs de y' deviendront les tangentes des angles que les tangentes des deux branches de plus grande et de moindre courbure feront avec une même ligne; par conséquent la différence de ces angles sera l'angle cherché sous lequel ces branches se coupent; donc, nommant α et β les deux valeurs de y', la tangente de cet angle sera, par les formules connues,

$$\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=\frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{A-C}.$$

Mais il est facile de voir, par les formules de l'article 38, que, pour que le plan tangent d'une surface coïncide avec le plan des x et y, il faut que les valeurs de z' et $z_{,}$ soient nulles. Faisant donc dans les expressions de A, B, C,

$$z'=0,\quad z_{,}=0,$$

on aura

$$A=z'_{,},\quad B=z_{,,}-z'',\quad C=z'_{,},$$

ce qui donne

$$A-C=0.$$

Ainsi la tangente de l'angle dont il s'agit sera infinie, et par conséquent l'angle sera droit. D'où l'on doit conclure, en général, que les lignes de plus grande et de moindre courbure d'une surface quelconque se coupent toujours à angles droits.

46. La propriété du *maximum* et du *minimum* n'est pas la seule qui caractérise ces lignes, elles sont encore distinguées par rapport à leurs développées. En effet, si on cherche les conditions nécessaires pour que le rayon de courbure soit partout tangent à la courbe des centres, on trouvera, par des considérations semblables à celles de l'article 35, appliquées aux expressions des coordonnées a, b, c de cette courbe (art. 42), que ces conditions

se réduisent à ce que les valeurs des fonctions primes a', b', c' soient les mêmes, soit que la quantité d soit seule variable, ou que les quantités x, y, z varient en même temps que d. Ainsi, si on prend les équations primes des trois équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2,$$
$$x-a+z'(z-c)=0, \quad y-b+z_{,}(z-c)=0 \quad \text{(art. 42)},$$

d'où résultent les valeurs de a, b, c, il faudra que la partie due à la seule variation de x, y, z soit nulle. Or, il est visible que la seconde et la troisième équation rendent nulle cette partie dans l'équation prime de la première équation; donc il suffira de prendre les équations primes des équations

$$x-a+z'(z-c)=0, \quad y-b+z_{,}(z-c)=0,$$

en regardant a, b et c comme constantes. Ces équations seront donc, en regardant comme ci-dessus (art. 44), y comme fonction de x, et z comme fonction de x et y,

$$1+z'^2+y'z'z_{,}+(z''+y'z'_{,})(z-c)=0,$$
$$y'+z_{,}z'+y'z_{,}^2+(z'_{,}+y'z_{,,})(z-c)=0;$$

et si on les compare aux deux équations de l'article précédent, qui déterminent le *maximum* et le *minimum* de d, on voit qu'elles sont identiquement les mêmes; d'où il suit que les lignes suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou de la moindre courbure.

Mais les expressions de a, b, c de l'article 42 donnent, en ne faisant varier que d,

$$a'=\frac{d'z'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},$$
$$b'=\frac{d'z_{,}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},$$
$$c'=-\frac{d'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}};$$

d'où l'on tire

$$a'^2+b'^2+c'^2=d'^2,$$

et

et par conséquent

$$d' = \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)};$$

d'où l'on conclura (art. 37) que la quantité d sera égale à l'arc de la courbe dont a, b, c sont les coordonnées. Ainsi cette courbe sera la véritable développée des lignes de plus grande et de moindre courbure; et réciproquement il n'y aura, sur une surface quelconque, que ces lignes qui puissent avoir une développée formée par les rayons de courbure.

Ces propriétés des surfaces sont très-curieuses, et méritent toute l'attention des géomètres; elles donnent lieu surtout à des applications importantes pour les arts. Voyez les Mémoires de Berlin pour l'année 1760, les tomes IX et X des Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, et l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par M. Monge.

Au reste, pour traduire ces formules en calcul différentiel, il n'y aura qu'à changer y', y'' en $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, et z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ en $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$.

CHAPITRE X.

Solution des questions dans lesquelles on propose une relation entre les élémens du contact du premier ordre des surfaces courbes. Construction de cette solution. Équation des surfaces développables.

47. On peut proposer sur les différens contacts des surfaces, des problèmes analogues à ceux qui nous ont occupés, relativement aux lignes courbes (chap. III), et les résoudre par des principes semblables. Nous nous contenterons ici de considérer les contacts du premier ordre.

Suivant les formules de l'article 41, si l'équation $F(p,q,r)=0$, de la surface donnée, contient trois constantes arbitraires a, b, c, pour que cette surface ait un contact du premier ordre avec une surface quelconque rapportée aux coordonnées x, y, z, il faut déterminer a, b, c en x, y, z, par les trois équations

$$F(x,y,z)=0, \quad F'(x,y,z)=0, \quad F_{,}(x,y,z)=0,$$

dont les deux dernières se réduisent à la forme

$$F'(x)+z'F'(z)=0 \quad \text{et} \quad F'(y)+z_{,}F'(z)=0.$$

Donc, si la question est de trouver la surface pour laquelle les trois élémens du contact a, b, c auront entre eux une relation déterminée, il faudra substituer, dans l'équation qui exprime cette relation, les valeurs de a, b, c, et si cette équation est entre les quantités a, b, c et x, y, z, on aura une équation du premier ordre en x, y, z, z' et $z_{,}$, qu'on pourra traiter par la méthode générale de l'article 92 de la première Partie.

Mais si l'équation dont il s'agit n'était qu'entre les trois quantités a, b, c, la solution du problème serait beaucoup plus simple. En effet, il est clair qu'on peut alors supposer que les quantités a, b, c soient constantes; et dans ce cas, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

sera l'équation primitive de l'équation du premier ordre donnée par les conditions du problème, en y substituant pour une des trois constantes a, b, c, sa valeur tirée de l'équation donnée; on aura ainsi une équation primitive qui ne sera que particulière; mais comme elle renferme deux constantes arbitraires, on pourra, par la méthode de l'art. 83 de la première Partie, trouver l'équation primitive générale qui donnera la solution complète du problème.

On fera donc, suivant cette méthode, $b = \varphi a$, si a et b sont les deux constantes arbitraires; et on éliminera a au moyen de l'équation $F(x, y, z) = 0$ et de son équation prime, prise relativement à la seule quantité a, équation représentée par

$$F'(a) + \varphi' a \times F'(b) = 0,$$

en dénotant par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$, relativement aux variables isolées a et b.

48. Pour voir comment le système de ces deux équations satisfait au problème, on observera d'abord que l'équation $F(x, y, z) = 0$ représente la courbe donnée avec laquelle la proposée doit avoir un contact du premier ordre; ainsi cette équation résout le problème, quelles que soient les constantes arbitraires a et b. Mais comme le contact demandé par le problème, exige seulement que les valeurs de z et de ses deux fonctions primes z' et $z_,$ soient les mêmes pour les deux courbes, il s'ensuit qu'il aura également lieu en supposant a et b variables, pourvu que ces fonctions primes soient encore les mêmes. Or, c'est précisément ce qui résulte du système des deux équations dont il s'agit, comme on peut s'en convaincre par l'article cité.

Nous observerons ensuite que la surface représentée par le

système de ces équations, ne sera autre chose que la surface formée par l'intersection continuelle des surfaces représentées par la même équation $F(x, y, z) = 0$, en y faisant varier le paramètre a; de manière que cette surface touchera ou enveloppera à la fois toutes ces différentes surfaces particulières. En effet, si on représente, ce qui est permis, cette surface enveloppante par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

dans laquelle a soit une quantité variable quelconque, et qu'on cherche à déterminer cette quantité, de manière que la même surface touche successivement toutes les surfaces données, il faudra satisfaire à l'équation

$$F'(a) + \varphi' a \times F'(b) = 0$$

pour que les valeurs de z' et $z_{,}$ soient les mêmes que celles des surfaces enveloppées. Ceci répond à ce qu'on a trouvé plus haut (art. 19), relativement aux lignes courbes.

49. Puisque l'équation $F(x, y, z) = 0$ renferme les trois arbitraires a, b, c qui doivent être déterminées par la combinaison de cette équation avec ses deux équations primes prises relativement à x et y, en regardant a, b, c comme constantes (art. 47); si on regarde maintenant ces quantités comme des fonctions de x et y, il est clair qu'on aura aussi séparément les deux équations primes de la même équation relativement à ces quantités. Ainsi, en désignant par $F'(a)$, $F'(b)$, $F'(c)$ les fonctions primes de la fonction $F(x, y, z)$ prises relativement aux seules quantités a, b, c considérées séparément, on aura encore ces deux équations primes

$$a'F'(a) + b'F'(b) + c'F'(c) = 0,$$
$$a_{,}F'(a) + b_{,}F'(b) + c_{,}F'(c) = 0.$$

Soit $c = f(a, b)$ l'équation qui exprime la relation donnée entre les quantités a, b, c, en prenant de même les deux équations primes, on aura

$$c' = a'f'(a) + b'f'(b),$$
$$c_{,} = a_{,}f'(a) + b_{,}f'(b),$$

$f'(a)$ et $f'(b)$ étant les deux fonctions primes de $f'(a, b)$ prises relativement à a et b isolées. Substituant ces valeurs de c' et c_1 dans les deux équations précédentes, on aura

$$a'[F'(a)+f'(a)\times F'(c)]+b'[F'(b)+f'(b)\times F'(c)]=0,$$
$$a_1[F'(a)+f'(a)\times F'(c)]+b_1[F'(b)+f'(b)\times F'(c)]=0,$$

d'où l'on tire cette équation

$$a'b_1-b'a_1=0,$$

où la fonction désignée par la caractéristique f n'entre plus.

Si donc on substitue dans cette équation $a'b_1-b'a_1=0$ les valeurs de a, b en x, y, z, z' et z_1, on aura une équation du second ordre, dont l'équation primitive du premier ordre sera

$$c=f(a, b),$$

la fonction désignée par f étant arbitraire; et l'équation primitive de celle-ci, entre x, y, z sera le système de l'équation

$$F(x, y, z)=0,$$

et de son équation prime prise relativement à a, après y avoir substitué $f(a, b)$ pour c, et φa pour b, la fonction φa étant la seconde fonction arbitraire. Ainsi on pourra, de cette manière, trouver l'équation primitive de toute équation du second ordre réductible à la forme

$$a'b_1-b'a_1=0;$$

les quantités a, b étant déduites d'une équation quelconque

$$F(x, y, z, a, b, c)=0,$$

entre les quantités x, y, z, a, b, c, et de ses deux équations primes prises dans l'hypothèse de a, b, c constantes; ce qui fournit une méthode importante pour les progrès de l'analyse inverse des fonctions de deux variables.

5o. Appliquons la théorie précédente aux plans tangens. Nous

avons trouvé plus haut que les élémens a, b, c du contact d'un plan représenté par l'équation

$$r = a + bp + cq,$$

sont exprimés ainsi :

$$a = z - xz' - yz_{,}, \quad b = z', \quad c = z_{,}.$$

Donc, si l'on a une équation quelconque entre ces trois quantités, laquelle donne, par exemple,

$$c = \mathrm{f}(a, b),$$

l'équation primitive de cette équation du premier ordre sera représentée par le système de ces deux équations

$$z = a + x\varphi a + y\mathrm{f}(a, \varphi a),$$
$$1 + x\varphi' a + y\mathrm{f}(a)' = 0,$$

en dénotant par $\varphi' a$ et $\mathrm{f}(a)'$ les fonctions primes de φa et de $\mathrm{f}(a, \varphi a)$ relatives à a. La quantité a devra être éliminée pour avoir une équation en x, y, z; et la fonction φa sera la fonction arbitraire.

Cette équation sera donc celle de la surface formée par l'intersection continuelle de tous les plans représentés par l'équation

$$z = a + x\varphi a + y\mathrm{f}(a, \varphi a),$$

en faisant varier successivement le paramètre a; ce sera par conséquent une surface développable, puisqu'on peut concevoir que le même plan tangent, supposé flexible et inextensible, s'applique et se plie sur la surface, sans duplicature ni solution de continuité, et réciproquement, que la surface s'applique et se développe sur le même plan sans se briser ou se replier.

Puisque $a = z - xz' - yz_{,}$, et $b = z'$, on aura

$$a' = -xz'' - yz'_{,}, \quad a_{,} = -xz'_{,} - yz_{,,}, \quad b' = z'', \quad b_{,} = z'_{,},$$

donc l'équation $a'b_{,} - a_{,}b' = 0$ (art. 49) deviendra

$$(xz'' + yz'_{,})\, z'_{,} - (xz'_{,} + yz_{,,})\, z'' = 0;$$

savoir,

$$z'^2_{,} - z''z_{,,} = 0.$$

Ce sera l'équation générale des surfaces développables, dont par conséquent l'équation primitive sera le système de ces deux-ci

$$z = a + x\varphi a + y\mathfrak{f}a \quad \text{et} \quad 1 + a\varphi' a + y\mathfrak{f}' a = 0,$$

φa et $\mathfrak{f}a$ dénotant deux fonctions arbitraires de a. Voyez le tome X des *Novi Commentarii* de Pétersbourg, et les ouvrages déjà cités à la fin du chapitre précédent.

CHAPITRE XI.

Des plus grandes et des moindres ordonnées des surfaces courbes. Solution générale des questions de maximis *et* minimis. *Manière de distinguer les* maxima *des* minima *dans les fonctions de plusieurs variables.*

51. Si on demande les plus grandes et les moindres ordonnées d'une surface donnée, il est aisé de concevoir qu'elles ne peuvent répondre qu'aux points où le plan tangent devient parallèle au plan des x et y; donc on aura dans ces points, tang $\alpha = 0$, et par conséquent

$$z'^2 + z_{,}^2 = 0 \quad (\text{art. } 39),$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant à la fois $z' = 0$ et $z_{,} = 0$. Ce sont là les conditions nécessaires pour que l'ordonnée z devienne un *maximum* ou un *minimum*.

Puisque z peut représenter une fonction quelconque de x et y, on en conclura en général, que pour qu'une fonction de deux variables devienne un *maximum* ou un *minimum*, il faut que ses deux fonctions primes relatives à chacune de ces variables, soient nulles.

Mais on peut parvenir directement à cette conclusion par la considération des fonctions d'une seule variable, suivant la théorie de l'art. 24, et trouver en même temps les conditions nécessaires pour que le *maximum* ou *minimum* ait lieu. En effet, z étant fonction de x et y, on peut supposer d'abord x donné, et chercher le *maximum* ou *minimum* de z relativement à y; on aura pour cela l'équation $z_{,} = 0$, et ensuite $z_{,,} < 0$ pour le *maximum*, et > 0 pour le *minimum*. Si donc on substitue dans z la valeur de y tirée de

de l'équation $z_{,}=0$, cette quantité z deviendra une simple fonction de x, et sera déjà un *maximum* ou *minimum* relativement à y. Il n'y aura donc qu'à la rendre encore un *maximum* ou *minimum* relativement à la quantité x qui avait été supposée constante; or, y devant maintenant être regardée comme une fonction de x donnée par l'équation $z_{,}=0$, il est clair que la fonction prime de z relativement à x, ne sera pas simplement z', mais $z'+y'z_{,}$; et sa fonction seconde relative aussi à x, sera $z''+2y'z'_{,}+y'^{2}z_{,,}+y''z_{,}$, en désignant toujours par y' et y'', les fonctions primes et secondes de y relativement à x. On aura donc

$$z'+y'z_{,}=0;$$

et comme on a déjà $z_{,}=0$, cette seconde équation se réduira à $z'=0$. De sorte qu'on aura pour la détermination de x et y, les deux conditions $z'=0$, $z_{,}=0$, comme plus haut.

Maintenant il faudra de plus que l'on ait $z''+2y'z'_{,}+y'^{2}z_{,,}+y''z_{,}<0$ pour le *maximum*, et >0 pour le *minimum*; mais comme y doit être déterminée par l'équation $z_{,}=0$, y' le sera par son équation prime

$$z'_{,}+y'z_{,,}=0,$$

laquelle donne

$$y'=-\frac{z'_{,}}{z_{,,}}.$$

Ainsi on aura pour le *maximum*

$$z''-\frac{z'^{2}_{,}}{z_{,,}}<0,$$

et pour le *minimum*,

$$z''-\frac{z'^{2}_{,}}{z_{,,}}>0;$$

ou bien, puisque $z_{,,}$ doit être aussi <0 dans le premier cas, et >0 dans le second, il faudra que l'on ait, tant pour le *maximum* que pour le *minimum*,

$$z''z_{,,}-z'^{2}_{,}>0.$$

D'où l'on peut conclure que les valeurs de x et y tirées des équations $z'=0$ et $z_{,}=0$, donneront un *maximum* ou un *minimum*,

suivant que l'on aura $z_{,,} <$ ou > 0, pourvu que l'on ait en même temps

$$z''z_{,,} - z'^{2}_{,} > 0,$$

ce qui emporte, comme l'on voit, la condition que z'' et $z_{,,}$ soient de même signe.

Donc, si $z''z_{,,} - z'^{2}_{,} =$ ou < 0, il n'y aura ni *maximum* ni *minimum*, à moins que les fonctions tierces ne disparaissent aussi, auquel cas le jugement dépendra des fonctions quartes, et ainsi de suite.

Il ne suffit donc pas pour l'existence du *maximum* ou *minimum*, que l'on ait $z'' < 0$ et $z_{,,} < 0$, ou $z'' > 0$ et $z_{,,} > 0$, comme on pourrait le conclure du chapitre XI de la seconde partie du calcul différentiel d'Euler.

52. Il est facile d'appliquer la méthode précédente aux fonctions de trois variables. Supposons que u soit fonction des variables x, y, z; regardant d'abord x et y comme constantes, et z seul comme variable, on aura, suivant la notation déjà adoptée (art. 92, Ire Partie), $_{,}u = 0$ pour la condition du *maximum* ou *minimum*, et ensuite $_{,,}u < 0$ pour le *maximum* et $_{,,}u > 0$ pour le *minimum*. L'équation $_{,}u = 0$ donnera la valeur de z en x et y, qu'on substituera ou qu'on supposera substituée dans la fonction u, moyennant quoi cette fonction ne contenant plus que les deux variables x et y, retombera dans le cas que nous venons de résoudre.

Pour construire des formules générales, on remarquera que si u n'était qu'une fonction de x et y, on aurait pour le *maximum* et *minimum* les conditions $u' = 0$ et $u_{,} = 0$; ensuite pour le *maximum* $u_{,,} < 0$, et pour le *minimum* $u_{,,} > 0$, et enfin $u''u_{,,} - u'^{2}_{,} > 0$ pour les deux cas. Mais puisque u contient de plus z qui est elle-même une fonction de x et y, les valeurs des fonctions désignées par u', $u_{,}$, u'', etc., ne seront pas simplement exprimées par ces quantités, mais il faudra y ajouter les termes qui doivent provenir de la quantité z, regardée comme fonction de x et y. Ainsi, en prenant les fonctions primes et secondes de u, on trouvera que la quantité u' devient $u' + {}_{,}uz'$, que la quantité $u_{,}$ devient $u_{,} + u_{,}z_{,}$, que la

quantité u'' devient $u''+2\,{}_{,}u'z'+{}_{,}uz''+{}_{,,}uz'^{2}$, que la quantité $u_{,,}$ devient $u_{,,}+2\,{}_{,}u_{,}z_{,}+{}_{,}uz_{,,}+{}_{,,}uz_{,}^{2}$, et que la quantité $u'_{,}$ devient $u'_{,}+{}_{,}u_{,}z'+{}_{,}u'z_{,}+{}_{,}uz'_{,}+{}_{,,}uz'z_{,}$.

Donc on aura d'abord pour le *maximum* ou *minimum*, les deux conditions

$$u'+{}_{,}uz'=0,\quad u_{,}+{}_{,}uz_{,}=0;$$

de sorte qu'à cause de ${}_{,}u=0$, on aura ces trois équations

$$u'=0,\quad u_{,}=0\quad\text{et}\quad {}_{,}u=0;$$

c'est-à-dire les trois fonctions primes de u relatives à x, y, z, chacune égale à zéro.

Ensuite, à cause de ${}_{,}u=0$, on aura

$$u_{,,}+2\,{}_{,}u_{,}z_{,}+{}_{,,}uz_{,}^{2}<0$$

pour le *maximum*, et >0 pour le *minimum;* et pour l'un et l'autre,

$$(u''+2\,{}_{,}u'z'+{}_{,,}uz'^{2})\,(u_{,,}+2\,{}_{,}u_{,}z_{,}+{}_{,,}uz_{,}^{2})>(u'_{,}+{}_{,}u_{,}z'+{}_{,}u'z_{,}+{}_{,,}uz'z_{,})^{2}.$$

Mais comme la valeur de z en x et y dépend de l'équation ${}_{,}u=0$, on prendra ses deux équations primes suivant x et y, pour avoir les valeurs de z' et de $z_{,}$; on aura donc

$${}_{,}u'+{}_{,,}uz'=0\quad\text{et}\quad {}_{,}u_{,}+{}_{,,}uz_{,}=0;$$

d'où l'on tire

$$z'=-\frac{{}_{,}u'}{{}_{,,}u}\quad\text{et}\quad z_{,}=-\frac{{}_{,}u_{,}}{{}_{,,}u}.$$

On substituera donc ces valeurs, et comme l'on a déjà trouvé ${}_{,,}u<0$ pour le *maximum*, et >0 pour le *minimum*, en multipliant la première condition par ${}_{,,}u$, on aura une quantité qui devra toujours être >0. Donc les conditions pour le *maximum* ou *minimum* se réduiront à ces trois-ci

$${}_{,,}u<0 \text{ pour le } \textit{maximum} \quad\text{et}\quad >0 \text{ pour le } \textit{minimum},$$

$${}_{,,}u\times u_{,,}-{}_{,}u_{,}^{2}>0,$$

$$\text{et}\quad ({}_{,,}uu''-{}_{,}u'^{2})\,({}_{,,}uu_{,,}-{}_{,}u_{,}^{2})>({}_{,,}uu'_{,}-{}_{,}u'\,{}_{,}u_{,})^{2}.$$

On voit par la marche de cette méthode, comment elle peut s'étendre à un plus grand nombre de variables, et on en peut d'abord conclure en général, que l'on aura les équations du *maximum* ou *minimum* d'une fonction quelconque de plusieurs variables, en égalant à zéro les fonctions primes de cette fonction, prises relativement à chacune de ces variables ; ce qui donnera autant d'équations que de variables. A l'égard des autres conditions nécessaires pour l'existence du *maximum* ou *minimum*, on les trouvera successivement par les principes et les formules que nous venons d'exposer.

53. Pour donner un exemple de la méthode *de maximis* et *minimis*, supposons qu'on demande la plus courte distance entre deux lignes droites données de position dans l'espace. Soit pour l'une des droites l'abscisse x, ses deux ordonnées seront de la forme $a+bx$ et $c+dx$; soit pareillement pour l'autre droite l'abscisse y prise sur le même axe, les deux ordonnées rapportées aussi aux mêmes axes que celles de la première droite, seront de la forme $A+By$ et $C+Dy$; donc, le carré de la distance entre les deux points qui répondent aux abscisses x et y, sera exprimé par cette formule

$$(x-y)^2+(a-A+bx-By)^2+(c-C+dx-Dy)^2,$$

que nous ferons, pour plus de simplicité, égale à $2z$.

En prenant les fonctions dérivées, on aura

$$\begin{aligned}
z' &= x-y+b(a-A+bx-By)+d(c-C+dx-Dy),\\
z_{,} &= -(x-y)-B(a-A+bx-By)-D(c-C+dx-Dy),\\
z'' &= 1+b^2+d^2,\\
z_{,,} &= 1+B^2+D^2,\\
z'_{,} &= -1-bB-dD.
\end{aligned}$$

Donc, 1°. on aura, pour la détermination des deux inconnues x et y, les équations

$$\begin{aligned}
x-y+b(a-A+bx-By)+d(c-C+dx-Dy) &= 0,\\
x-y+B(a-A+bx-By)+D(c-C+dx-Dy) &= 0.
\end{aligned}$$

2°. Puisque la valeur de z'' est nécessairement positive, il ne pourra y avoir que le *minimum*, mais il faudra de plus que l'on ait la condition

$$z''z_{,,} - z'^{2}_{,} > 0;$$

savoir,

$$(1+b^2+d^2)(1+B^2+D^2)-(1+bB+dD)^2>0.$$

Or, c'est ce qui a lieu, quelles que soient les valeurs de b, d, B, D; car la condition précédente peut se mettre sous cette forme

$$(b-B)^2+(d-D)^2+(bD-dB)^2>0.$$

Comme les équations en x et y sont linéaires, la détermination de ces quantités n'a aucune difficulté; nous ne nous y arrêterons pas, d'autant que ce problème est susceptible d'une solution géométrique fort élégante.

54. On peut encore, dans la recherche des *maxima* et *minima* des fonctions de plusieurs indéterminées, considérer toutes les variables à la fois, ce qui est plus direct et plus lumineux. Soit, en effet, $f(x,y,z,u...)$ la fonction proposée, si on suppose que les quantités x, y, z, u, etc. aient déjà les valeurs convenables pour le *maximum* ou *minimum*, il faudra qu'en substituant $x+p$, $y+q$, $z+r$, $u+s$, etc., à la place de x, y, z, u, etc., dans la fonction dont il s'agit, sa valeur devienne toujours plus petite dans le cas du *maximum*, et toujours plus grande dans le cas du *minimum*, quelles que soient les valeurs de p, q, r, s, etc., et quelque petites qu'elles soient; c'est ce qui résulte de la nature même du *maximum* ou *minimum*.

Développons la fonction $f(x+p,y+q,z+r,u+s...)$ suivant les puissances et les produits des quantités p, q, r, s, etc., par les formules du théorème général (art. 78, Ire Partie), et arrêtons-nous aux premiers termes de ce développement.

Si on désigne simplement (ainsi que nous l'avons pratiqué jusqu'ici) par $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$, $f'(u)$, etc. les fonctions primes de la fonction $f(x,y,z,u...)$, prises relativement à x, y, z, u, etc. considérés

séparément, et qu'on désigne de plus par $f''(x)$, $f''(x,y)$, $f''(y)$, $f''(x,z)$, $f''(y,z)$, $f''(z)$, etc. les fonctions secondes de la fonction

$$f(x+\lambda p, y+\lambda q, z+\lambda r, u+\lambda s\ldots),$$

prises relativement à x seul, à x et y, à y seul, à x et z, à y et z, et ainsi de suite, on aura

$$\begin{aligned} &f(x+p, y+q, z+r, u+s\ldots)\\ &=f(x,y,z,u\ldots)+pf'(x)+qf'(y)+rf'(z)+sf'(u)+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{2}p^2f''(x)+pqf''(x,y)+\tfrac{1}{2}q^2f''(y)+prf''(x,z)+\tfrac{1}{2}r^2f''(z)\\ &+qrf''(y,z)+\text{etc.} \end{aligned}$$

Le coefficient λ désigne un nombre indéterminé compris entre 0 et 1, et qui sera le même dans la même fonction, mais pourra être différent dans les différentes fonctions.

Donc, il faudra que la quantité

$$\begin{aligned} &pf'(x)+qf'(y)+rf'(z)+sf'(u)+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{2}p^2f''(x)+pqf''(x,y)+\tfrac{1}{2}q^2f''(y)+\text{etc.}, \end{aligned}$$

soit toujours positive pour le *minimum* et négative pour le *maximum*, en donnant à p, q, r, etc., des valeurs quelconques aussi petites qu'on voudra. D'où l'on conclura d'abord, par un raisonnement analogue à celui de l'article 25, que cette condition ne pourra être remplie, à moins que les termes multipliés par les premières puissances de p, q, r, etc. ne soient nuls chacun en particulier, ce qui donnera les équations

$$f'(x)=0,\quad f'(y)=0,\quad f'(z)=0,\quad f'(u)=0,\quad \text{etc.},$$

qui sont communes au *maximum* et au *minimum*, et qui étant en même nombre que les indéterminées x, y, z, u, etc., serviront à déterminer leurs valeurs.

55. Mais pour que ces valeurs donnent en effet un *maximum* ou un *minimum*, il faudra encore que la quantité restante

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}p^2f''(x)+pqf''(x,y)+\tfrac{1}{2}q^2f''(y)+prf''(x,z)\\ &+qrf''(y,z)+\tfrac{1}{2}r^2f''(z)+\text{etc.}, \end{aligned}$$

soit toujours positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*, quelles que soient les valeurs de p, q, r, etc., et quelque petites qu'elles puissent être.

Comme les fonctions $f''(x)$, $f''(x,y)$, etc., qui multiplient les carrés et les produits des quantités p, q, r, etc., renferment elles-mêmes ces quantités, il pourrait être difficile, et peut-être impossible de déterminer les caractères nécessaires pour que la condition dont il s'agit ait lieu rigoureusement; mais j'observe que si on suppose $\lambda = 0$, ces fonctions deviennent indépendantes de p, q, r, etc., et ont des valeurs déterminées; et l'on trouve alors, comme on le verra dans un moment, des conditions entre ces mêmes fonctions, qui ne consistent que dans des inégalités entre des quantités composées de ces fonctions. Ces inégalités étant supposées avoir lieu pour des valeurs déterminées de x, y, z, etc., auront lieu encore pour les valeurs peu différentes $x+\lambda p$, $y+\lambda q$, $z+\lambda r$, etc., tant que les quantités λp, λq, λr, etc. ne passeront pas certaines limites qui pourront être aussi peu étendues qu'on voudra. Donc, puisque la condition exigée pour le *maximum* ou *minimum*, n'a besoin d'être remplie que pour des valeurs quelconques de p, q, r, etc., aussi petites qu'on voudra, il s'ensuit qu'il suffira de satisfaire à cette condition dans le cas de $\lambda = 0$; par conséquent on pourra supposer tout de suite $\lambda = 0$, ce qui réduira les fonctions $f''(x)$, $f''(x,y)$, $f''(y)$, etc., qui entrent dans la quantité ci-dessus $\frac{1}{2}p^2f''(x) + pqf''(x,y) +$ etc., à n'être que les fonctions secondes de la fonction donnée $f(x,y,z,u\ldots)$ prises relativement à x seul, à x et y, etc.

56. Tout se réduit donc à trouver les conditions pour qu'une quantité de la forme

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dpr + Eqr + Fr^2 + \text{etc.},$$

dans laquelle A, B, C, etc. sont des quantités données, et p, q, r, etc. dénotent des quantités indéterminées, soit toujours nécessairement positive ou négative, quelles que soient les valeurs de p, q, r, etc.

Supposons qu'elle doive être toujours positive, il est évident que, pour le cas contraire, il suffira de prendre négativement les coefficiens A, B, C, etc. Puisque cette quantité ne doit jamais devenir négative, il s'ensuit qu'elle doit avoir un *minimum* positif; et réciproquement, si elle n'a que des *minima* positifs, elle ne pourra jamais devenir négative. Il n'y a donc qu'à chercher les conditions nécessaires pour que la quantité dont il s'agit ait des *minima* tout positifs.

Suivant l'esprit de la méthode exposée ci-dessus (art. 52), on prendra les fonctions primes et secondes de la quantité proposée relativement à une seule variable, comme p, et on supposera la fonction prime égale à zéro, et la fonction seconde positive. On aura ainsi l'équation

$$2Ap + Bq + Dr + \text{etc.} = 0,$$

et la condition $A > 0$.

On substituera la valeur de p, tirée de l'équation précédente, dans la quantité proposée, laquelle deviendra ainsi de la forme

$$Lq^2 + Mqr + Nr^2 + Pqs + \text{etc.},$$

en faisant

$$L = C - \frac{B^2}{4A}, \quad M = E - \frac{BD}{2A}, \quad N = F - \frac{D^2}{4A}, \quad \text{etc.}$$

On prendra, de la même manière, les fonctions primes et secondes de cette transformée relativement à une seule variable q, et faisant la fonction prime égale à zéro, et la fonction seconde positive, on aura de nouveau l'équation

$$2Lq + Mr + Ps + \text{etc.} = 0,$$

et la condition $L > 0$.

On substituera pareillement dans la transformée précédente la valeur de q, tirée de cette équation; on aura la nouvelle transformée

$$Tr^2 + Vrs + Xs^2 + \text{etc.},$$

dans laquelle les coefficiens T, V, X, seront donnés en L, M, N, etc., comme

comme ceux-ci le sont en A, B, C, etc.; et continuant le même procédé, on aura l'équation

$$2Tr + Vs + \text{etc.} = 0,$$

et la condition $T > 0$; et ainsi de suite.

Maintenant il est aisé de voir que la dernière de ces transformées, celle qui ne contiendra plus qu'une seule des indéterminées p, q, r, etc., et qui sera par conséquent de la forme Zs^n, sera elle-même le *minimum* de la quantité proposée; d'où il s'ensuit que les conditions pour que cette quantité ait un *minimum* positif, seront

$$A > 0, \quad L > 0, \quad T > 0 \ldots . Z > 0;$$

et comme les équations qui déterminent les valeurs de p, q, r, etc., sont toutes linéaires, on en conclura que ce *minimum* sera le seul qui puisse avoir lieu. Ainsi, le problème est résolu rigoureusement.

Au reste, il est facile de voir que par ces différentes transformations, la quantité proposée deviendra de la forme

$$A\left(p + \frac{Bq + Dr + \text{etc.}}{2A}\right)^2 + L\left(q + \frac{Mr + Ps + \text{etc.}}{2L}\right)^2 + T\left(r + \frac{Vs + \text{etc.}}{2T}\right)^2 + \text{etc.},$$

laquelle sera évidemment toujours positive ou négative, suivant que les coefficiens A, L, T, etc. le seront tous à la fois; et l'on voit en même temps par cette forme, que les quantités A, L, T, etc. pourront être nulles, pourvu qu'elles ne le soient pas toutes à la fois.

Les conditions que nous venons de trouver deviendront donc celles du *maximum* ou *minimum* de la fonction $f(x, y, z, u \ldots)$, en faisant pour le *minimum*,

$$A = \tfrac{1}{2} f''(x), \quad B = f''(x, y), \quad C = \tfrac{1}{2} f''(y), \quad \text{etc.},$$

et pour le *maximum*,

$$A = -\tfrac{1}{2} f''(x), \quad B = -f''(x, y), \quad C = -\tfrac{1}{2} f''(y), \quad \text{etc.}$$

Il est facile de voir l'accord de ces résultats avec ceux de l'article 52; mais la méthode précédente a l'avantage de fournir un moyen simple d'étendre ces résultats à un nombre quelconque de variables.

57. Les principes exposés jusqu'ici sur la théorie des *maximis* et *minimis*, conduisent à cette conclusion générale : Si dans une fonction quelconque des variables x, y, z, etc., on substitue à la place de ces variables les quantités $x+p, y+q, z+r$, etc., et qu'on développe la fonction suivant les puissances et les produits des quantités p, q, r, etc., les termes où ces quantités ne se trouveront qu'à la première dimension, étant égalés chacun séparément à zéro, donneront les équations nécessaires pour que la fonction proposée devienne un *maximum* ou *minimum*; ensuite on considérera la quantité composée de tous les termes où p, q, r, etc. formeront deux dimensions, et il faudra pour le *minimum* que cette quantité soit toujours positive, et pour le *maximum* toujours négative, quelles que puissent être les valeurs de p, q, r, etc.

Si tous ces termes s'évanouissaient à la fois, il faudrait alors pour l'existence du *maximum* ou *minimum*, que tous les termes où p, q, r, etc. formeraient trois dimensions, disparussent aussi à la fois, et que la quantité composée des termes où p, q, r, etc. formeraient quatre dimensions, fût toujours positive pour le *minimum* et toujours négative pour le *maximum*, p, q, r, etc. ayant des valeurs quelconques; et ainsi de suite. Ce qui répond, comme l'on voit, au théorème de l'article 25.

Nous avons donné ci-dessus un moyen simple pour trouver les conditions qui rendent une quantité de la forme $Ap^2 + Bpq +$ etc. toujours positive ou négative; on pourrait, de la même manière, chercher celles qui rendraient toujours positives ou négatives des quantités de la forme $Ap^4 + Bp^3q +$ etc.; mais l'application de la méthode générale à ce cas, serait sujette à des difficultés de calcul qui pourraient la rendre impraticable; et c'est là un problème d'algèbre dont il serait à desirer qu'on pût avoir une solution complète.

58. Nous avons supposé jusqu'ici que les variables qui entrent

dans la fonction, sont indépendantes les unes des autres ; mais s'il y avait entre elles une ou plusieurs équations, il faudrait commencer par éliminer, au moyen de ces équations, autant de variables dans la fonction proposée, on chercherait ensuite la condition du *maximum* ou *minimum* par rapport aux variables qui seraient restées dans la fonction. C'est la méthode qui se présente naturellement ; mais on peut la simplifier beaucoup, en conservant toutes les variables, et réduisant l'élimination aux seules quantités p, q, r, etc.

En effet, supposons qu'on ait entre les variables x, y, z, etc. l'équation de condition

$$\varphi(x, y, z\ldots) = 0;$$

comme cette équation doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de x, y, z, etc., elle aura donc lieu aussi en mettant $x+p$, $y+q$, $z+r$, etc. à la place de x, y, z, etc. ; par conséquent on aura, par un développement semblable à celui de l'article 78, première Partie, l'équation

$$p\varphi'(x) + q\varphi'(y) + r\varphi'(z) + \text{etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}p^2\varphi''(x) + pq\varphi''(x,y) + \tfrac{1}{2}q^2\varphi''(y) + \text{etc.} = 0,$$

d'où l'on pourra tirer la valeur de p en série, qu'on substituera dans le développement de la fonction qui doit être un *maximum* ou un *minimum* ; ou bien on ajoutera simplement à ce développement la quantité qui forme le premier membre de l'équation précédente, multipliée par une quantité quelconque indéterminée qui pourra même être de la forme

$$a + bp + cq + dr + \text{etc.} + lp^2 + mpq + \text{etc.},$$

les coefficiens a, b, c, etc. étant indéterminés, et on égalera à zéro tous les termes qui contiendront la quantité p, ce qui servira à déterminer les inconnues a, b, c, etc.

Comme les équations du *maximum* ou *minimum* résultent de l'évanouissement des termes où les quantités p, q, r, etc. ne sont qu'à la première dimension, il suffira d'égaler à zéro chacun de ces termes, ce qui donnera sur-le-champ les équations

$$f'(x) + a\varphi'(x) = 0, \quad f'(y) + a\varphi'(y) = 0, \quad f'(z) + a\varphi'(z) = 0, \quad \text{etc.},$$

qu'on réduira ensuite à une de moins par l'élimination de l'inconnue a. A l'égard des termes où les quantités p, q, r, etc. formeront deux dimensions, on déterminera, par les méthodes exposées ci-dessus, les conditions qui doivent avoir lieu entre les coefficiens de ces termes, et on cherchera à satisfaire à ces conditions de la manière la plus générale, au moyen des quantités arbitraires b, c, d, etc.

Nous ne faisons ici qu'indiquer ces procédés dont il sera facile de faire l'application; mais on peut les réduire à ce principe général : lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être un *maximum* ou *minimum*, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et de chercher ensuite le *maximum* ou *minimum* comme si les variables étaient indépendantes; les équations qu'on trouvera combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues.

59. On peut résoudre, par les mêmes principes, les questions où il s'agit de trouver des courbes qui jouissent dans chacun de leurs points, de quelque propriété donnée de *maximum* ou *minimum*.

Supposons, par exemple, qu'on demande la courbe dans laquelle la quantité que nous avons nommée K dans le problème de l'article 15, soit un *maximum* ou *minimum* à chaque point de la courbe. Cette quantité est exprimée par la fonction

$$[y+(m-x)y'][y+(n-x)y'];$$

et la question consiste à trouver la valeur de y en x, qui rendra cette fonction un *maximum* ou *minimum*. Si les deux quantités y et y' étaient indépendantes l'une de l'autre, on pourrait déterminer le *maximum* ou *minimum* relativement à chacune de ces variables; mais comme ces quantités dérivent l'une de l'autre, et que leur relation demeure inconnue tant que l'une d'elles n'est pas une fonction déterminée de x, on ne peut chercher le *maximum*

ou *minimum* que par rapport à l'une de ces quantités; et il est naturel de prendre pour variable la quantité y' qui détermine la position de la tangente, en regardant les coordonnées x et y comme données pour chaque point de la courbe.

On prendra donc les fonctions primes et secondes de la fonction proposée, relativement à la quantité y' regardée comme seule variable; et égalant à zéro la fonction prime, on aura sur-le-champ l'équation

$$[y+(n-x)y'](m-x)+[y+(m-x)y'](n-x)=0,$$

laquelle donne, comme dans l'article cité,

$$y'=\frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)(n-x)};$$

pour l'équation de la courbe cherchée.

Ensuite on aura la fonction seconde $2(m-x)(n-x)$, laquelle fait voir que le *maximum* aura lieu dans toute la partie de la courbe pour laquelle les deux quantités $m-x$ et $n-x$ seront de signes différens, et que le *minimum* aura lieu pour la partie où $m-x$ et $n-x$ seront de même signe; de sorte que le *maximum* aura lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites m et n, et le *minimum* pour les valeurs de x qui tomberont hors de ces limites.

L'équation trouvée pour la courbe étant du premier ordre, elle est susceptible d'une équation primitive avec une constante arbitraire; et si on la met sous la forme

$$\frac{2y'}{y}=\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n},$$

on en déduira sur-le-champ cette équation primitive,

$$2\log y=\log(x-m)+\log(x-n)+\log h,$$

et passant des logarithmes aux nombres,

$$y^2=h(x-m)(x-n),$$

où h est une constante arbitraire. Cette équation est de la même forme que celle que nous avons trouvée dans l'endroit cité; ce qui doit être, puisqu'elles viennent l'une et l'autre de la même équation du premier ordre. En effet, l'équation trouvée ci-dessus pour le *maximum* ou *minimum*, étant multipliée par y'', a pour équation primitive

$$[y+(m-x)y'][y+(n-x)y']=\mathrm{K},$$

K étant une constante arbitraire; et celle-ci combinée avec la même équation pour en éliminer y', donnera le résultat trouvé dans le même endroit.

Donc, rapprochant cette solution de celle de l'article 15, on en conclura en général, que les sections coniques ont non-seulement la propriété déjà trouvée, que chaque tangente coupe sur les perpendiculaires élevées aux deux extrémités de l'axe, des parties dont le produit est constant, mais encore celle-ci, que la position de la tangente à chaque point de la courbe, regardé comme donné, est telle que ce même produit est un *maximum* pour l'ellipse, et un *minimum* ou plutôt un *maximum* négatif pour l'hyperbole.

60. En général, si on demande la courbe dans laquelle une fonction donnée de x, y, y', y'', etc. sera un *maximum* ou *minimum*, on pourra chercher le *maximum* ou *minimum* relativement à chacune des quantités y, y', y'', etc., ce qui donnera autant de solutions différentes; et l'on aura toujours, généralement parlant, pour la courbe cherchée, une équation du même ordre que la fonction proposée.

Si cette fonction était une simple fonction des élémens a, b, c, etc. du contact (art. 10), en cherchant le *maximum* ou *minimum* relativement à la dernière des quantités y, y', y'', etc., on trouverait nécessairement la même équation que l'on aurait pour le problème dans lequel on supposerait cette même fonction égale à une constante; c'est de quoi il est facile de se convaincre par l'analyse des articles 20 et 18. En effet, en égalant à zéro la fonction prime de $f(a, b, c\ldots)$, prise relativement à la plus haute des fonctions

dérivées y', y'', etc., on aura la même équation que si on prenait, en général, la fonction prime de l'équation

$$f(a, b, c\ldots) = \text{const.}$$

relativement à x, y, y', etc. D'où l'on voit que ces deux genres de problèmes, quoique fort différens dans le fond, conduisent néanmoins aux mêmes résultats, et sont par conséquent susceptibles des mêmes solutions. Ainsi, on pourra appliquer ici tout ce qui a été dit dans les endroits cités. L'exemple de l'article précédent est, comme l'on voit, un cas particulier de ces mêmes problèmes.

CHAPITRE XII.

Des questions de maximis *et* minimis *qui se rapportent à la méthode des variations. De l'équation commune au* maximum *et au* minimum ; *et des caractères propres à distinguer les* maxima *des* minima.

61. Si le *maximum* ou *minimum*, au lieu d'être une fonction donnée de x, y, y', y'', etc., devait être la fonction primitive de celle-ci, regardée comme une fonction prime, alors il ne serait plus permis de traiter les quantités y, y', y'', etc. comme indépendantes et isolées, parce que la fonction primitive d'une fonction de ces quantités dépend elle-même de la relation qu'elles peuvent avoir entre elles. Les problèmes de ce genre sont ceux qui se rapportent au calcul connu sous le nom de *calcul des variations ;* ils ne demandent pas une analyse nouvelle, mais une application spéciale de l'analyse des fonctions que nous croyons devoir exposer ici, à cause de l'importance de la matière.

Soit donnée la fonction $f(x, y, y', y''\ldots)$, dans laquelle y est supposé une fonction de x, il est évident qu'on ne peut, généralement parlant, avoir la fonction primitive de cette fonction donnée, sans connaître la valeur de y en x. Mais on peut chercher quelle devrait être cette valeur, pour que la fonction primitive de $f(x, y, y', y'', \ldots)$ fût un *maximum* ou un *minimum*, en supposant que cette fonction soit nulle lorsque x aura une valeur donnée a, et qu'elle devienne un *maximum* ou un *minimum* lorsque x aura une autre valeur donnée b. Il est évident qu'en prenant y pour la valeur cherchée, il faudra, par la nature du *maximum* ou *minimum*, que la fonction primitive de la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega''\ldots)$$

qui

qui résulte de la fonction donnée, en mettant $y+\omega$ à la place de y, soit toujours, entre les mêmes limites de x, moindre dans le cas du *maximum*, et plus grande dans le cas du *minimum*, que la fonction primitive de $f(x,y,y',y''\ldots)$, quelle que soit la valeur de ω, qu'on pourra regarder comme une fonction quelconque de x, et quelque petite que cette valeur puisse être.

La fonction $f(x,y+\omega,y'+\omega',y''+\omega''\ldots)$ étant développée suivant les puissances et les produits de ω, ω', ω'', etc., d'une manière semblable à celle de l'article 78, première Partie, deviendra

$$f(x,y,y',y''\ldots)+\omega f'(y)+\omega' f'(y')+\omega'' f'(y'')+\text{etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y)+\omega\omega' f''(y,y')+\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y)+\text{etc.},$$

où les quantités $f'(y)$, $f'(y')$, $f'(y)$, etc. dénotent les fonctions primes de $f'(x,y,y',y''\ldots)$ prises suivant y, y', y'', etc., et les quantités $f''(y)$, $f''(y,y')$, $f''(y')$, etc. dénotent les fonctions secondes de la fonction $f(x,y+\lambda\omega,y'+\lambda\omega',y''+\lambda\omega''\ldots)$, prises relativement à y seul, à y et y', à y' seul, et ainsi de suite; le nombre λ est indéterminé ou plutôt inconnu, et peut être différent dans les différentes fonctions, mais il doit être le même dans la même fonction, et il doit toujours être renfermé entre les limites 0 et 1.

Donc il faudra que la fonction primitive de la quantité

$$\omega f'(y)+\omega' f'(y')+\omega'' f''(y'')+\text{etc.}$$
$$+\frac{\omega^2}{2} f''(y)+\omega\omega' f''(y,y')+\frac{\omega'^2}{2} f''(y')+\text{etc.}$$

ait toujours une valeur négative pour le *maximum*, et une valeur positive pour le *minimum*, quelque valeur qu'on donne à la fonction ω, et aussi petite que cette valeur puisse être, en prenant cette fonction primitive de manière qu'elle soit nulle lorsque $x=a$, et y faisant ensuite $x=b$.

Or, sans connaître la quantité ω, on peut prouver qu'il est toujours possible de la prendre assez petite pour que la fonction primitive de la partie qui ne contient que les premières dimensions de ω, ω', ω'', etc., ait une valeur plus grande, positive ou négative, que la fonction primitive de l'autre partie. Car en substituant $i\alpha$ à

la place de ω, α étant une quantité variable quelconque, et i un coefficient constant, la première partie se trouvera toute multipliée par i, et la seconde le sera par i^2, et leurs fonctions primitives seront aussi multipliées par i et par i^2; et il est visible qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que la première de ces fonctions surpasse la seconde, du moins tant qu'elle ne sera pas nulle. D'où l'on conclura qu'on pourra toujours prendre la quantité ω assez petite pour que la valeur totale de la fonction primitive dont il s'agit, soit nécessairement positive ou négative, suivant que celle de la première partie de cette fonction le sera. Mais il est visible que celle-ci doit changer de signe, en changeant le signe de la quantité ω. Donc, il sera impossible que la fonction totale soit constamment positive ou négative, indépendamment de la valeur de ω, à moins que la fonction primitive de la partie qui ne contient que les premières dimensions de ω, ω', ω'', etc. ne soit nulle, quelle que soit la valeur de ω. Donc, le *maximum* ou *minimum* ne pourra avoir lieu, à moins que la fonction primitive de la fonction

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \text{etc.}$$

ne soit nulle, quelle que soit la valeur de ω.

Cette fonction étant nulle, il faudra alors que la fonction primitive de l'autre partie

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \text{etc.}$$

soit positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*, en donnant à ω une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra.

62. Pour satisfaire à la première de ces conditions de la manière la plus générale, nous remarquerons que, puisque la quantité ω doit demeurer indéterminée, la fonction primitive de la fonction

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \text{etc.}$$

ne peut être que de la forme

$$\alpha + \omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta + \text{etc.},$$

où la plus haute des fonctions dérivées ω', ω'', etc. sera d'un ordre moindre que dans la fonction proposée ; c'est de quoi il est facile de se convaincre avec un peu de réflexion sur la forme des fonctions dérivées. Prenant donc la fonction prime de cette quantité, en regardant α, β, γ, etc. comme des fonctions de x, y étant supposé aussi fonction de x, on aura

$$\alpha' + \omega\beta' + \omega'(\beta + \gamma') + \omega''(\gamma + \delta') + \text{etc.},$$

et comparant avec la fonction proposée, on aura

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = f'(y), \quad \beta + \gamma' = f'(y'), \quad \gamma + \delta' = f'(y''), \quad \text{etc.}$$

La première équation donne α égal à une constante arbitraire ; les autres équations serviront à déterminer β, γ, δ, etc. ; et comme il est facile de voir que le nombre de ces quantités est nécessairement moindre d'une unité que celui des équations, il en résultera une équation de condition, qui devra être satisfaite pour que le *maximum* ou *minimum* ait lieu.

Pour cela, il n'y a qu'à mettre ces équations sous cette forme

$$\beta' = f'(y), \quad \beta' + \gamma'' = [f'(y')]', \quad \gamma'' + \delta''' = [f'(y'')]'', \quad \text{etc.},$$

en prenant les fonctions primes de la seconde, les fonctions deuxièmes de la troisième, et ainsi de suite ; retranchant ensuite alternativement l'une de l'autre, on aura

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \text{etc.} = 0,$$

où les traits appliqués aux parenthèses dénotent les fonctions primes, secondes, etc. des quantités renfermées entre ces parenthèses.

Cette équation sera donc commune au *maximum* et au *minimum*, et servira à déterminer la valeur de y en fonction de x ; elle sera, comme il est aisé de le voir, d'un ordre double de celui de la fonction $f(x, y, y', y'' \ldots)$.

63. Les mêmes équations

$$\beta + \gamma' = f'(y'), \quad \gamma + \delta' = f'(y''), \quad \text{etc.}$$

donneront, par un procédé semblable,

$$\beta = f'(y') - [f'(y'')]' + [f'(y''')]'' - \text{etc.},$$
$$\gamma = f'(y'') - [f'(y''')]' + \text{etc.},$$
$$\delta = f'(y''') - \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

Soit, pour abréger,

$$\Omega = \omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta + \text{etc.},$$

la fonction primitive de la quantité $\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \text{etc.}$ sera $\alpha + \Omega$; et comme cette fonction doit être nulle lorsque $x = a$, si on dénote par A la valeur de Ω qui répondra à $x = a$, on aura, puisque α est une constante arbitraire, $\alpha + A = 0$, et par conséquent $\alpha = -A$. On aura donc $\Omega - A$ pour la fonction primitive, qui doit être nulle en vertu du *maximum* ou *minimum*, lorsque $x = b$. Si donc on dénote encore par B la valeur de Ω, qui répondra à $x = b$, on aura l'équation

$$B - A = 0,$$

à laquelle il faudra satisfaire par le moyen des constantes arbitraires qui entreront dans l'expression de y qu'on déduira de l'équation trouvée ci-dessus, en ayant égard d'ailleurs aux conditions spéciales du problème.

Ainsi, par exemple, si la valeur de y est donnée pour les valeurs a, b de x, alors la valeur de ω sera nulle dans les deux quantités A et B; si, de plus, la valeur de y' était aussi donnée pour les mêmes valeurs de x, les valeurs de ω' seraient aussi nulles dans A et B; et ainsi de suite.

Les quantités ω, ω', ω'', etc. étant réduites au plus petit nombre possible, tant dans l'expression de A que dans celle de B, on égalera à zéro le coefficient de chacune de celles qui resteront pour satisfaire à l'équation $B - A = 0$, indépendamment de ces quantités.

64. Ayant ainsi satisfait à la première condition, il ne restera plus qu'à remplir l'autre condition, qui consiste en ce que la fonction

primitive de la quantité

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \text{etc.},$$

doit être entre les mêmes limites a et b de x toujours positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*, en supposant que la valeur de ω soit quelconque et aussi petite qu'on voudra.

Je remarquerai d'abord ici que, quoique les fonctions $f''(y)$, $f''(y, y')$, etc. renferment essentiellement les quantités ω, ω', etc. (art. 61), on peut prouver par un raisonnement semblable à celui de l'article 55, qu'il suffira pour le *maximum* ou *minimum*, que la condition dont il s'agit soit remplie en supposant le coefficient λ égal à zéro, ce qui fait disparaître ces quantités des fonctions dont il s'agit, ensorte que ces fonctions ne seront plus alors que les fonctions secondes de la fonction $f'(x, y, y', y'' \ldots)$, prises relativement à y seul, à y et y', à y' seul, etc., et auront par conséquent des valeurs déterminées en x, y, y', etc.

Cela posé, si on rappelle ici le théorème que nous avons démontré dans la première Partie (art. 38), on en conclura que la condition dont il s'agit serait satisfaite si la proposée

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \text{etc.}$$

était telle qu'elle fût constamment positive ou négative pour toutes les valeurs de x, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, indépendamment des quantités ω, ω', ω'', etc.; et comme nous avons donné plus haut (art. 56) les conditions les plus générales pour qu'une quantité de la forme dont il s'agit soit nécessairement positive ou négative, il n'y aura qu'à examiner si ces conditions ont lieu dans la quantité dont il s'agit. Si elles n'avaient pas lieu, ou si elles n'avaient lieu que dans une partie de cette quantité, il faudrait alors chercher la fonction primitive de l'autre partie, et la rendre nulle, ou au moins positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*, indépendamment des quantités ω, ω', ω'', etc.

65. Pour simplifier la solution de cette question, nous supposerons d'abord que la quantité proposée ne renferme que les carrés et les produits des deux quantités ω, ω'; on verra aisément que

la même méthode s'étend aux cas plus compliqués; et nous représenterons par cette formule

$$\omega^2 M + \omega\omega' N + \omega'^2 P,$$

la partie de la même quantité qui est toujours positive ou négative entre les limites $x=a$, $x=b$; l'autre partie sera

$$\omega^2 [\tfrac{1}{2} f''(y) - M] + \omega\omega' [f''(y, y') - N] + \omega'^2 [\tfrac{1}{2} f''(y') - P],$$

dont il faudra chercher la fonction primitive, et il est facile de s'assurer d'avance, que pour que la quantité ω demeure indéterminée, cette fonction ne pourra être que de la forme $\mu + \omega^2 \nu$; prenant donc sa fonction prime, et comparant terme à terme avec la précédente, on aura

$$\mu' = 0, \quad \nu' = \tfrac{1}{2} f''(y) - M, \quad 2\nu = f''(y, y') - N,$$
$$\text{et} \quad 0 = \tfrac{1}{2} f''(y') - P.$$

La première de ces équations donne μ égale à une constante arbitraire, et les trois autres serviront à déterminer les valeurs de M, N, P, qui seront

$$M = \tfrac{1}{2} f''(y) - \nu', \quad N = f''(y, y') - 2\nu, \quad P = \tfrac{1}{2} f''(y'),$$

et il faudra que ces valeurs satisfassent aux conditions qui résultent des formules de l'article 56. Or, en prenant les quantités ω' et ω à la place des quantités p et q, et par conséquent P, N, M à la place de A, B, C, et faisant $T = M - \frac{N^2}{4P}$, on aura pour le *minimum* les deux conditions $P > 0$ et $T > 0$, et pour le *maximum* les conditions opposées, $P < 0$ et $T < 0$, ou bien l'une des deux quantités P, T égale à zéro, tant pour le *minimum* que pour le *maximum*, et ces conditions devront avoir lieu pour toutes les valeurs de x, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, pour que la quantité $\omega'^2 P + \omega\omega' N + \omega^2 M$ soit constamment positive dans le premier cas, et négative dans le second, entre ces mêmes limites. Comme la quantité P est donnée, elle indiquera tout de suite le *maximum* ou *minimum;* mais on n'en sera assuré que par l'autre condition T > ou < 0, ou bien = 0 pour les deux cas.

66. De plus, et c'est ici une condition bien essentielle, il faudra que les quantités M, N, P ne deviennent point infinies entre les mêmes limites, pour qu'on puisse être assuré que la fonction primitive de la quantité dont il s'agit, sera nécessairement positive ou négative, d'après le théorème de l'article 38 de la première Partie; car ce théorème étant fondé sur la nature du développement des fonctions en séries des puissances positives de la quantité ajoutée à la variable, est nécessairement sujet aux exceptions attachées à la forme de ce développement, que nous avons examinées dans l'article 30, première Partie, et l'article 13 ci-dessus; il pourra donc être en défaut, si les fonctions dérivées de la fonction primitive deviennent infinies, parce qu'alors le développement n'aura plus la même forme; c'est ce qui arrivera nécessairement, lorsque la fonction primitive passera du positif au négatif par l'infini, comme les tangentes des angles; alors pour la valeur de x répondant à ce passage, le développement de la fonction de $x+i$ aura son premier terme de la forme Ai^m, m étant un nombre impair négatif, et la fonction prime, ainsi que toutes les suivantes, seront infinies. Dans ce cas, la fonction primitive pourra changer de signe, quoique sa fonction prime conserve toujours le même signe.

Pour en voir un exemple bien simple, il n'y a qu'à considérer la fonction $\frac{x}{1-x}$, qui est $=1$ lorsque $x=\frac{1}{2}$, et $=-2$ lorsque $x=2$; cependant sa fonction prime $\frac{1}{(1-x)^2}$ est toujours positive tant que x a une valeur réelle. Ici la fonction primitive et toutes ses dérivées deviennent infinies lorsque $x=1$.

C'est une modification à apporter au théorème dont il s'agit, mais qui n'influe point sur la conclusion qu'on en a tirée dans l'article 39.

67. Ayant satisfait à ces conditions, on aura la fonction primitive $\mu+\omega^{s,v}$, dans laquelle μ est une constante arbitraire qu'on déterminera, ensorte que la fonction soit nulle lorsque $x=a$. Supposons $\omega^{s,v}=(\Omega)$, et soit (A) la valeur de (Ω) lorsque $x=a$, on aura $\mu=-(A)$, ainsi la fonction primitive dont il s'agit, sera $(\Omega)-(A)$, laquelledevra être nulle ou positive pour le *minimum*,

et négative pour le *maximum*, en faisant $x = b$. Soit donc (B') la valeur de (Ω) lorsque $x = b$, il faudra que l'on ait $(B) - (A) > \text{ou} < o$ pour le *minimum* ou le *maximum*, ou $= o$ pour les deux cas, indépendamment de la valeur de ω qui doit demeurer indéterminée.

Si la valeur de y est donnée pour les valeurs a et b de x, la valeur correspondante de ω étant alors nulle, on aura $(A) = o$, $(B) = o$, et la condition précédente sera remplie, tant pour le *maximum* que pour le *minimum*. Mais si les valeurs de y ne sont pas données, alors il faudra que l'on ait pour le *minimum*, $v = \text{ou} > o$ lorsque $x = b$, et $v = \text{ou} < o$ lorsque $x = a$; et pour le *maximum*, $v = o$ ou $< o$ dans le premier cas, et $v = o$ ou $> o$ dans le second.

A l'égard de la valeur de la quantité v, elle dépend simplement de la condition T ou $M - \frac{N^2}{4P} > o$ pour le *minimum*, et $< o$ pour le *maximum*. Cette condition sera donc, en substituant les valeurs de M, N, P,

$$\tfrac{1}{2} f''(y) - v' - \frac{[f''(y, y') - 2v]^2}{2f''(y')} > \text{ou} < o,$$

et on pourra prendre pour v une fonction quelconque de x qui y satisfasse.

Ce qu'il y aurait de plus simple, ce serait de supposer la quantité T nulle (art. 65), ce qui donnerait l'équation

$$4MP - N^2 = o;$$

savoir,

$$f''(y')[f''(y) - 2v'] - [f''(y, y') - 2v]^2 = o,$$

par laquelle on pourrait déterminer la valeur de v; et le *maximum* ou *minimum* dépendrait simplement du signe de la quantité P ou $\frac{1}{2} f''(y')$.

On aurait de cette manière le même résultat que donne la méthode proposée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1786, pour distinguer les *maxima* des *minima* dans le calcul des variations. Mais, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, il faudrait, pour l'exactitude de ce résultat, qu'on pût s'assurer que la valeur

valeur de y ne deviendra point infinie pour une valeur de x comprise entre les valeurs données a et b; ce qui sera le plus souvent impossible, par la difficulté de trouver l'équation primitive en y et x. Sans cette condition, quoique la quantité $\omega^2 M + \omega\omega' N + \omega'^2 P$ devienne alors de la forme $P\left(\omega' + \frac{\omega N}{2P}\right)^2$, et qu'elle soit par conséquent toujours positive ou négative, suivant que la valeur de P le sera, on ne sera jamais certain de l'état positif ou négatif de sa fonction primitive.

68. Pour en donner un exemple qui pourra servir en même temps d'application de la méthode que nous venons d'exposer; supposons que la fonction $f(x, y, y' \ldots)$, dont la fonction primitive doit être un *maximum* ou *minimum*, soit

$$y'^2 + 2my'y + ny^2,$$

en prenant les fonctions primes et secondes, on aura

$$f'(y) = 2(my' + ny), \quad f'(y') = 2(y' + my),$$
$$f''(y) = 2nf''(y, y') = 2m, \quad f''(y') = 2;$$

substituant ces valeurs dans l'équation générale de l'article 62, qui, dans ce cas, se réduit à

$$f'(y) - [f'(y')]' = 0,$$

on aura

$$2(my' + ny) - 2(y'' - my') = 0;$$

savoir,

$$y'' - ny = 0,$$

pour l'équation du *maximum* ou *minimum*. Cette équation est susceptible de la méthode de l'article 55, première Partie, et donne sur-le-champ

$$y = ge^{x\sqrt{n}} + he^{-x\sqrt{n}},$$

g et h étant deux constantes arbitraires; si n était une quantité négative $= -k^2$, alors on aurait, en prenant d'autres constantes arbitraires, g et h,

$$y = g \sin(kx + h).$$

Supposons, pour plus de simplicité, que les valeurs de y soient données pour les deux valeurs extrêmes a et b de x, les quantités A et B seront nulles d'elles-mêmes, et l'équation B=A sera satisfaite (art. 63); on déterminera donc les constantes a et b de manière que y ait les valeurs données lorsque $x=a$ et $x=b$.

Maintenant, nous aurons, par les formules de l'article 65,

$$M=n-\nu', \quad N=2(m-\nu), \quad P=1;$$

d'où l'on voit que, puisque P est >0, il n'y a que le *minimum* qui puisse avoir lieu. Mais cette condition ne suffit pas pour assurer l'existence du *minimum;* il faudra de plus que l'on ait

$$M-\frac{N^2}{4P}>0, \quad \text{ou} \quad =0.$$

Soit, 1°. $M-\frac{N^2}{4P}>0$, on aura

$$n-\nu'-(m-\nu)^2>0,$$

en prenant pour ν une quantité qui ne devienne point infinie entre les limites a et b de x. Si la valeur de n est positive, il est clair qu'on peut satisfaire à cette condition, en faisant $\nu=m$; ainsi on sera assuré, dans ce cas, de l'existence du *minimum*, puisque les deux quantités (A) et (B) sont d'ailleurs nulles par l'hypothèse que les valeurs de y sont données pour $x=a$ et $=b$ (art. 67). Mais si n est négative et $=-k^2$, on aura alors la condition

$$-\nu'>k^2+(m-\nu)^2,$$

et il n'est pas aisé de trouver une valeur satisfaisante de ν, ni même de s'assurer qu'on pourra la trouver.

Soit, 2°. $M-\frac{N^2}{4P}=0$, on aura

$$-\nu'=k^2+(m-\nu)^2;$$

je suppose

$$m-\nu=k\rho,$$

j'aurai

$$\frac{\rho'}{k}=1+\rho^2;$$

ce qui donne

$$\frac{\rho'}{1+\rho^2}=k,$$

et prenant les fonctions primitives des deux membres,

$$\text{angle tang. } \rho = kx + d;$$

savoir,

$$\rho = \text{tang}\,(kx + d),$$

d étant une constante arbitraire. Cette valeur devient infinie lorsque $kx + d =$ à l'angle droit, ou à trois angles droits, ou etc. Donc, on ne sera pas assuré de l'existence du *minimum*, si la quantité $(b-a)k$ est plus grande que la valeur de deux angles droits.

En effet, pour que le *minimum* ait lieu en général, il faut (art. 64) que la fonction primitive de la quantité $n\omega^2 + 2m\omega\omega' + \omega'^2$ soit positive, quelle que puisse être la valeur de ω. Supposons $\omega = i \sin x$, cette quantité deviendra

$$i^2 (n \sin x^2 + 2m \sin x \cos x + \cos x^2)$$
$$= i^2 \left(\frac{1+n}{2} + \frac{1-n}{2} \cos 2x + m \sin 2x\right),$$

dont la fonction primitive est

$$i^2 \left(\frac{1+n}{2} x + \frac{1-n}{4} \sin 2x - \frac{m}{2} \cos 2x\right) + c,$$

c étant la constante arbitraire qu'on déterminera de manière que la fonction primitive soit nulle lorsque $x = a$; ensuite on fera $x = b$. Donc si on suppose $a = 0$ et b égal à deux angles droits, afin que la valeur de ω soit nulle lorsque $x = a$ et $= b$ suivant l'hypothèse, on aura $c = \frac{i^2 m}{2}$, et la valeur complète de la fonction primitive dont il s'agit sera $i^2 (1 + n)\,D$, D représentant l'angle droit; et il est visible que cette valeur pourra devenir négative lorsque $n = -k^2$, en prenant $k > 1$.

69. Supposons maintenant que la quantité qui renferme les secondes dimensions de ω, ω', etc. contienne aussi ω'', ensorte qu'elle soit de la forme (art. 61),

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \omega\omega'' f''(y, y'') + \omega'\omega'' f''(y', y'') + \tfrac{1}{2}\omega''^2 f''(y'');$$

nous prendrons

$$\omega^2 M + \omega\omega' N + \omega'^2 P + \omega\omega'' Q + \omega'\omega'' R + \omega''^2 S$$

pour la partie de cette quantité qui doit être assujétie aux conditions de la formule de l'article 56, et il faudra que la différence de ces deux quantités soit susceptible d'une fonction primitive indépendamment de la quantité ω. Cette fonction ne pourra donc être que de la forme

$$\mu + \omega^2\nu + \omega\omega'\pi + \omega'^2\rho,$$

et on trouvera par la comparaison des termes, les équations

$$\begin{aligned}
\mu' &= 0,\\
\nu' &= \tfrac{1}{2} f''(y) - M,\\
2\nu + \pi' &= f''(y, y') - N,\\
\pi + \rho' &= \tfrac{1}{2} f''(y') - P,\\
\pi &= f''(y, y'') - Q,\\
2\rho &= f''(y, y'') - R,\\
0 &= \tfrac{1}{2} f''(y'') - S;
\end{aligned}$$

lesquelles donnent μ égale à une constante arbitraire, ensuite

$$\begin{aligned}
M &= \tfrac{1}{2} f''(y) - \nu',\\
N &= f''(y, y') - 2\nu - \pi',\\
P &= \tfrac{1}{2} f''(y') - \pi - \rho',\\
Q &= f''(y, y'') - \pi\\
R &= f''(y', y'') - 2\rho,\\
S &= \tfrac{1}{2} f''(y'');
\end{aligned}$$

où les trois quantités ν, π, ρ demeurent indéterminées; mais il faudra les prendre telles qu'elles satisfassent aux conditions aux-

quelles doivent être assujéties les quantités M, N, P, etc., et qu'on peut déduire de l'article 56, en prenant les quantités ω'', ω', ω à la place des quantités p, q, r. Ainsi, si on fait

$$T = P - \frac{R^2}{4S}, \quad V = N - \frac{QR}{2S},$$
$$X = M - \frac{Q^2}{4S}, \quad Y = X - \frac{V^2}{4T},$$

les conditions pour le *minimum* seront $S > 0$, $T > 0$ et $Y > 0$, et pour le *maximum* $S < 0$, $T < 0$, $Y < 0$; et ces conditions devront avoir lieu pour toutes les valeurs de x, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. La valeur de S indiquera le *maximum* ou *minimum;* mais on n'en pourra être assuré que par le concours des deux autres conditions. De plus, il faudra que les quantités M, N, P, Q, R, S ne deviennent jamais infinies entre les mêmes limites, par les raisons exposées plus haut (art. 66).

Enfin, il faudra qu'en supposant $(\Omega) = \omega^2\nu + \omega\omega'\pi + \omega'^2\rho$, et prenant (A) et (B) pour les valeurs de (Ω) qui répondent à $x = a$ et $x = b$, la quantité (B) — (A) soit positive pour le *minimum* et négative pour le *maximum*, indépendamment des valeurs de ω et de ω' (art. 67).

On suivra les mêmes procédés pour les fonctions plus compliquées.

70. Si les valeurs de y, y', etc. n'étaient pas données pour les valeurs a et b de x, mais qu'il y eût seulement, par la nature du problème, une relation entre ces quantités, représentée par l'équation

$$\varphi(x, y, y' \ldots) = 0;$$

alors, suivant les principes de l'article 58, il n'y aurait qu'à ajouter à la fonction qui doit être positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*, la quantité

$$\omega\varphi'(y) + \omega'\varphi'(y') + \omega''\varphi'(y'') + \text{etc.} + \tfrac{1}{2}\omega^2\varphi''(y)$$
$$+ \omega\omega'\varphi''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2\varphi''(y') + \text{etc.},$$

multipliée par un coefficient indéterminé Γ, et traiter ensuite les quantités ω, ω' comme indépendantes. Ainsi, si la condition dont il s'agit doit avoir lieu pour la valeur de $x = a$, on ajoutera aux deux quantités A et (A) (art. 63, 67), les quantités

$$\Gamma[\omega p'(\gamma) + \omega'\varphi'(\gamma') + \text{etc.}]$$

et

$$\Gamma[\tfrac{1}{2}\omega^2\varphi''(\gamma) + \omega\omega'\varphi''(\gamma, \gamma') + \text{etc.}],$$

rapportées à la même valeur de x; et si cette condition devait avoir lieu pour la valeur $x = b$, on ajouterait aux valeurs de B et de (B) les mêmes quantités rapportées à $x = b$.

On suivrait le même procédé pour chacune des conditions données, s'il y en avait plusieurs.

CHAPITRE XIII.

Extension de la méthode précédente, aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Problème de la brachystochrone. Caractères pour distinguer si une fonction proposée est ou non une fonction prime, ou en général une fonction dérivée d'un certain ordre.

71. La fonction proposée dont la fonction primitive doit être un *maximum* ou un *minimum*, pourrait contenir, outre les variables x et y, une troisième variable z, indépendante des deux autres; on opérerait alors, relativement à cette variable, comme on a fait relativement à y. Ainsi, en désignant la fonction proposée par

$$f(x, y, y', y'' \ldots z, z', z'' \ldots),$$

on y substituera à la fois les quantités $y+\omega$ et $z+\zeta$ à la place de y et z, et il faudra, après le développement, que la fonction primitive de la partie qui ne contiendra que les premières dimensions de ω, ω', ω'', etc., ζ, ζ', ζ'', etc. soit nulle, et que la fonction primitive de la partie qui contiendra les secondes dimensions de ces mêmes quantités, soit positive pour le *minimum*, et négative pour le *maximum*, indépendamment des quantités ω et ζ.

De là, par une analyse semblable à celles de l'article 62, et en conservant aussi pour les fonctions primes relatives à z, z', z'', etc., une notation semblable à celle que nous avons employée relativement à y, y', y'', etc., on aura ces deux équations

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{etc.} = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \text{etc.} = 0,$$

qui serviront à déterminer les quantités y et z en fonctions de x.

Ensuite il faudra, relativement aux quantités z et ζ, satisfaire à des conditions semblables à celles qu'on a trouvées par rapport à y et ω; c'est un détail qui nous mènerait trop loin, et que le lecteur peut suppléer.

On voit par là que, s'il y avait une quatrième variable u, on aurait, relativement à cette variable, une équation semblable à celles qui répondent aux variables y et z; et ainsi de suite.

72. Mais si, dans la fonction $f(x,y,y'\ldots z,z'\ldots)$, la quantité z dépendait des quantités x et y d'une manière quelconque donnée par l'équation

$$\varphi(x,y,y'\ldots z,z'\ldots)=0,$$

alors, suivant les mêmes principes de l'article 58, on ajouterait simplement la fonction $\varphi(x,y,y'\ldots.z,z'\ldots.)$, multipliée par un coefficient indéterminé et variable Δ à la fonction proposée $f(x,y,y'\ldots z,z'\ldots)$, et on chercherait, par les méthodes exposées, le *maximum* ou *minimum* de la fonction primitive de cette fonction composée, en regardant les quantités y et z comme indépendantes. Ainsi, on trouvera d'abord, pour le *maximum* et *minimum*, les deux équations

$$\begin{aligned}
&f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{etc.} + \Delta\varphi'(y)\\
&\quad - [\Delta\varphi'(y')]' + [\Delta\varphi'(y'')]'' - \text{etc.} = 0;\\
&f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \text{etc.} + \Delta\varphi'(z)\\
&\quad - [\Delta\varphi'(z')]' + [\Delta\varphi'(z'')]'' - \text{etc.} = 0;
\end{aligned}$$

d'où éliminant la quantité Δ, on aura une équation qui, combinée avec l'équation donnée $\varphi(x,y,y'\ldots z',z\ldots)=0$, servira à déterminer les valeurs de y et z en fonctions de x.

Enfin, si la fonction primitive de la fonction $f(x,y,y'\ldots)$ ne devait être un *maximum* ou un *minimum* qu'autant que la fonction primitive d'une autre fonction $\varphi(x,y,y'\ldots)$ serait donnée entre les mêmes valeurs a et b de x, il n'y aurait qu'à chercher le *maximum* ou *minimum* de la somme des deux fonctions primitives, après avoir multiplié la seconde par un coefficient indéterminé indépendant

indépendant de x, c'est-à-dire le *maximum* ou *minimum* de la fonction primitive de

$$f(x, y, y' \ldots) + \Delta\varphi(x, y, y' \ldots),$$

en regardant Δ comme une quantité constante. De cette manière, on aura d'abord l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{etc.} + \Delta\varphi'(y) - \Delta[\varphi'(y')]' + \Delta[\varphi'(y'')]'' - \text{etc.} = 0,$$

et on déterminera la constante Δ de manière que la fonction primitive de $\varphi(x, y, y' \ldots)$, prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, soit donnée; et ainsi du reste.

73. Les problèmes de la *brachystochrone* et des *isopérimètres* proposés et résolus d'abord par les deux frères *Bernoulli*, ont ouvert la route pour traiter ce nouveau genre de questions *de maximis* et *minimis*. On a trouvé ensuite successivement des méthodes plus générales et plus simples, et on est parvenu enfin au calcul des *variations*, qui paraît ne rien laisser à desirer sur ce sujet. Comme les équations trouvées plus haut (art. 62, 70) sont les mêmes, à la notation près, que celles qui résultent de ce calcul, nous pourrions nous dispenser de les appliquer à des exemples; mais il ne sera pas inutile de montrer encore par un exemple connu, l'usage des règles pour distinguer les *maxima* et *minima*, et s'assurer de leur existence.

Nous reprendrons pour cela le problème de la brachystochrone, ou ligne de la plus vîte descente, à cause de sa célébrité; il consiste, comme l'on sait, à trouver la courbe le long de laquelle un corps pesant descendrait dans le moindre temps d'un point donné à un autre point donné, et placé dans une verticale différente. Comme, par les principes de la mécanique, la fonction prime du temps est égale à la fonction prime de l'espace divisée par la vîtesse, et que dans les corps qui tombent par la pesanteur, la vîtesse est toujours proportionnelle à la racine carrée de la hauteur d'où ils sont censés être descendus, si on rapporte aux trois coordonnées rectangulaires x, y, z, la courbe décrite par le corps, et qu'on prenne les abscisses x

verticales, la vîtesse sera proportionnelle à $\sqrt{(h+x)}$, et $\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}$ sera la fonction prime de l'arc de la courbe (art 57); ainsi $\frac{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}{\sqrt{(h+x)}}$ sera proportionnelle à la fonction prime du temps, dont la fonction primitive devra être un *minimum*. On aura donc

$$f(x,y,y'\ldots z,z'\ldots)=\frac{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}{\sqrt{(h+x)}};$$

donc prenant les fonctions primes, on aura

$$f'(y)=0,\quad f'(y')=\frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}};$$

$$f'(z)=0,\quad f'(z')=\frac{z'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}};$$

et l'on aura (art. 70) les deux équations

$$\left[\frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right]'=0,$$

$$\left[\frac{z'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right]'=0,$$

lesquelles donnent d'abord ces deux-ci du premier ordre

$$\frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}=m,$$

$$\frac{z'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}=n,$$

m et n étant deux constantes arbitraires.

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a $\frac{y'}{z'}=\frac{m}{n}$; donc $z'=\frac{ny'}{m}$, et prenant l'équation primitive, on anra

$$z=\frac{ny}{m}+l,$$

l étant une nouvelle constante arbitraire. Cette équation étant à un plan vertical, puisque l'abscisse verticale x ne s'y trouve pas, fait voir que la courbe cherchée est toute dans ce plan; ainsi, en prenant l'axe des y dans ce même plan, on pourra supposer $z=0$,

en faisant l et $n=0$; et l'on aura pour la courbe cette équation unique entre les coordonnées x et y,

$$\frac{y'}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{(1+y'^2)}}=m,$$

d'où l'on tire

$$y'=\frac{m\sqrt{(h+x)}}{\sqrt{[1-m^2(h+x)]}},$$

équation à la cycloïde, les abscisses x étant prises sur le diamètre du cercle générateur, et les ordonnées y perpendiculairement à ce diamètre.

Puisqu'on suppose que les deux points extrêmes de la courbe sont donnés, les quantités ω et ζ répondant à ces points, seront nulles, et les valeurs des quantités A et B seront nulles aussi en prenant a et b pour les valeurs de x qui répondent à ces points; ainsi la condition $B-A=0$ sera remplie. Si on faisait d'autres hypothèses relativement à ces points, on trouverait d'autres résultats; nous ne nous y arrêterons pas, parce que ces différentes questions ont été déjà discutées et résolues par les principes du calcul des variations. Mais il faut voir ce que donnent les termes où les quantités ω et ζ monteront à la seconde dimension, et dont la fonction primitive doit être positive pour que le *minimum* ait effectivement lieu.

Comme la fonction proposée $f(x,y,y'\ldots z,z'\ldots)$ ne contient point, dans le cas présent, les variables y et z, mais seulement leurs fonctions primes y' et z', il est facile de voir que les termes dont il s'agit seront simplement de la forme

$$\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y')+\omega'\zeta' f''(y',z')+\tfrac{1}{2}\zeta'^2 f''(z');$$

et l'on trouve, en prenant les fonctions primes des quantités $f'(y')$ et $f'(z')$ relativement à y' et z',

$$f''(y')=-\frac{1+z'^2}{\sqrt{(h+x)}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(y',z')=-\frac{y'z'}{\sqrt{(h+x)}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$f''(z')=\frac{1+y'^2}{\sqrt{(h+x)}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

de sorte que la quantité dont il s'agit deviendra

$$\frac{\omega'^2(1+z'^2)-2\omega'\zeta'y'z'+\zeta'^2(1+y'^2)}{2\sqrt{(h+x)}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

laquelle peut se mettre sous cette forme

$$\frac{\omega'^2+\zeta'^2+(\omega'z'-\zeta'y')^2}{2\sqrt{(h+x)}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où l'on voit que cette quantité a d'elle-même la propriété d'être toujours nécessairement positive, quelles que soient les valeurs de ω et ζ; et comme d'ailleurs elle ne saurait jamais devenir infinie tant que y' et z' ne seront pas infinies, il s'ensuit que le *minimum* aura nécessairement lieu dans la cycloïde.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails sur ce problème qui offre différens cas à examiner, suivant les conditions qu'on peut demander relativement au premier et au dernier point de la courbe, et par rapport à la courbe même qu'on peut supposer devoir être tracée sur une surface donnée. La solution de tous ces cas peut se tirer aisément des principes établis ci-dessus. Voyez la fin de la leçon XXII du Calcul des fonctions.

74. L'analyse que nous avons employée pour trouver les *maxima* et *minima* des fonctions primitives, donne lieu à une observation importante. Nous avons trouvé (art. 62) que, pour que la quantité

$$\omega f'(y)+\omega' f'(y')+\omega'' f''(y'')+\text{etc.}$$

ait une fonction primitive, quelle que soit la valeur de ω, il faut satisfaire à l'équation

$$f'(y)-[f'(y')]'+[f'(y'')]''-\text{etc.}=0.$$

Donc, si cette quantité était d'elle-même la fonction prime d'une fonction de x, y, y', etc., ω, ω', etc., l'équation précédente aurait aussi lieu d'elle-même et serait par conséquent identique.

Or, on voit par l'article 61, que la quantité dont il s'agit n'est autre chose que la partie du développement de la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega''\ldots),$$

qui ne contient que les premières dimensions de $\omega, \omega', \omega''$, etc.; et je vais prouver que cette quantité sera nécessairement une fonction prime, si $f(x, y, y', y''\ldots)$ est elle-même une fonction prime d'une fonction de $x, y, y'\ldots$

En effet, si cette fonction est une fonction prime, quelle que soit la valeur de y en x, elle le sera encore en mettant $y+\omega$ au lieu de y, quelle que soit la quantité ω; donc la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega'\ldots)$$

sera aussi nécessairement une fonction prime, en prenant pour ω une fonction quelconque de x. Supposons que cette fonction soit développée suivant les puissances et les produits de $\omega, \omega', \omega''$, etc., et dénotons respectivement par P, Q, R, etc. les parties de ce développement qui contiendront les premières dimensions, les secondes dimensions, les troisièmes, etc. des mêmes quantités, on aura

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega''\ldots) = f(x, y, y', y''\ldots) + P + Q + R + \text{etc.}$$

Ainsi, il faudra que la quantité $P+Q+R+$ etc. soit la fonction prime d'une fonction de x, y, y', etc. et de $\omega, \omega', \omega''$, etc.; et il est facile de voir que chacune des quantités P, Q, R, etc. devra être en particulier une fonction prime, puisque ces quantités renfermant des dimensions différentes de l'indéterminée ω et de ses fonctions dérivées ω', ω'', etc., il est impossible, par la nature des fonctions dérivées, que les fonctions primitives de P, Q, R, etc. dépendent les unes des autres. Or, on a

$$P = \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f''(y'') + \text{etc.} \quad \text{(art. cité)};$$

donc, cette quantité sera d'elle-même une fonction prime. Donc, enfin, si la fonction $f(x, y, y', y''\ldots)$ est une fonction prime, l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \text{etc.} = 0$$

sera nécessairement identique.

Réciproquement, on peut démontrer que si cette équation est identique, la fonction $f(x, y, y', y''\ldots)$ sera nécessairement une

fonction prime. Car nous avons vu que si cette équation est vraie, la quantité P est une fonction prime, quelles que soient les valeurs de y et de ω; donc elle sera encore une fonction prime, si, à la place de y, on met $y+\omega$. Supposons que par cette substitution, et par le développement suivant les dimensions de ω, ω', ω'', etc., la quantité P devienne $P+p+$ etc.; la quantité p contenant les premiers termes du développement dans lesquels $\omega, \omega', \omega''$, etc. ne formeront que deux dimensions, on en conclura, comme plus haut, que la quantité p sera en particulier la fonction prime d'une fonction de x, y, y', etc., ω, ω', etc.; mais par les formules générales que nous avons données dans l'article 76 de la première partie, il est facile de voir qu'on a $p=2Q$; donc la quantité Q sera une fonction prime, y et ω étant quelconques; donc elle sera encore une fonction prime en y substituant $y+\omega$ pour y. Et si l'on suppose que par cette substitution, et par le développement suivant les puissances et les produits de ω, ω', etc., cette fonction devienne $Q+q+$etc., la quantité q renfermant les premiers termes du développement où les ω, ω', ω'', etc. ne formeront que trois dimensions, on en conclura aussi, comme ci-dessus, que la quantité q sera elle-même une fonction prime; mais par les formules du même article, on trouve $q=3R$; donc la quantité R sera elle-même aussi une fonction prime, et ainsi de suite. En effet, si r, s, etc. sont les premiers termes du développement des quantités R, S, etc.; après la substitution de $y+\omega$ à la place de ω, on aura (art. cité) $r=4S$, $s=5T$, etc.; d'où l'on conclura, en suivant le même raisonnement, que les quantités S, T, etc. seront aussi, chacune en particulier, des fonctions primes.

Donc, toute la série $P+Q+R+$ etc. sera nécessairement la fonction prime d'une fonction de x, y, y', etc., ω, ω', etc., quelles que soient les valeurs de y et ω en x. Donc, la quantité $f(x, y+\omega, y'+\omega'\ldots)-f(x, y, y'\ldots)$, qui est égale à cette série, sera une fonction prime en donnant à ω une valeur quelconque, et par conséquent aussi en faisant $\omega=-y$; or, dans ce cas, la fonction $f(x, y+\omega, y'+\omega'\ldots)$ ne sera plus qu'une simple fonction de x sans y ni ω, qui pourra être censée la fonc-

tion prime d'une fonction de x. Donc, la fonction $f(x, y, y', y''...)$ sera elle-même nécessairement la fonction prime d'une fonction de x, y, y', etc.

75. Il suit de là que l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{etc.} = 0,$$

contient le caractère par lequel on peut reconnaître si la fonction $f(x, y, y', y''...)$ est ou non une fonction prime.

On trouvera de la même manière que les deux équations

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{etc.} = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \text{etc.} = 0,$$

renferment le caractère par lequel on pourra reconnaître si la fonction $f(x, y, y'...z, z'...)$ est ou non une fonction prime, les quantités y et z étant indépendantes.

Mais si la quantité z dépendait de l'équation

$$\varphi(x, y, y'...z, z'...) = 0,$$

on aurait, comme dans l'article 71,

$$\begin{aligned} f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \text{etc.} + \Delta\varphi'(y) \\ - [\Delta\varphi'(y')]' + [\Delta\varphi'(y'')]'' - \text{etc.} = 0, \\ f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \text{etc.} + \Delta\varphi'(z) \\ - [\Delta\varphi'(z')]' + [\Delta\varphi'(z'')]'' - \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

et l'équation résultante de l'élimination de l'indéterminée Δ, contiendrait le caractère qui ferait reconnaître si la fonction $f(x, y, y'...z, z'...)$ est d'elle-même, ou non, une fonction prime.

Puisque la fonction primitive de la quantité

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \text{etc.}$$

est représentée par

$$\omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta + \text{etc.} \quad (\text{art. } 62),$$

en omettant, ce qui est permis, la constante arbitraire α, on trouvera, de la même manière, que le caractère par lequel on pourra

reconnaître si cette fonction primitive est elle-même une fonction prime, sera renfermée dans l'équation

$$\beta - \gamma' + \delta'' - \text{etc.} = 0,$$

laquelle, en substituant pour β, γ, δ, etc. leurs valeurs (art. 63), devient

$$f'(y') - 2[f'(y'')]' + 3[f'(y''')]'' - \text{etc.} = 0.$$

Ainsi, le système de cette équation et de l'équation trouvée ci-dessus, renfermera le caractère par lequel on pourra juger si la fonction $f(x, y, y', y'' \ldots)$ est d'elle-même, ou non, la fonction seconde d'une fonction de x, y, y', y'', etc.; et ainsi de suite.

76. Ces différentes équations répondent à celles que, dans le calcul différentiel, on nomme *conditions d'intégrabilité*, et dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps. Nous nous contenterons ici d'avoir établi, d'une manière directe et rigoureuse, le principe de la correspondance de ces équations avec celles du *maximum* et *minimum* des fonctions primitives; et nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage de ces équations de condition, aux différens ouvrages qui en traitent, et surtout à la leçon XXI du Calcul des fonctions, où cette matière est traitée avec plus de détail et de généralité. On y trouvera aussi un précis historique sur le problème des isopérimètres dont la solution générale, par la méthode des variations, fait l'objet de la leçon XXII du même Calcul, à laquelle nous renvoyons pour completter la théorie des variations exposée ci-dessus.

CHAP.

CHAPITRE XIV.

De la mesure des solidités et des surfaces des corps de figure donnée.

77. Nous avons donné, dans le chapitre VI, la manière d'exprimer, par les fonctions, les solidités et les surfaces des conoïdes formés par la révolution d'une courbe donnée autour d'un axe; il nous reste à étendre cette analyse à tous les corps dont la surface est exprimée par une équation entre ses trois coordonnées.

Considérons d'abord un solide dont la surface soit exprimée par l'équation

$$z = f(x, y);$$

son volume ou sa solidité sera exprimée en général par une fonction de x et y que nous dénoterons par $F(x, y)$. Désignons aussi par $\varphi(x, y)$ la fonction de x, y qui exprime l'aire de la section de ce solide, faite perpendiculairement à l'axe des x, et correspondante à l'abscisse x; donc, en regardant y comme un paramètre constant, et ne faisant varier que x, on aura, par l'art. 27, l'équation

$$F'(x, y) = \varphi(x, y).$$

Or, la section dont $\varphi(x, y)$ est l'aire, est une courbe dont les abscisses sont y, et les ordonnées perpendiculaires sont z, et dont l'équation est

$$z = f(x, y),$$

en regardant maintenant x comme un paramètre constant qui ne varie que d'une section à l'autre. Donc, en prenant z à la place

de y, et y à la place de x, on aura (art. cité)

$$f(x,y)=\varphi_{,}(x,y),$$

l'accent mis au bas de la caractéristique φ dénotant la fonction dérivée par rapport à y, comme nous l'avons pratiqué jusqu'à présent.

On a donc les deux équations

$$F'(x,y)=\varphi(x,y) \quad \text{et} \quad \varphi_{,}(x,y)=f(x,y);$$

d'où éliminant la fonction marquée par $\varphi_{,}$, après avoir pris les fonctions dérivées par rapport à y de la première équation, on aura

$$F'_{,}(x,y)=f(x,y).$$

Ainsi, pour avoir la fonction $F(x,y)$ qui exprime la valeur ou la solidité du corps dont la surface est exprimée par l'équation

$$z=f(x,y),$$

il faudra prendre la double fonction primitive de $f(x,y)$ relativement à x et à y.

78. On peut aussi parvenir directement à ce résultat par la considération suivante. Puisque $F(x,y)$ représente en général la partie du corps qui répond aux coordonnées x,y, il est clair que $F(x+i,y)-F(x,y)$ sera le segment compris entre les plans perpendiculaires à celui des x,y, qui répondent aux abscisses x et $x+i$, et qui sont terminés par la même ordonnée y. Donc

$$F(x+i,y+o)-F(x,y+o)-F(x+i,y)+F(x,y)$$

sera l'excès du segment qui est terminé par l'ordonnée $y+o$ sur celui qui est terminé par l'ordonnée y; et il est visible que cette différence n'est autre chose qu'un prisme dont la base est le rectangle io, dont les arêtes sont les ordonnées z de la surface qui répondent aux quatre angles de ce rectangle, c'est-à-dire les or-

données $f(x,y)$, $f(x+i,y)$, $f(x,y+o)$, $f(x+i,y+o)$, et dont la base supérieure est la partie de la surface interceptée entre ces quatre ordonnées. Or, il est facile de voir que la solidité de ce prisme curviligne est nécessairement comprise entre celles des deux prismes rectangulaires, dont la base est la même io, et dont les hauteurs sont la plus petite et la plus grande des quatre ordonnées dont nous venons de parler. Donc il faudra que la fonction $F(x,y)$ soit telle que la valeur de la quantité

$$F(x+i,y+o)-F(x+i,y)-F(x,y+o)+F(x,y)$$

soit toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur des quantités

$$iof(x,y),\quad iof(x+i,y),\quad iof(x,y+o),\quad iof(x+i,y+o),$$

quelque petites que soient les valeurs de i et o.

Développons les fonctions marquées par F suivant les formules de l'article 78 de la première Partie. En poussant la précision jusqu'aux troisièmes dimensions de i et de o, on aura la quantité

$$\begin{aligned} io\mathrm{F}'_{,}(x,y)+\tfrac{i^2o}{2}\,\mathrm{F}''_{,}(x+\lambda i,y+\lambda o)+\tfrac{io^2}{2}\,\mathrm{F}'_{,,}(x+\lambda i,y+\lambda o)\\ +\tfrac{i^3}{2.3}[\mathrm{F}'''(x+\lambda i,y+\lambda o)-\mathrm{F}'''(x+\lambda i,y)]\\ +\tfrac{o^3}{2.3}[\mathrm{F}_{,,,}(x+\lambda i,y+\lambda o)-\mathrm{F}_{,,,}(x,y+\lambda o)]. \end{aligned}$$

Développons de même les fonctions marquées par f, mais en s'arrêtant aux premières dimensions de i et o, à cause qu'elles sont déjà multipliées par io, on aura les quatre quantités

$$\begin{aligned} &iof(x,y),\\ &iof(x,y)+i^2of'(x+\lambda i,y),\\ &iof(x,y)+io^2f_{,}(x,y+\lambda o),\\ &iof(x,y)+i^2of'(x+\lambda i,y)+io^2f_{,}(x,y+\lambda o), \end{aligned}$$

et il faudra que la première quantité soit renfermée entre la plus grande et la plus petite de ces quatre dernières, en prenant pour i et o des quantités aussi petites qu'on voudra. Le coefficient λ

peut être différent dans les différentes fonctions, mais il doit être renfermé entre les limites 0 et 1.

Or, la différence de l'une à l'autre de celles-ci est, comme on voit, de l'ordre de i^2o ou de io^2, c'est-à-dire, du troisième ordre, en regardant i et o comme très-petites du premier. Mais la différence entre la première quantité et l'une quelconque des quatre dernières, est

$$io\,[\mathrm{F}'_{,}(x,y)-\mathrm{f}(x,y)],$$

avec des termes du troisième ordre; donc pour que cette différence soit toujours plus petite que la différence précédente qui n'est que du troisième ordre, il est nécessaire que le premier terme, qui est du second ordre, soit nul; autrement il serait possible de prendre les accroissemens i et o assez petits pour que ce premier terme surpassât tous les termes du troisième ordre, et que par conséquent la première quantité tombât hors des limites formées par les quatre autres quantités. Il faudra donc que l'on ait

$$io\,[\mathrm{F}'_{,}(x,y)-\mathrm{f}(x,y)]=0,$$

et par conséquent,

$$\mathrm{F}'_{,}(x,y)=\mathrm{f}(x,y),$$

comme nous l'avons trouvé plus haut.

79. Supposons maintenant que la fonction $\mathrm{F}(x,y)$ représente la mesure de la surface. Dans ce cas, il est clair que la quantité

$$\mathrm{F}(x+i,y+o)-\mathrm{F}(x+i,y)-\mathrm{F}(x,y+o)+\mathrm{F}(x,y)$$

représentera la portion de surface comprise entre les quatre faces du prisme droit qui a io pour base.

Imaginons qu'aux extrémités des quatre ordonnées qui forment les arêtes de ce prisme, on mène quatre plans tangens à la surface dans ces points; on pourra prouver, par un raisonnement analogue à celui de l'article 29 relatif aux tangentes, que la portion de surface qui forme la base supérieure du prisme, sera comprise entre la plus grande et la plus petite section du prisme, faites par les quatre plans tangens de la surface courbe.

Soit α l'angle que le plan tangent à l'extrémité de l'ordonnée z, fait avec l'axe des x, y, on aura (art. 39)

$$\text{tang}\,\alpha = \sqrt{(z'^2 + z_,^2)}.$$

Or, on sait par la géométrie, que la mesure de la projection d'un plan est égale à celle de ce plan multipliée par le cosinus de son inclinaison sur le plan de projection. Donc, puisque les sections du prisme dont il s'agit ont toutes pour projection le même rectangle io, la mesure de la section faite par le plan qui touche la surface à l'extrémité de l'ordonnée z sera $\frac{io}{\cos\alpha}$; mais on a

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_,^2}};$$

donc la mesure de cette section sera $io\sqrt{1 + z'^2 + z_,^2}$, savoir, en substituant $f(x,y)$ par z, $io\sqrt{1 + \overline{f'(x,y)}^2 + \overline{f_,(x,y)}^2}$.

Faisons pour abréger,

$$\sqrt{1 + \overline{f'(x,y)}^2 + \overline{f_,(x,y)}^2} = \varphi(x,y),$$

on aura $io\varphi(x,y)$ pour la mesure de la section dont il s'agit, et mettant $x+i, y+o$ à la place de x, y, on aura celle des sections faites par les trois autres plans qui touchent la surface aux extrémités des ordonnées $f(x+i,y)$, $f(x,y+o)$ et $f(x+i,y+o)$. Donc il faudra que la quantité

$$F(x+i,y+o) - F(x+i,y) - F(x,y+o) + F(x,y)$$

soit toujours comprise entre la plus grande et la plus petite des quatre quantités

$$io\varphi(x,y),\quad io\varphi(x+i,y),\quad io\varphi(x,y+o),\quad io\varphi(x+i,y+o);$$

et par une analyse semblable à celle de l'article précédent, on en conclura la condition

$$F'_,(x,y) = \varphi(x,y) = \sqrt{1 + \overline{f'(x,y)}^2 + \overline{f_,(x,y)}^2}.$$

80. On voit par là que l'ordonnée z d'une surface est la double fonction prime prise par rapport à x et y de la fonction qui exprime le volume ou la solidité du corps, et que la quantité $\sqrt{1+z'^2+z_,^2}$ est la double fonction prime de la fonction qui exprime la surface elle-même.

Ainsi l'ordonnée z étant donnée en fonction de x et y, il faudra prendre sa double fonction primitive pour avoir la solidité, et la double fonction primitive de $\sqrt{1+z'^2+z_,^2}$ pour avoir la surface. On est libre de commencer par la fonction primitive relative à x ou à y; mais la première fonction primitive admettra pour constante une fonction de l'autre variable qu'on aura regardée comme constante, et il faudra déterminer cette fonction conformément aux limites données de la surface. On déterminera ensuite, d'après ces limites, la première variable en fonction de la seconde, par rapport à laquelle on prendra de nouveau la fonction primitive.

81. Si pour faciliter la recherche des doubles fonctions primitives, ou pour d'autres vues, on voulait changer les variables x, y en d'autres variables t et u, dont celles-là seraient des fonctions données, il faudrait, par les principes établis dans la première Partie (art. 50), multiplier d'abord les fonctions regardées comme dérivées doubles par $x'y'$; mais ensuite on ne pourrait pas substituer immédiatement les valeurs de x', y' en t' et u', parce qu'en prenant la fonction primitive par rapport à l'une des variables, l'autre doit être regardée comme constante.

Soit $f(x, y)$ la fonction dont il s'agit d'avoir la double fonction primitive; pour changer les variables x, y en d'autres variables t et u, on la mettra d'abord sous la forme $x'y'f(x, y)$. Supposons qu'à la place de la variable x, par rapport à laquelle on veut prendre d'abord la fonction primitive en regardant y comme constante, on substitue une fonction donnée de t et de y, t étant une nouvelle variable qui remplacera x.

Soit $x = \varphi(t, y)$, on aura, en ne faisant varier que t,

$$x' = \varphi'(t);$$

et la fonction proposée deviendra

$$y'\varphi'(t) \times f(x, y),$$

dont il faudra prendre la fonction primitive par rapport à t, y étant regardée comme constante, et ensuite par rapport à y, t étant regardée comme constante. Or, on peut aussi substituer à la place de y une autre variable u, et supposer, puisque t est à son égard constante,

$$y = \psi(t, u);$$

ce qui donnera, en ne faisant varier que u,

$$y' = \psi'(u).$$

Ainsi la fonction proposée deviendra

$$\varphi'(t) \times \psi'(u) \times f(x, y),$$

laquelle ne renferme plus que t et u, à cause de

$$x = \varphi(t, y), \quad y = \psi(t, u),$$

et dont on pourra prendre la double fonction primitive par rapport à t et à u.

Puisque $x = \varphi(t, y)$ et $y = \psi(t, u)$, on aura, après la substitution de y, x égale à une simple fonction de t, et u que nous dénoterons par $\chi(t, u)$, de manière que les transformations de x et y en t et u seront représentées par

$$x = \chi(t, u), \quad y = \psi(t, u).$$

Or, l'équation identique $\varphi(t, y) = \chi(t, u)$ donne, en faisant varier séparément t et u,

$$\varphi'(t) + \varphi'(y) \times \psi'(t) = \chi'(t),$$
$$\varphi'(y) \times \psi'(u) = \chi'(u);$$

éliminant $\varphi'(y)$, on aura

$$\varphi'(t) = \chi'(t) - \frac{\psi'(t) \times \chi'(u)}{\psi'(u)},$$

et cette valeur étant substituée dans la dernière transformée de la fonction proposée, donnera

$$[\chi'(t)\times\psi'(u)-\chi'(u)\times\psi'(t)]\,f(x,y),$$

qu'on peut mettre sous cette forme plus simple,

$$(x'y_{,}-x_{,}y')\,f(x,y),$$

dans laquelle x et y peuvent être des fonctions quelconques de t et u, et où les traits supérieurs indiquent les fonctions dérivées par rapport à t, et les inférieurs indiquent les dérivées par rapport à u.

82. Ainsi, en regardant z comme une fonction de x et y donnée par la nature de la surface du corps, et supposant qu'on substitue à la place de x, y des fonctions quelconques de t et u, la solidité ou le volume du corps et sa surface seront représentées par les doubles fonctions primitives relatives à t et u des formules

$$(x'y_{,}-x_{,}y')z \quad \text{et} \quad (x'y_{,}-x_{,}y')\sqrt{1+(z')^2+(z_{,})^2},$$

où il faut remarquer que les fonctions dérivées de z doivent être prises par rapport à x et y; mais si on substitue tout de suite dans z, pour x et y leurs valeurs en t et u, il est clair que z deviendra une simple fonction de t et u; et voici comment on pourra exprimer les dérivées de z par rapport à x et y par ses dérivées par rapport à t et u.

Pour distinguer ces dérivées les unes des autres, nous renfermerons les premières entre des parenthèses. Ainsi (z') et $(z_{,})$ désigneront les dérivées de z prises par rapport à x et y, et z', $z_{,}$ désigneront simplement les dérivées de z prises par rapport à t et u, après la substitution des valeurs de x, y en t et u dans l'expression de z. En regardant donc z comme fonction de x, y, et x, y comme fonctions de t, u, et prenant les dérivées séparément par rapport à t et à u, on aura, par les principes établis dans la première Partie,

$$z' = (z')\,x' + (z_{,})\,y',$$
$$z_{,} = (z')\,x_{,} + (z_{,})\,y_{,};$$

d'où

d'où l'on tire

$$(z') = \frac{z'y_{,} - z_{,}y'}{x'y_{,} - x_{,}y'}, \quad (z_{,}) = -\frac{z'x_{,} - z_{,}x'}{x'y_{,} - x_{,}y'} :$$

ce sont les valeurs qu'il faudra substituer dans le radical

$$\sqrt{1 + (z')^2 + (z_{,})^2};$$

et la substitution faite, on aura la formule

$$\sqrt{(x'y_{,} - x_{,}y')^2 + (z'x_{,} - z_{,}x')^2 + (z'y_{,} - z_{,}y')^2},$$

dont la double fonction primitive, prise par rapport à t et à u, donnera la surface du corps; les variables z, x, y étant maintenant regardées comme de simples fonctions de t et u.

83. Ces expressions pour le volume et pour la surface d'un corps quelconque, dont les coordonnées x, y, z sont supposées fonctions de t et u, étant traduites en langage différentiel, deviennent

$$dtdu\left(\frac{dx}{dt} \times \frac{dy}{du} - \frac{dx}{dy} \times \frac{dy}{dt}\right) z \text{ et}$$

$$dtdu\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \times \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \times \frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \times \frac{dx}{du} - \frac{dz}{du} \times \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \times \frac{dy}{du} - \frac{dz}{du} \times \frac{dy}{dt}\right)^2};$$

et représentent les élémens infiniment petits du volume et de la surface, qu'il faut intégrer et completter d'abord par rapport à l'une des deux variables t, u, et ensuite par rapport à l'autre.

84. Pour donner une application de ces formules, nous supposerons que le corps dont on cherche la solidité et la surface, soit un ellipsoïde quelconque dont les trois demi-axes soient a, b, c; l'équation de sa surface entre les trois coordonnées rectangles x, y, z, parallèles aux demi-axes a, b, c, sera représentée ainsi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

d'où l'on aura z en fonction de x et y.

Mais on évitera l'irrationalité de z en prenant deux angles indéterminés t et u, et en faisant

$$x = a \sin t \cos u, \quad y = b \sin t \sin u, \quad z = c \cos t;$$

et pour avoir le volume et la surface de tout l'ellipsoïde, il suffira, après les substitutions, de prendre les fonctions primitives séparément par rapport à t et u, depuis $t = 0$ jusqu'à t égal à deux angles droits, et depuis $u = 0$ jusqu'à u égal à quatre angles droits; car cette transformation des coordonnées de l'ellipsoïde, que M. Ivori paraît avoir employée le premier pour faciliter le calcul de l'attraction de ce solide (*Trans. Philos.* de 1809, Part. 11), a l'avantage de rendre indépendantes les fonctions primitives relatives à t et u, lorsque la double fonction primitive doit s'étendre à la surface entière.

En prenant les fonctions dérivées des x, y, z par rapport à t et à u, on aura

$$x' = a \cos t \cos u, \quad y' = b \cos t \sin u, \quad z' = -c \sin t,$$
$$x_{,} = -a \sin t \sin u, \quad y_{,} = b \sin t \cos u, \quad z_{,} = 0;$$

et de là on aura

$$x'y_{,} - x_{,}y' = ab \sin t \cos t,$$
$$z'x_{,} - z_{,}x' = ac \sin t^{2} \sin u,$$
$$z'y_{,} - z_{,}y' = -bc \sin t^{2} \cos u;$$

de sorte que les formules pour le volume et pour la surface de l'ellipsoïde deviendront

$$abc \sin t \cos t^{2}, \quad \sin t \sqrt{a^{2}b^{2} \cos t^{2} + c^{2}(a^{2} \sin u^{2} + b^{2} \cos u^{2}) \sin t^{2}},$$

dont il faudra prendre les fonctions primitives, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \pi$, et depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 2\pi$, π étant la demi-périphérie.

85. Considérons d'abord la formule $abc \sin t \cos t^{2}$ pour le vo-

lume. En substituant $1-\sin t^2$ à la place de $\cos t^2$, et ensuite $\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$ au lieu de $\sin t^3$, elle devient

$$\frac{abc}{4}(\sin t + \sin 3t),$$

dont la fonction primitive, prise de manière qu'elle commence où $t=0$, est

$$\frac{abc}{4}\left(1-\cos t + \frac{1-\cos 3t}{3}\right).$$

Faisant $t=\pi$, ce qui donne $\cos t=-1$ et $\cos 3t=-1$, elle se réduit à $\frac{2abc}{3}$.

Il faut prendre encore la fonction primitive de celle-ci par rapport à u depuis $u=0$ jusqu'à $u=2\pi$; et comme la variable u dont la fonction prime est 1, ne s'y trouve pas, il n'y aura qu'à multiplier simplement par 2π; ce qui donnera $\frac{4abc}{3}\pi$ pour la solidité où le volume du sphéroïde entier dont a, b, c sont les trois demi-axes.

86. Venons à la formule relative à la surface; et supposons d'abord, pour la simplifier, $a=b$, ce qui donne un sphéroïde de révolution autour de l'axe $2c$; elle deviendra

$$a\sin t\sqrt{b^2\cos t^2 + c^2\sin t^2},$$

où l'on voit que l'angle u a disparu; je conserve la lettre b sous le signe, pour plus de généralité.

Faisons $\cos t=s$, on aura $\sin t=-s$; d'ailleurs on a $\sin t^2=1-s^2$; on aura ainsi la transformée

$$-as'\sqrt{c^2+(b^2-c^2)s^2},$$

dont il faudra prendre la fonction primitive depuis $s=1$ jusqu'à $s=-1$.

Soit $b^2-c^2=e^2$, on aura la fonction primitive par rapport à s,

$$-\frac{as}{2}\sqrt{c^2+e^2s^2} + \frac{ac^2}{2e}l\left(\sqrt{c^2+e^2s^2}-es\right);$$

faisant $s = 1$, elle se réduit à

$$-\frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2e} l(b - e);$$

et faisant $s = -1$, elle devient

$$\frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2e} l(b + e).$$

Donc la fonction primitive complette relativement à s ou à t, sera

$$ab + \frac{ac^2}{2e} l\frac{b+e}{b-e}.$$

Il faut de nouveau en prendre la fonction primitive relative à u; et comme la variable u ne s'y trouve pas, on se contentera de la multiplier par 2π, et faisant maintenant $b = a$, on aura pour la surface entière du sphéroïde formé par la révolution d'une ellipse dont les demi-axes sont a et c, autour du petit axe $2c$, la formule

$$2\pi a^2 + \frac{\pi ac^2}{e} l\frac{a+e}{a-e},$$

où e est l'excentricité $= \sqrt{a^2 - c^2}$.

Pour que la valeur de e soit réelle, il faut que $a > c$, et par conséquent que le sphéroïde soit aplati et formé par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe $2c$.

Si on voulait avoir la surface d'un sphéroïde alongé, formé par la révolution d'une ellipse autre de son grand axe, il faudrait prendre $2c$ pour son grand axe, alors la valeur de e deviendrait imaginaire. Soit pour ce cas, $c^2 - a^2 = E^2$, on aura

$$e = E\sqrt{-1},$$

et passant des logarithmes imaginaires aux arcs réels, par les formules de l'article 22 (première Partie), on aura pour la surface cherchée, la formule

$$2\pi a^2 + \frac{2\pi ac^2}{E} \times \text{angle}\left(\text{tang.} \frac{E}{a}\right).$$

87. Si on n'avait pas fait $a = b$, et qu'on eût supposé en général,

$$V^2 = \frac{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2}{a^2},$$

on eût eu pour la fonction primitive relative à t, la formule

$$ab + \frac{ac^2V^2}{2e} l \frac{b+e}{b-e},$$

où

$$e^2 = b^2 - c^2V^2;$$

et il aurait été impossible dans l'état actuel de l'analyse, de trouver la fonction primitive de celle-ci relative à u. Mais on peut toujours avoir cette fonction par approximation, lorsque la différence des demi-axes a et b est assez petite.

Soit $\frac{b^2-a^2}{a^2} = i$, cette quantité étant positive ou négative, la quantité V^2 deviendra $1 + i \cos u^2$, et il n'y aura qu'à mettre dans la formule précédente, $c^2(1 + i \cos u^2)$ à la place de c^2V^2, ensuite développer par rapport à i. Donc, si on suppose

$$\frac{ac^2}{2\sqrt{b^2-c^2}} l \frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{b-\sqrt{b^2-c^2}} = f(c^2),$$

on aura, en développant par les fonctions dérivées relatives à c^2, la série

$$ab + f(c^2) + f'(c^2) \times c^2 i \cos u^2 + \frac{1}{2} f''(c^2) \times c^4 i^2 \cos u^4 + \frac{1}{2.3} f'''(c^2) \times c^6 i^3 \cos u^6 + \text{etc.},$$

dont il faudra prendre les fonctions primitives relatives à u, depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 2\pi$.

Désignons par $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$, $2\pi\gamma$, etc. les fonctions primitives de $\cos u^2$, $\cos u^4$, $\cos u^6$, etc., prises entre ces limites, on aura pour la surface de l'ellipsoïde dont a, b, c sont les trois demi-axes, l'expression

$$2\pi [ab + f(c^2) + \alpha c^2 i f'(c^2) + \frac{1}{2} \beta c^4 i^2 f''(c^2) + \frac{1}{2.3} \gamma c^6 i^3 f'''(c^2) + \text{etc.}],$$

série qui sera d'autant plus convergente que la quantité i sera plus petite.

A l'égard des coefficiens α, β, γ, etc., il est facile de les déterminer en résolvant les puissances de cos u en cosinus d'angles multiples de u, par le moyen de l'expression exponentielle imaginaire de cos u (art. 22, Part. Ire); et comme les cosinus ont pour fonctions primitives les sinus correspondans, lesquels deviennent nuls aux deux extrémités où $u=0$ et $u=2\pi$, il s'ensuit qu'il ne restera que les termes indépendans de u, multipliés par 2π, où il est facile de voir que ces termes ne sont que les coefficiens du terme moyen du binome, élevé à la seconde, à la quatrième, à la sixième, etc. puissance, divisé par la même puissance de 2. Ainsi on aura

$$\alpha=\frac{2}{4},\quad \beta=\frac{4.3}{4.8},\quad \gamma=\frac{6.5.4}{4.8.12},\quad \text{etc.}$$

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'objet de la mécanique. Du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré. Du mouvement rectiligne en général. Relation entre l'espace, la vîtesse et la force accélératrice.

1. Nous allons employer la théorie des fonctions dans la mécanique. Ici les fonctions se rapportent essentiellement au temps, que nous désignerons toujours par t; et comme la position d'un point dans l'espace dépend de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ces coordonnées, dans les problèmes de mécanique, seront censées être des fonctions de t. Ainsi, on peut regarder la mécanique comme une géométrie à quatre dimensions, et l'analyse mécanique comme une extension de l'analyse géométrique.

Considérons d'abord le mouvement rectiligne, et supposons que x soit l'espace parcouru pendant le temps t, on aura $x = ft$, et la fonction ft devra être telle, qu'elle devienne nulle lorsque $t = 0$. La forme la plus simple de ft est évidemment at; ce qui donne $x = at$, a étant une constante; ainsi, dans le mouvement représenté par cette équation, les espaces parcourus sont toujours proportionnels aux temps écoulés depuis le commencement du mouvement; ce qui est la propriété du mouvement qu'on appelle *uniforme*. La constante a, qui exprime le rapport de l'espace au

temps, est la mesure de ce qu'on nomme *la vîtesse ;* c'est le seul élément qui entre dans cette espèce de mouvement, et par lequel un mouvement uniforme diffère d'un autre mouvement uniforme.

L'observation et l'expérience nous font voir qu'un corps mis en mouvement d'une manière quelconque, si on écarte toutes les causes d'altération qui peuvent agir sur lui, continue à se mouvoir de lui-même d'un mouvement rectiligne et uniforme; d'où il suit que la vîtesse une fois imprimée, se conserve toujours la même, et suivant la même direction ; c'est en quoi consiste la première loi du mouvement.

Si on représente le temps par l'abscisse, et l'espace parcouru par l'ordonnée d'une ligne, il est clair que cette ligne sera pour le mouvement uniforme une droite passant par l'origine des abscisses, et que la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe, sera la mesure de la vîtesse du mouvement.

2. La fonction de t la plus simple après at, est bt^2; en prenant cette expression pour ft, on aura une autre espèce de mouvement rectiligne représenté par l'équation $x=bt^2$, dans laquelle les espaces parcourus depuis l'origine du mouvement sont proportionnels aux carrés de temps.

L'observation et l'expérience nous présentent aussi journellement ce mouvement dans les corps qui tombent par leur pesanteur, en faisant abstraction de la résistance de l'air, et de toute autre cause étrangère d'altération. La constante b, qui est le seul élément qui entre dans la constitution de ce mouvement, est la même pour tous les corps dans le même lieu de la terre, et dépend de la force de la gravité qui le produit et qui agit sans cesse de la même manière sur le mobile. Ainsi, ce mouvement ne se continue qu'en vertu de la force, qu'on peut regarder comme une cause extérieure agissant continuellement sur le corps, et dont le coefficient b est la mesure.

Comme dans ce mouvement les espaces augmentent en plus grande raison que les temps, on le nomme mouvement *accéléré*, et

et en particulier, on appelle celui dont il s'agit, *uniformément accéléré*, par la raison que nous verrons dans un moment.

Si on représente ici le temps par l'abscisse, et l'espace parcouru par l'ordonnée d'une courbe, on voit que cette courbe sera une parabole dont le paramètre sera $\frac{1}{b}$, et dont l'axe principal sera l'axe des ordonnées y.

Le mouvement le plus simple, après celui que nous venons de considérer, serait celui où l'on aurait $x = ct^3$; mais la nature ne nous offre aucun mouvement simple de cette espèce, et nous ignorons ce que le coefficient c pourrait représenter, en le considérant d'une manière absolue et indépendante des vîtesses et des forces.

Ce sont là les mouvemens simples dont toutes les autres espèces de mouvement peuvent être regardées comme composées; et l'art de la mécanique consiste dans cette composition et décomposition, d'où résultent les rapports entre les temps, les espaces, les vîtesses et les forces.

3. Si l'on réunit les deux espèces de mouvement que nous venons de considérer, on aura le mouvement représenté par l'équation

$$x = at + bt^2,$$

qui sera par conséquent composé d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré, et qui résultera de la réunion des deux causes qui peuvent produire chacun d'eux en particulier, c'est-à-dire, d'une vîtesse proportionnelle à a, primitivement imprimée, et d'une force accélératrice proportionnelle à b, agissant continuellement sur le mobile.

La nature nous offre aussi la composition de ces deux mouvemens dans les corps pesans lancés verticalement de haut en bas, ou de bas en haut, en faisant abstraction de la résistance de l'air, et de toute autre cause étrangère. Dans les corps lancés verticalement de haut en bas, la force b agit dans la direction même du mouvement, comme nous le supposons; mais dans les corps lancés verticalement de bas en haut, la force b agit en sens contraire,

on pourra toujours prendre θ assez petit pour que cette dernière différence surpasse la première, et que dès que cette condition aura lieu pour une valeur de θ, elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus petites. Donc le terme $\theta f't$ exprime tout ce qu'il peut y avoir d'uniforme dans le mouvement proposé, considéré au commencement du temps θ, et le terme $\frac{\theta^2}{2} f''t$ exprime de même tout ce qu'il peut y avoir dans ce mouvement d'uniformément accéléré.

On peut conclure de là que tout mouvement rectiligne, représenté par l'équation $x = ft$, peut, dans un instant quelconque au bout du temps t, être regardé comme composé d'un mouvement uniforme dû à une vîtesse imprimée au mobile, mesurée par $f't$, et d'un mouvement uniformément accéléré dû à une force accélératrice agissant sur le mobile et proportionnelle à $\frac{1}{2} f''t$, ou simplement à $f''t$; que par conséquent, si les causes qui empêchent le mouvement proposé d'être uniforme, venaient à cesser tout-à-coup, le mouvement se continuerait, dès cet instant, d'une manière uniforme avec une vîtesse mesurée par $f't$; et que si l'effet de ces causes, au lieu de devenir nul, devenait constant, le mouvement deviendrait composé du mouvement uniforme dont nous venons de parler, et d'un mouvement uniformément accéléré, commençant au même instant, en vertu d'une force accélératrice constante et proportionnelle à $f''t$.

Plusieurs phénomènes de la nature, et surtout les résultats des différentes expériences qu'on a imaginées sur la chute des corps, confirment pleinement la conclusion que nous venons de trouver, et qui doit être regardée comme le principe fondamental de toute la théorie du mouvement.

5. Donc, en général, dans tout mouvement rectiligne dans lequel l'espace parcouru est une fonction donnée du temps écoulé, la fonction prime de cette fonction représentera la vîtesse, et la fonction seconde représentera la force accélératrice dans un instant quelconque; car, comme les temps, les espaces, les vîtesses et les forces sont des choses hétérogènes qu'on ne peut comparer

ensemble qu'après les avoir réduites en nombres, en les rapportant chacune à une unité déterminée dans son espèce, nous pouvons, pour plus de simplicité, exprimer immédiatement la vîtesse et la force par les fonctions primes et secondes, comme nous exprimons l'espace par la fonction primitive. D'où l'on voit que les fonctions primes et secondes se présentent naturellement dans la mécanique, où elles ont une valeur et une signification déterminées; c'est ce qui a porté *Newton* à établir le calcul des fluxions sur la considération du mouvement. Ainsi, l'espace, la vîtesse et la force étant regardés comme des fonctions du temps, sont représentés respectivement par la fonction primitive, par sa fonction prime et par sa fonction seconde; de manière que connaissant l'expression de l'espace par le temps, on aura tout de suite celles de la vîtesse et de la force par l'analyse directe des fonctions; mais si on ne connaît que la vîtesse ou la force par le temps, il faudra alors remonter aux équations primitives par les règles de l'analyse inverse.

Ces notions de la vîtesse et de la force accélératrice sont, comme l'on voit, très-simples, et indépendantes de toute métaphysique. Elles sont fondées sur la nature du mouvement regardé comme le transport d'un corps d'un lieu à un autre. Si un corps demeure en repos, sa vîtesse est évidemment nulle; mais il peut éprouver l'action d'une force accélératrice qui, étant arrêtée par quelque obstacle, ne produit qu'une tendance au mouvement. Cette force est alors ce qu'on appelle *pression* ou *force morte*, et peut être comparée à l'action qu'un corps pesant exerce sur l'obstacle qui l'empêche de tomber.

6. Désignons par x l'espace parcouru durant le temps t, en regardant x comme fonction de t, on aura, suivant la notation employée jusqu'ici, x' pour la vîtesse au bout de ce temps, et x'' pour la force accélératrice dans le même instant; d'où l'on voit que si la loi du mouvement est donnée par une relation entre le temps, l'espace, la vîtesse et la force, on aura une équation du second ordre entre t, x, x', x'', d'où il faudra tirer l'équation primitive en t, en x par les règles de l'analyse inverse des fonctions, et on déterminera les deux constantes arbitraires qui entreront dans cette

équation, par les valeurs données de x et x' dans un instant donné, c'est-à-dire, par l'espace et la vîtesse, qu'on suppose connus dans cet instant.

Dans le mouvement uniforme représenté par l'équation $x = at$, on aura donc

$$x' = a, \quad x'' = 0;$$

ainsi, le coefficient a, rapport de l'espace parcouru au temps, exprimera la vîtesse, et la force accélératrice sera nulle. Dans le mouvement uniformément accéléré et représenté par $x = bt^2$, on aura

$$x' = 2bt \quad \text{et} \quad x'' = 2b.$$

Donc, la vîtesse dans un instant quelconque, est proportionnelle au temps écoulé depuis l'origine du mouvement. Le rapport entre la vîtesse et le temps exprime la force accélératrice, et est double du rapport entre l'espace parcouru et le carré du temps. L'augmentation continuelle et uniforme de la vîtesse dans cette espèce de mouvement, lui a fait donner le nom de *mouvement uniformément accéléré.*

Ce qu'il y a de plus simple et de plus naturel pour comparer les forces accélératrices, c'est de prendre la force de la gravité dans un lieu donné pour l'unité. Ainsi, on aura pour les corps pesans,

$$2b = 1 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2};$$

donc

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad x' = t = \sqrt{2x};$$

de sorte qu'on peut déterminer la vîtesse par la racine carrée du double de la hauteur d'où un corps pesant doit tomber pour acquérir cette vîtesse. Par conséquent, si on veut prendre une vîtesse donnée pour l'unité des vîtesses, il faudra alors prendre pour l'unité des espaces le double de la hauteur nécessaire pour la produire.

CHAPITRE II.

De la composition des mouvemens, et en particulier de celle de trois mouvemens uniformes. De la composition et décomposition des vîtesses et des forces. De la trajectoire des projectiles dans le vide.

7. Nous venons d'examiner la nature et les propriétés du mouvement rectiligne; le mouvement curviligne se réduit naturellement à deux ou trois mouvemens rectilignes, suivant que la courbe décrite par le mobile est à simple ou à double courbure. En effet, en rapportant cette courbe à deux ou trois coordonnées rectangulaires x, y, z, il est clair que la détermination du point de la courbe où le mobile se trouvera à chaque instant, dépendra de la valeur de ces coordonnées au même instant, de sorte que chacune de ces coordonnées sera une fonction donnée du temps, et pourra représenter l'espace rectiligne parcouru par un mobile qui serait la projection du vrai mobile sur chacun des trois axes des mêmes coordonnées.

Ainsi, si le mouvement se fait dans un plan, il pourra être représenté par les deux équations

$$x = \mathrm{f}t, \quad y = \mathrm{F}t,$$

d'où éliminant t, on aura en x et y l'équation de la ligne parcourue par le mobile. Si le mouvement se fait dans des plans différens, il sera représenté alors par les trois équations

$$x = \mathrm{f}t, \quad y = \mathrm{F}t, \quad z = \varphi t,$$

d'où éliminant t, on aura deux équations en x, y, z, qui détermineront la ligne à double courbure décrite par le corps.

Supposons d'abord que les trois mouvemens relatifs aux axes des x, y, z soient uniformes, on aura

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct,$$

a, b, c étant les vîtesses de ces mouvemens. Eliminant t, on aura

$$y = \frac{bx}{a} \quad \text{et} \quad z = \frac{cx}{a},$$

deux équations qui appartiennent à une ligne droite passant par l'origine des coordonnées, et dont les projections sur les plans des x, y, et des x, z font, avec l'axe des x, des angles dont $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sont les tangentes. La partie de cette droite qui répond aux coordonnées x, y, z, sera donc

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = t\sqrt{(a^2+b^2+c^2)};$$

ce sera l'espace décrit pendant le temps t, en vertu des trois mouvemens uniformes. Ce mouvement composé sera donc aussi rectiligne et uniforme, avec une vîtesse égale à $\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$. A l'égard de sa direction, il est plus simple de la rapporter aux trois axes des coordonnées x, y, z, et il est visible que, puisque at, bt, ct sont les projections de la ligne $t\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$ sur les trois axes, les rapports $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}, \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$ seront les cosinus des angles que cette direction fait avec les mêmes axes. La somme des carrés de ces cosinus est, comme l'on voit, égale à l'unité, ce qui est la propriété connue des angles qu'une même droite fait avec deux autres droites perpendiculaires entre elles.

8. Nommons A la vîtesse du mouvement composé, et α, β, γ les angles que la direction de ce mouvement fait avec les trois axes, on aura

$$A = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)},$$

et

$$\frac{a}{A} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{A} = \cos\beta, \quad \frac{c}{A} = \cos\gamma;$$

d'où

d'où l'on tire

$$a = A\cos\alpha, \quad b = A\cos\beta, \quad c = A\cos\gamma.$$

On voit par là comment la vîtesse A d'un mouvement uniforme, suivant une direction donnée, peut se décomposer dans trois vîtesses a, b, c suivant des directions perpendiculaires entre elles.

Si donc un corps avait à la fois deux vîtesses A et B suivant des directions données, faisant, avec trois axes perpendiculaires entre eux, les angles respectifs α, β, γ et λ, μ, ν, il en résulterait, suivant ces mêmes axes, les vîtesses composées

$$A\cos\alpha + B\cos\lambda, \quad A\cos\beta + B\cos\mu, \quad A\cos\gamma + B\cos\nu;$$

et ces vîtesses donneraient une vîtesse unique C, avec une direction qui ferait, avec les mêmes axes, les angles π, ρ, σ, de manière que l'on aurait

$$\begin{aligned} C\cos\pi &= A\cos\alpha + B\cos\lambda, \\ C\cos\rho &= A\cos\beta + B\cos\mu, \\ C\cos\sigma &= A\cos\gamma + B\cos\nu. \end{aligned}$$

Comme les lignes $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ sont les projections sur les trois axes de la ligne A prise sur la direction de la vîtesse A, et ainsi des autres quantités semblables, il est facile de conclure des équations précédentes, que, si on place les deux lignes A et B l'une au bout de l'autre, suivant leurs propres directions, la ligne C joindra ces lignes, de sorte que A, B, C seront les trois côtés d'un triangle; et si, sur les deux lignes A et B partant d'un même point, on construit un parallélogramme, la ligne C en sera la diagonale. De cette manière, la composition et décomposition des vîtesses se réduit à une considération géométrique très-simple; mais pour le calcul, il est plus simple encore de tout rapporter à trois axes perpendiculaires entre eux par les formules précédentes, qu'on peut étendre à autant de vîtesses qu'on aura à composer.

Nous remarquerons encore que si on nomme Δ l'angle des deux lignes A et B partant d'un même point, le carré de la ligne qui les

joindra, sera exprimé, comme l'on sait, par

$$A^2 - 2AB\cos\Delta + B^2.$$

D'un autre côté, en considérant les projections de ces lignes, il est aisé de voir que ce même carré sera exprimé par

$$(A\cos\alpha - B\cos\lambda)^2 + (A\cos\beta - B\cos\mu)^2 + (A\cos\gamma - B\cos\nu)^2 = A^2 + B^2 - 2AB(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu),$$

d'où l'on tire, par la comparaison,

$$\cos\Delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

équation qui donne la relation entre l'angle Δ de deux lignes et les angles α, β, γ et λ, μ, ν que ces lignes font avec trois axes perpendiculaires entre eux. Cette relation est connue dans la trigonométrie sphérique; mais comme nous aurons occasion d'en faire usage dans la suite, nous avons été bien aises de la démontrer par la méthode des projections.

9. La considération des mouvemens uniformes nous a donné la composition et la décomposition des vîtesses; celle des mouvemens uniformément accélérés nous donnera de même la composition et la décomposition des forces.

En effet, supposons que les trois mouvemens rectilignes suivant les axes des coordonnées x, y, z, soient uniformément accélérés et produits par des forces accélératrices g, h, k, on aura (art. 6)

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2, \quad y = \tfrac{1}{2}ht^2, \quad z = \tfrac{1}{2}kt^2.$$

L'élimination de t donne

$$y = \frac{hx}{g}, \quad z = \frac{kx}{g},$$

ce qui fait voir que la ligne décrite en vertu de ces mouvemens, est aussi une droite passant par l'origine des coordonnées. La partie de cette droite qui répond aux coordonnées x, y, z sera donc aussi

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \tfrac{1}{2}t^2\sqrt{(g^2 + h^2 + k^2)};$$

ce sera l'espace parcouru par le mouvement composé, pendant le temps t; d'où l'on voit que ce mouvement sera aussi uniformément accéléré, et dû à une force accélératrice égale à $\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}$. Et comme les lignes $\frac{1}{2}gt^2$, $\frac{1}{2}ht^2$, $\frac{1}{2}kt^2$ sont les projections de la ligne $\frac{1}{2}t^2\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}$ sur les trois axes, les rapports $\frac{g}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}}$, $\frac{h}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}}$, $\frac{k}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}}$ seront les cosinus des angles que la direction du mouvement composé fera avec les mêmes axes.

On voit par là que la composition des mouvemens uniformément accélérés, suit les mêmes règles que celle des mouvemens uniformes, et que par conséquent la composition et décomposition des forces se fait de la même manière que celle des vîtesses; de sorte que les formules trouvées dans l'article précédent, s'appliqueront également aux forces accélératrices, en substituant simplement les forces aux vîtesses.

Ainsi, si un mobile est sollicité à la fois par deux forces G et H, suivant des directions données, dont les angles avec trois axes perpendiculaires entre eux, soient respectivement α, β, γ et λ, μ, ν, il en résultera, suivant les directions des trois axes, les forces composées

$$G\cos\alpha+H\cos\lambda,\quad G\cos\beta+H\cos\mu,\quad G\cos\gamma+H\cos\nu;$$

et si K est la force unique résultante de celle-ci, en nommant π, ρ, σ les angles que sa direction fera avec les mêmes axes, on aura les équations

$$\begin{aligned} K\cos\pi &= G\cos\alpha+H\cos\lambda,\\ K\cos\rho &= G\cos\beta+H\cos\lambda,\\ K\cos\sigma &= G\cos\gamma+H\cos\nu. \end{aligned}$$

Cette manière de considérer la composition des vîtesses et celle des forces comme des résultats de la composition des espaces parcourus, me paraît la plus naturelle; et elle a l'avantage de faire voir clairement pourquoi la composition des forces suit nécessairement les mêmes lois que celle des vîtesses. Comme on peut considérer les forces indépendamment du mouvement, on a

cherché à déduire leur composition de principes purement géométriques ou analytiques; mais il ne serait pas impossible de prouver que toutes les démonstrations qu'on a données de la composition des forces ne sont que la composition des espaces, déguisée; il n'en faut peut être excepter que celles qui sont fondées sur l'équilibre du levier droit.

10. Si les mouvemens suivant les axes des coordonnées, étaient composés d'uniformes et d'uniformément accélérés, de manière que l'on eût

$$x = at + \tfrac{1}{2}gt^2, \quad y = bt + \tfrac{1}{2}ht^2, \quad z = ct + \tfrac{1}{2}kt^2,$$

alors la ligne décrite en vertu de ces mouvemens, ne serait plus droite, elle serait seulement dans un même plan passant par l'origine des coordonnées; car en éliminant t et t^2 des trois équations, on aurait une équation de la forme

$$lx + my + nz = 0.$$

Mais on peut composer à part les trois mouvemens uniformes et les trois mouvemens uniformément accélérés; et il en résultera un mouvement composé d'un simple mouvement uniforme suivant une direction donnée, et d'un simple mouvement uniformément accéléré suivant une autre direction donnée.

La nature nous présente aussi la combinaison de ces mouvemens dans les projectiles lancés obliquement à l'horizon, en faisant abstraction de la résistance de l'air. Le mouvement uniforme, effet de la vîtesse imprimée, se continue en ligne droite, comme s'il était seul; et le mouvement uniformément accéléré, effet de la gravité du corps, se continue aussi verticalement de haut en bas, comme s'il était unique dans le mobile, de manière qu'au bout d'un temps quelconque, le corps se trouve au même point où il serait si ces deux mouvemens s'effectuaient successivement et indépendamment l'un de l'autre; et à chaque instant, le corps a à la fois la vîtesse du mouvement uniforme et la vîtesse du mouvement uniformément accéléré, et de ces deux vîtesses suivant des directions différentes, se compose la vîtesse du projectile.

Soit H la hauteur d'où il faudrait qu'un corps tombât pour acquérir la vîtesse avec laquelle le projectile est lancé obliquement à l'horizon; cette vîtesse sera exprimée par $\sqrt{2H}$, en prenant la force accélératrice de la gravité pour l'unité (art. 6). De là, en prenant les abscisses x horizontales et dans le plan de la ligne de projection, et les ordonnées y verticales et dirigées de haut en bas, et nommant α l'inclinaison de la ligne de projection avec l'horizontale x on aura $\sqrt{2H} \times \cos\alpha$ et $\sqrt{2H} \times \sin\alpha$ pour les vîtesses l'horizontale et verticale : donc, les expressions de x et y deviendront

$$x = t\sqrt{2H}\cos\alpha \quad \text{et} \quad y = t\sqrt{2H}\sin\alpha - \tfrac{1}{2}t^2,$$

parce que la direction de la gravité étant contraire à celle des ordonnées y, le terme $\frac{1}{2}t^2$, dû à l'accélération de la gravité, doit être pris négativement. En éliminant t de ces équations, on aura

$$y = x\,\text{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4H\cos\alpha^2},$$

équation à une parabole, d'où l'on pourra déduire les propriétés connues de la trajectoire des projectiles dans le vide; mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans ce détail.

CHAPITRE III.

Du mouvement curviligne. Des vîtesses et des forces dans ces mouvemens. Équations générales du mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques. De la manière d'éliminer le temps dans ces équations pour trouver la courbe décrite par le corps.

11. Considérons maintenant un mouvement quelconque, et supposons que les coordonnées x, y, z de la courbe décrite par le mobile, soient des fonctions données du temps t. Dans un instant quelconque, au bout du temps t, le corps aura, suivant la direction de l'axe des x, la vîtesse x' et la force accélératrice x'' (art. 6); il aura pareillement, suivant la direction de l'axe des y, la vîtesse y' et la force accélératrice y''; et suivant la direction de l'axe des z, la vîtesse z' et la force accélératrice z''. Donc, les trois vîtesses x', y', z' donneront la vîtesse composée $\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$, que nous appellerons u, dont la direction fera, avec les trois axes, des angles dont les cosinus seront $\frac{x'}{u}, \frac{y'}{u}, \frac{z'}{u}$; de sorte que, nommant α, β, γ ces angles, on aura (art. 8)

$$x' = u\cos\alpha, \quad y' = u\cos\beta, \quad z' = u\cos\gamma.$$

Nous remarquerons d'abord ici que l'expression de la vîtesse u du mobile, est la même que celle de la fonction prime de l'arc de la courbe parcourue (art. 37, deuxième Partie); de sorte que nommant, en général, s l'espace curviligne parcouru par le corps, et le regardant comme une fonction du temps, on aura s' pour vîtesse réelle du mobile, comme si le mouvement était rectiligne.

Nous remarquerons ensuite que la direction de cette vîtesse sera la même que celle de la tangente de la courbe; car, par les formules de l'article 33 de la deuxième Partie, on voit que y' et z' sont les tangentes des angles que la tangente de la courbe projetée sur le plan des x et y et sur celui des x et z, fait avec l'axe des x; mais comme, dans ces formules, y et z sont supposées fonctions de x, pour les appliquer au cas où l'on suppose x, y, z fonction d'une troisième variable t, il faudra, suivant la remarque de l'article 50 de la première Partie, substituer $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$ à la place de y' et z', de sorte que les tangentes des angles dont il s'agit seront exprimées par $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$: ces angles seront donc les mêmes que ceux des projections sur les mêmes plans de la ligne qui serait décrite par la vîtesse composée de trois vîtesses x', y', z' (art. 7); par conséquent, cette ligne coïncidera avec la tangente de la courbe. De là, il suit que si les causes qui empêchent le mouvement d'être rectiligne et uniforme, venaient à cesser subitement dans un instant quelconque, le mobile continuerait son mouvement par la tangente, avec une vîtesse égale à la fonction prime de l'arc décrit.

Suivant le calcul différentiel, les fonctions primes x', y', z' sont représentées par $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, et les fonctions secondes x'', y'', z'' par $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, en prenant dt constant.

12. Les trois forces accélératrices x'', y'', z'' donneront de même (art. 9) une force unique exprimée par $\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)}$, que nous appellerons P, et dont la direction fera, avec les trois axes des coordonnées x, y, z, des angles dont les cosinus seront $\frac{x''}{P}, \frac{y''}{P}, \frac{z''}{P}$; de sorte que, nommant λ, μ, ν ces angles, on aura

$$x'' = P\cos\lambda; \quad y'' = P\cos\mu; \quad z'' = P\cos\nu.$$

Ainsi, connaissant la loi du mouvement du corps, c'est-à-dire, les valeurs de x, y, z en t, on pourra trouver, par ces équations,

la force accélératrice et sa direction à chaque instant; et réciproquement, connaissant la force P avec les angles λ, μ, ν, on aura trois équations du second ordre qui serviront à déterminer x, y et z en t. Les problèmes de la première espèce ne dépendent que de l'analyse directe des fonctions, et sont, par conséquent, toujours résolubles; ceux de la seconde espèce dépendent de l'analyse inverse des fonctions, et sont sujets à toutes les difficultés de cette analyse.

Si le mobile était sollicité à la fois par deux forces accélératrices P et Q suivant des directions faisant, avec les axes des x, y, z, des angles λ, μ, ν pour la force P, et π, ρ, σ pour la force Q, on aurait, par les formules des articles cités,

$$x'' = \mathrm{P}\cos\lambda + \mathrm{Q}\cos\pi,$$
$$y'' = \mathrm{P}\cos\mu + \mathrm{Q}\cos\rho,$$
$$z'' = \mathrm{P}\cos\nu + \mathrm{Q}\cos\sigma;$$

et ainsi de suite, pour tel nombre de forces qu'on voudra.

13. Supposons que les directions des forces P, Q fassent, avec la tangente de la courbe, les angles Δ, Γ, puisque, dans les formules de l'article 11, les angles α, β, γ sont les mêmes que ceux de la tangente avec les trois axes, on aura, par la formule trouvée à la fin de l'article 8,

$$\cos\Delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

et de même,

$$\cos\Gamma = \cos\alpha\cos\pi + \cos\beta\cos\rho + \cos\gamma\cos\sigma.$$

Donc, multipliant les trois dernières équations de l'article précédent par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et les ajoutant ensemble, on aura

$$x''\cos\alpha + y''\cos\beta + z''\cos\gamma = \mathrm{P}\cos\Delta + \mathrm{Q}\cos\Gamma.$$

Substituant pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs $\frac{x'}{u}$, $\frac{y'}{u}$, $\frac{z'}{u}$

(art.

(art. 11), et remarquant que $\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}}$ est la fonction prime de $\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$, c'est-à-dire, de s', que par conséquent cette quantité est égale à s'', on aura l'équation

$$s'' = P\cos\Delta + Q\cos\Gamma,$$

qui est, comme l'on voit, semblable aux équations du mouvement rectiligne suivant les trois axes.

Cette équation sert à déterminer directement la vîtesse réelle du corps qui est exprimée par s'; et l'on voit que les forces perpendiculaires à la tangente, n'influent en rien sur la vîtesse, puisque les angles Δ, Γ étant alors droits, leurs cosinus sont nuls, ce qui détruit les termes dus à ces forces dans l'expression de s''. D'où l'on peut conclure, en général, que lorsqu'un corps est contraint de se mouvoir dans un canal d'une figure donnée, comme l'action des parois du canal sur le corps ne peut s'exercer que perpendiculairement au canal même, la vîtesse du corps ne sera nullement altérée par cette action. Au contraire, les forces qui agissent suivant la tangente, produisent sur la vîtesse leur plein et entier effet, comme si le mouvement du corps était rectiligne, puisque les angles Δ, Γ devenant nuls par ces forces, leurs cosinus sont égaux à l'unité.

14. La gravité et toutes les forces d'attraction connues agissent également sur toutes les parties matérielles des corps, et produisent le même mouvement, abstraction faite de l'inégalité des forces, à raison des distances; de sorte que l'effet de l'action de ces forces est indépendant de la masse du corps mu, et est le même par rapport à la vîtesse imprimée, que si la masse était réduite à un point. Dans les attractions réciproques des corps, la force d'attraction est proportionnelle à la masse du corps attirant, parce que chacune de ses particules attire également; par conséquent, le mouvement absolu imprimé au corps attiré, est simplement proportionnel à la masse du corps attirant.

Il n'en est pas de même des forces qui ne pénètrent point dans l'intérieur des corps, et qui n'agissent qu'à l'extérieur, comme

l'action des ressorts, celle de la résistance des fluides, les forces produites par la pression, par la tension des fils, etc. Il est clair que ces forces ne peuvent produire le même effet sur différens corps, à moins qu'elles ne soient proportionnelles à leurs masses; car si une force double, par exemple, agit sur un corps de masse double, c'est la même chose que si deux forces simples agissent séparément sur deux masses simples; il est clair aussi que l'effet produit sur une même masse ou des masses égales, par différentes forces, c'est-à-dire, le mouvement ou la vîtesse imprimée doit être proportionnelle aux forces; ainsi, si une force F agissant sur une masse M, y imprime la vîtesse V, une force mF agissant sur la masse mM, y imprimera la même vîtesse V; mais la force mF agissant sur la masse M, lui imprimera la vîtesse mV: donc la même force mF imprimera à la masse mM la vîtesse V, et à la masse M la vîtesse mV; d'où il suit que les vîtesses imprimées par une même force à des masses différentes, sont en raison inverse des masses. Donc, en général, l'effet d'une force donnée sur une masse donnée, est en raison directe de la force et en raison inverse de la masse, ou comme la force divisée par la masse.

Ce principe est confirmé par l'expérience; car un ressort placé entre deux corps, et agissant également sur l'un et sur l'autre, leur imprime des vîtesses en raison inverse de leurs masses. Lorsque deux corps durs mus sur la même ligne en sens opposés, viennent à se choquer avec des vîtesses en raison inverse de leurs masses, ils s'arrêtent après le choc, par la destruction réciproque de leur mouvement; et s'ils sont parfaitement élastiques, ils sont réfléchis en arrière, chacun avec la même vîtesse qu'il avait avant le choc.

Dans les corps pesans, comme la gravité agit également sur toutes les parties de la masse du corps, son action absolue est proportionnelle à la masse; donc, divisant cette action par la masse, l'effet de la pesanteur pour imprimer du mouvement aux corps, devient indépendant de leur masse, et est le même pour tous les corps. Mais si deux corps pesans se tiennent par un fil passant sur une poulie, comme les forces qui résultent de leur pesanteur, et

qui sont proportionnelles aux masses, tirent le fil en sens contraire, il n'y a que la différence de ces forces qui puisse leur imprimer du mouvement; et comme les deux corps doivent se mouvoir conjointement et parcourir le même espace vertical dans le même temps, la masse totale à mouvoir est la somme des masses; ainsi, l'action de la gravité pour mouvoir ces corps, se trouve diminuée en raison de la différence des masses à leur somme; par conséquent, les espaces parcourus au bout d'un temps quelconque, seront à ceux d'un corps pesant qui tombe librement, dans la même raison. C'est ce que l'expérience confirme dans la machine inventée par *Atwood* pour démontrer les lois de l'accélération des graves.

15. Il résulte du principe que nous venons d'exposer, que les forces accélératrices d'un corps doivent être estimées par les valeurs absolues des forces qui agissent sur le corps, divisées par la masse même du corps. Ainsi, si P, Q, etc. expriment les valeurs absolues des forces qui agissent sur un corps dont la masse est M, suivant des directions qui fassent, avec les axes des coordonnées x, y, z, les angles λ, μ, ν pour la force P, les angles π, ρ, σ pour la force Q, et ainsi des autres, il faudra, dans les formules de l'article 12, mettre partout $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{M}$, etc., à la place de P, Q, etc., ou, ce qui reviendra au même, multiplier par M les quantités x'', y'', z''. De cette manière, on aura donc pour les équations du mouvement du corps M, sollicité par les forces ou puissances quelconques P, Q, etc., les équations

$$\begin{aligned} Mx'' &= P\cos\lambda + Q\cos\pi + \text{etc.},\\ My'' &= P\cos\mu + Q\cos\rho + \text{etc.},\\ Mz'' &= P\cos\nu + Q\cos\sigma + \text{etc.} \end{aligned}$$

Lorsque des corps s'attirent mutuellement, comme l'attraction est censée venir de toutes les parties de la masse attirante et agir sur toutes les parties de la masse attirée, il s'ensuit que la valeur absolue de la force d'attraction entre deux corps, doit être proportionnelle au produit de leurs masses.

16. Dans ces équations, les coordonnées x, y, z sont regardées comme des fonctions du temps t. Pour avoir les équations mêmes de la courbe décrite par le corps, il faudra éliminer le temps, et réduire les coordonnées y et z à de simples fonctions de x. Voici l'esprit et le fondement de cette réduction :

En regardant les quantités x, y, z comme fonction de t, lorsque t devient $t+\theta$, ces quantités deviennent

$$x+\theta x'+\frac{\theta^2}{2}x''+\frac{\theta^3}{2.3}x'''\text{, etc.,}$$
$$y+\theta y'+\frac{\theta^2}{2}y''+\frac{\theta^3}{2.3}y'''\text{, etc.,}$$
$$z+\theta z'+\frac{\theta^2}{2}z''+\frac{\theta^3}{2.3}z'''\text{, etc.,}$$

par les principes établis dans la première Partie sur le développement des fonctions.

En regardant, d'un autre côté, y et z comme fonctions de x, lorsque x devient $x+i$, ces mêmes quantités deviennent

$$y+i(y')+\frac{i^2}{2}(y'')+\frac{i^3}{2.3}(y''')+\text{etc.,}$$
$$z+i(z')+\frac{i^2}{2}(z'')+\frac{i^3}{2.3}(z''')+\text{etc.}$$

Je renferme ici les quantités y', y'', etc., z', z'', etc. entre des parenthèses, pour les distinguer des mêmes quantités relatives à la première hypothèse.

Donc si on fait

$$i=\theta x'+\frac{\theta^2}{2}x''+\frac{\theta^3}{2.3}x'''+\text{etc.,}$$

il faudra que l'on ait, quel que soit θ, l'équation

$$i(y')+\frac{i^2}{2}(y'')+\frac{i^3}{2.3}(y''')+\text{etc.}=\theta y'+\frac{\theta^2}{2}y''+\frac{\theta^3}{2.3}y'''+\text{etc.,}$$

et de même,

$$i(z')+\frac{i^2}{2}(z'')+\frac{i^3}{2.3}(z''')+\text{etc.,}=\theta z'+\frac{\theta^2}{2}z''+\frac{\theta^3}{2.3}z'''+\text{etc.}$$

Substituant la valeur de i, et comparant les termes affectés de la même puissance de θ, la première équation donnera

$$y' = (y')x', \quad y'' = (y')x'' + (y'')x'^2,$$
$$y''' = (y')x''' + 3(y'')x'x'' + (y''')x'^3;$$

et ainsi de suite. D'où l'on tire

$$(y') = \frac{y'}{x'}, \quad (y'') = \frac{y'' - (y')x''}{x'^2} = \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3},$$
$$(y''') = \frac{y''' - (y')x''' - 3(y'')x'x''}{x'^3} = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{y'x'''}{x'^4} - \frac{3y''x''}{x'^4} + \frac{3y'x''^2}{x'^5};$$

et ainsi de suite. Et l'on aura, par la seconde équation, des formules semblables pour (z'), (z''), etc., en changeant seulement la lettre y en z.

Ces formules s'accordent avec celles que nous avons trouvées, d'une autre manière, dans la première Partie (art. 50) car on voit que

$$(y') = \frac{y'}{x'}, \quad (y'') = \frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}, \text{ etc.}$$

L'analyse précédente est plus directe, et résulte des premiers principes de la chose; mais celle de l'endroit cité a l'avantage de faire voir la loi de la progression, car elle donne immédiatement

$$(y') = \frac{y'}{x'}, \quad (y'') = \frac{[(y')]'}{x'}, \quad (y''') = \frac{[(y'')]'}{x'},$$

et ainsi de suite, en désignant par un trait appliqué aux parenthèses carrées, la fonction prime de la quantité renfermée entre les parenthèses.

Par le moyen de ces formules, on pourra transformer les équations qui contiennent les fonctions dérivées x', x'', etc., y', y'', etc., z', z'', etc., relativement à t, en d'autres équations où il n'y ait que les fonctions dérivées (y'), (y''), etc., (z'), (z''), etc., relativement à x.

CHAPITRE IV.

De la question où il s'agit de trouver la résistance que le milieu doit opposer pour que le projectile décrive une courbe donnée. Analyse de la solution que Newton a donnée de ce problème dans la première édition de ses Principes. Source de l'erreur de cette solution. Distinction entre la méthode des séries et celle des fonctions dérivées, ou du calcul différentiel.

17. Pour montrer l'usage des formules que nous venons de donner, supposons qu'on demande la résistance du milieu, en vertu de laquelle un corps pesant lancé dans ce milieu, décrirait une courbe donnée. On regardera la résistance comme une force retardatrice qui agit dans la direction même du corps, c'est-à-dire, dans celle de la tangente de la courbe; ainsi, en nommant r la résistance, c'est-à-dire, l'action du milieu résistant sur la surface du corps, divisée par la masse même du corps, on aura $-r\cos\alpha$, $-r\cos\beta$, $-r\cos\gamma$ pour les forces accélératrices qui en résultent suivant les directions des axes des x, y, z, les angles α, β, γ étant ceux de la tangente avec ces axes. De plus, si on nomme g la force accélératrice de la gravité, et qu'on prenne les coordonnées y verticales et dirigées de bas en haut, on aura $-g$ pour la force accélératrice provenant de la gravité suivant les coordonnées y.

Donc, les équations du mouvement seront

$$x''=-r\cos\alpha,\quad y''=-g-r\cos\beta,\quad z''=-r\cos\gamma;$$

substituant pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, leurs valeurs $\frac{x'}{u}$, $\frac{y'}{u}$, $\frac{z'}{u}$ (art. 11), où u, vîtesse du corps, est $=s'=\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$,

on aura celle-ci

$$x'' = -\frac{xx'}{u}, \quad y'' = -g - \frac{ry'}{u}, \quad z'' = -\frac{rz'}{u}.$$

La première et la dernière donnent

$$\frac{x''}{x'} = \frac{z''}{z'};$$

d'où l'on tire, en prenant les fonctions primitives,

$$z = mx + n,$$

m et n étant des constantes arbitraires. Cette équation étant celle d'un plan vertical, fait voir que la courbe est nécessairement toute dans ce plan : ainsi, en prenant l'axe des x dans ce même plan, on aura $z = 0$ et $z' = 0$, et les équations de la courbe se réduiront aux deux premières. Mais comme dans ces équations les variables x, y sont supposées fonctions du temps, et que pour avoir l'équation de la courbe, on doit regarder y comme fonction de x; il faudra chercher ses fonctions dérivées dans cette hypothèse par les formules de l'article précédent.

Supposons, pour abréger, $\frac{r}{u} = q$, on aura

$$x'' = -qx', \quad y'' = -g - qy';$$

substituant ces valeurs dans l'expression de (y'') de l'article 16, on aura

$$(y'') = -\frac{g}{x'^2};$$

ainsi la valeur de q dépend de (y'''). Or on a, par le même article,

$$(y''') = \frac{y''}{x'^3} - \frac{y'x''}{x'^4} - \frac{3(y'')x''}{x'^5};$$

mais connaissant les valeurs de x'' et y'', il n'y aura qu'à prendre leurs fonctions primes pour avoir celles de x''' et y'''; et l'on trouvera, en désignant par q' la fonction prime de q,

$$x''' = -qx'' - q'x' = (q^2 - q')x',$$
$$y''' = -qy'' - q'y' = qg + (q^2 - q')y'.$$

Par ces substitutions, les deux premiers termes de la valeur de (y''') donneront $\frac{qg}{x'^3}$, et le terme $-\frac{3(y'')\,x''}{x'^2}$ donnera $-\frac{3q}{x'^3}$; de sorte qu'on aura $(y''')=-\frac{2qg}{x'^3}$. Or q étant $=\frac{r}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$ on fera cette substitution, et on en chassera x' et y' au moyen des équations $(y')=\frac{y'}{x'}$ et $(y'')=-\frac{g}{x'^2}$, lesquelles donneront

$$x'^3\sqrt{(x'^2+y'^2)}=x'^4\sqrt{[1+(y')^2]}=\frac{g^2\sqrt{[1+(y')^2]}}{(y'')^2};$$

on aura ainsi

$$(y''')=-\frac{2r(y'')^2}{g\sqrt{[1+(y')^2]}}.$$

Comme les fonctions dérivées (y'), (y''), (y''') se rapportent maintenant à la variable x, nous pouvons les représenter simplement par y', y'', y'''; on aura donc

$$\frac{r}{g}=-\frac{y'''\sqrt{(1+y'^2)}}{2y''^2}.$$

Or, la courbe étant donnée, on a y en fonction de x : de là, on tirera les fonctions dérivées y', y'', y'''; et la formule précédente donnera, pour chaque point de la courbe, le rapport de la résistance à la gravité.

La vîtesse u sera

$$=\sqrt{(x'^2+y'^2)}=x'\sqrt{[1+(y'^2)]}=\frac{\sqrt{g}\cdot\sqrt{[1+(y'^2)]}}{\sqrt{-(y'')}},$$

c'est-à-dire, en changeant (y') en y',

$$u=\frac{\sqrt{g}\cdot\sqrt{(1+y'^2)}}{\sqrt{-y''}};$$

Pour traduire ces formules en calcul différentiel, il faudra changer y' en $\frac{dy}{dx}$, et y'' en $\frac{d^2y}{dx^2}$, en prenant dx constant parce que ces fonctions dérivées sont ici relatives à la variable x.

Si

Si on suppose la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse et à la densité du milieu, alors nommant Δ cette densité dans un lieu quelconque, on aura $r=mu^2\Delta$, m étant un coefficient constant; donc, substituant la valeur de u,

$$r=\frac{mg(1+y'^2)\Delta}{-y''};$$

et mettant cette valeur dans l'équation ci-dessus, elle deviendra

$$m\Delta=\frac{y''}{2y\sqrt{(1+y')}},$$

par où l'on déterminera la densité du milieu nécessaire pour faire décrire la courbe donnée. Réciproquement, cette équation servira à déterminer la courbe, lorsque la densité du milieu sera donnée.

Pour les projectiles lancés dans l'air, on peut supposer la densité du milieu constante; ainsi faisant, pour plus de simplicité, $2m\Delta=\frac{1}{k}$, l'équation de la courbe sera

$$\frac{y''}{y}=k\sqrt{(1+y'^2)}=ks',$$

s étant l'arc de la courbe; d'où l'on tire, en prenant les fonctions primitives,

$$y=Ae^{ks}.$$

A étant une constante arbitraire : c'est la forme la plus simple sous laquelle puisse être mise l'équation de cette courbe. On peut tirer de ces équations les différentes approximations qui ont été données jusqu'ici pour la détermination de la courbe décrite par les boulets et les bombes ; mais les bornes de cet écrit nous empêchent d'entrer dans aucun détail sur ce sujet.

18. Nous remarquerons encore qu'on aurait pu déduire tout de suite l'équation de la courbe, des équations du mouvement

$$x''=-\frac{rx'}{s'},\quad y''=-g-\frac{ry'}{s'},$$

par l'élimination immédiate du temps t. En effet, x et y étant fonctions de t, on peut réciproquement regarder y et t comme fonctions de x; et par la règle donnée dans l'article 50 de la première Partie, si on regarde, en général, x, y, t comme fonctions d'une autre variable quelconque z, il faudra substituer $\frac{x'}{t'}$ et $\frac{y'}{t'}$ à la place de x', y', et $\frac{\left(\frac{x'}{t'}\right)'}{t'}$, $\frac{\left(\frac{y'}{t'}\right)'}{t'}$ à la place de x'', y''; mais en prenant x pour variable principale à la place de t, on fera $x' = 1$; et l'on aura à substituer $\frac{1}{t'}$ et $\frac{y'}{t'}$ à la place de x' et y', et $-\frac{t''}{t'^3}$ et $\frac{y''}{t'^2} - \frac{y't''}{t'^3}$ à la place de x'' et y''.

Les deux équations deviendront donc, à cause de $s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$,

$$-\frac{t''}{t'^3} = -\frac{r}{\sqrt{(1+y'^2)}}, \quad \frac{y''}{t'^2} - \frac{y't''}{t'^3} = -g - \frac{ry'}{\sqrt{(1+y'^2)}};$$

d'où il faudra éliminer la fonction t'. Substituant, dans la seconde équation la valeur de $\frac{t''}{t'^3}$, tirée de la première, elle deviendra

$$\frac{y''}{t'^2} = -g,$$

divisant par y'', et prenant de part et d'autre les fonctions primes, on aura

$$-\frac{2t''}{t'^3} = \frac{gy''}{y''^2};$$

valeur qui, étant substituée dans la première équation, donnera, comme plus haut,

$$\frac{r}{g} = -\frac{y''\sqrt{(1+y'^2)}}{2y'^2}.$$

A l'égard de la vîtesse $u = s' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$, elle deviendra $\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{t'}$; et comme on vient de trouver $t' = \sqrt{-\frac{y''}{g}}$, la vîtesse deviendra $\frac{\sqrt{g}\cdot\sqrt{(1+y'^2)}}{\sqrt{-y''}}$, comme ci-dessus.

Si la force de la gravité g était variable, alors la valeur de

$\frac{r}{g}$ qu'on vient de trouver ne serait plus exacte ; car en prenant les fonctions primes de l'équation $\frac{1}{t'^2} = -\frac{g}{y'}$, on aurait

$$-\frac{2t''}{t'^3} = \frac{gy''}{y'^2} - \frac{g'}{y'},$$

et la substitution de cette valeur donnerait

$$\frac{r}{g} = -\frac{y''\sqrt{1+y'^2}}{2y'^2} + \frac{g'\sqrt{1+y'^2}}{2gy'}.$$

Cette manière d'éliminer le temps dans les équations du mouvement, pour avoir l'équation de la courbe décrite, est analogue à celle qu'on emploie dans le calcul différentiel ; mais l'analyse de l'article 16, fondée sur le développement des fonctions, est, à certains égards, plus directe ; elle nous sera d'ailleurs utile pour découvrir, comme nous l'avons annoncé au commencement de cet écrit, la véritable source de la méprise où *Newton* est tombé dans la première édition des *Principes*, en résolvant le problème dont nous venons de nous occuper.

Quoiqu'il puisse paraître peu important de découvrir en quoi et comment *Newton* a pu se tromper dans une solution qu'il a ensuite lui-même abandonnée ; néanmoins, comme tout ce qui a rapport à l'invention et aux premiers développemens de l'analyse infinitésimale, mérite l'attention de ceux qui s'intéressent à l'histoire des sciences, j'ai cru qu'on me saurait gré de discuter de nouveau ce sujet, comme un point qui n'a pas été assez éclairci, parce qu'il tient à une distinction subtile entre la méthode différentielle et la méthode des séries, que *Newton* a employée dans sa première solution (Liv. II, Prop. X).

19. Voici la construction qui sert de fondement à cette solution. Le mobile étant parvenu à un point quelconque de la courbe, sans la résistance et la gravité il décrirait, dans un temps donné très-petit, une partie très-petite de la tangente que nous désignerons par α ; soit γ le petit espace que la gravité lui ferait décrire dans le même temps perpendiculairement à l'horizon, et ρ le petit espace

dont la résistance diminue l'espace α parcouru sur la tangente; il est clair que le rapport de ρ à γ sera celui de la résistance à la gravité. Ainsi, le corps, dans le temps qu'il aurait parcouru sur la tangente l'espace $\alpha - \rho$, serait descendu verticalement de la quantité γ; par conséquent γ sera la flèche de l'arc $\alpha - \rho$. Maintenant, si on considère le corps comme partant du même point et rebroussant chemin pour décrire en sens contraire le même arc de courbe qu'il a parcouru, il faudra regarder la résistance comme négative, et par conséquent comme une force qui accélère le mouvement au lieu de le retarder. Le mobile décrira ainsi, dans le même temps très-petit, l'espace $\alpha + \rho$ sur la même tangente dans une direction contraire, et descendra verticalement par le même espace γ, en vertu de la gravité. Par conséquent γ sera la flèche de l'arc $\alpha + \rho$, pris de l'autre côté du point de la courbe dont il s'agit. Or, les flèches étant, pour les arcs infiniment petits, comme les carrés des arcs ou des tangentes, la flèche de la portion $\alpha - \rho$ de l'arc $\alpha + \rho$ sera $\gamma\left(\frac{\alpha-\rho}{\alpha+\rho}\right)^2$; donc la différence des flèches pour les arcs égaux $\alpha - \rho$, pris de part et d'autre du point donné de la courbe, sera

$$\gamma\left[1 - \frac{(\alpha-\rho)^2}{(\alpha+\rho)^2}\right] = \frac{4\alpha\gamma\rho}{(\alpha+\rho)^2}.$$

Nommons cette différence δ, on aura

$$\frac{4\alpha\gamma\rho}{(\alpha+\rho)^2} = \delta \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta(\alpha+\rho)^2}{4\alpha\gamma^2} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2},$$

à cause que la petite ligne ρ, parcourue d'un mouvement uniformément accéléré, est infiniment plus petite que la ligne α parcourue dans le même temps d'un mouvement uniforme.

Tel est le raisonnement de *Newton*, présenté de la manière la plus claire; et le résultat que nous venons de trouver, s'accorde avec celui du corollaire II du problème cité, où il est visible que les lignes CF et FG sont ce que nous avons nommé α et γ, et que la différence FG — Kl est ce que nous avons nommé δ.

Maintenant, en prenant les abscisses x horizontales et les ordonnées y verticales et dirigées de bas en haut, *Newton* suppose

que pour l'abscisse $x + o$, l'ordonnée exprimée en série, est $y + Qo - Ro^2 - So^2 - So^3 +$ etc., et il remarque que la partie de la tangente qui répond à la partie o de l'axe, est $o\sqrt{(1+Q^2)}$, et que la flèche, c'est-à-dire, la partie de l'ordonnée comprise entre la courbe et la tangente, est $Ro^2 + So^3 +$ etc. En faisant o négatif, on aura la flèche qui répond à la même partie de la tangente, prise de l'autre côté du point de contact, et qui sera, par conséquent, $Ro^2 - So^3 +$ etc.; et la différence des deux flèches sera $2So^3 -$ etc. Or, il est visible que les quantités $o\sqrt{(1+Q^2)}$, $Ro^2 + So^3 +$ etc. et $2So^3 -$ etc. répondent à celles que nous avons nommées α, γ et δ; donc, la quantité $\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$, qui exprime le rapport de la résistance à la gravité, deviendra, en divisant le haut et le bas par o^4,

$$\frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2(R+So)^2} = \frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2},$$

la quantité infiniment petite o s'évanouissant à côté de la quantité R. C'est aussi le résultat trouvé par *Newton* dans l'exemple premier du même problème.

Suivant notre notation, lorsque x devient $x + o$, y devient $y + oy' + \frac{o^2}{2}y'' + \frac{o^3}{2.3}y''' +$ etc.; donc, comparant avec la série de *Newton*, on a

$$Q = y', \quad R = -\frac{y''}{2}, \quad S = -\frac{y'''}{2.3};$$

substituant ces valeurs dans la formule précédente, le rapport de la résistance à la gravité deviendra $-\frac{y''\sqrt{[(1+y'^2)]}}{3y'^2}$, au lieu que nous l'avons trouvé ci-dessus (art. 17), $-\frac{y''\sqrt{[(1+y'^2)]}}{2y'^2}$. D'où il suit que la solution de *Newton* est fautive.

Il est remarquable que si on substitue simplement y', y'', y''', ou $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ pour Q, —R, —S, on a un résultat exact: c'est ce qui a fait croire aux *Bernoulli* qui ont découvert les premiers l'erreur de *Newton*, et à tous ceux qui en ont parlé depuis, que cette erreur venait de ce que *Newton* avait pris les termes de la série

$Qo - Ro^2 - So^3 -$ etc., pour les différences premières, secondes et troisièmes de l'ordonnée, tandis que ces termes ne sont égaux qu'à ces différences, divisées par 1, 2, 6, etc. Mais il est facile de voir que la solution de *Newton* est indépendante de la considération de ces différences, et que la substitution des termes Ro^2, So^3 de la série dont il s'agit à la place des quantités p et $\frac{q}{2}$ dans la formule $\frac{ab}{4\gamma}$, est légitime; ainsi l'erreur doit être dans cette formule même qui donne le rapport de la résistance à la gravité; et ce qui doit le prouver sans réplique, c'est que si la gravité était variable, la même formule aurait encore lieu, puisque dans les deux mouvemens direct et rétrograde, le corps est censé descendre verticalement de la même ligne γ. Ainsi dans ce cas, on devrait aussi avoir une solution exacte par la substitution de y', y'', y''' à la place de Q, — R, — S; ce qui n'est pas, comme on le voit par la valeur de $\frac{r}{g}$ que nous avons trouvée pour ce cas dans l'article précédent.

20. Pour découvrir la source de l'erreur, nous allons réduire la solution de *Newton* en analyse. En nommant u la vîtesse dans un point de la courbe, $u\theta$ est l'espace que le mobile parcourrait dans la tangente pendant le temps θ, sans la gravité et la résistance. Nommant g la force absolue de la gravité, et r celle de la résistance, $\frac{g\theta^2}{2}$ et $\frac{r\theta^2}{2}$ seront les espaces parcourus en vertu de ces forces regardées comme constantes pendant le temps θ supposé très-petit. Ainsi, le corps aura parcouru, suivant la tangente, l'espace $u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$, et suivant l'ordonnée verticale y, l'espace $\frac{g\theta^2}{2}$, lequel représente la flèche qui répond à la tangente $u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$. Supposons maintenant, comme *Newton*, que le mobile rebrousse chemin avec la même vîtesse u et sur la même tangente; dans le temps T, il décrirait l'espace $u\mathrm{T} + \frac{r\mathrm{T}^2}{2}$, parce que la résistance doit être prise en sens contraire; c'est l'espace pris négativement

qui répond au temps $\theta = -T$; et la flèche correspondante serait $\frac{gT^2}{2}$; et si on veut que les deux espaces décrits de part et d'autre soient égaux, comme *Newton* le suppose, on aura l'équation

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = uT + \frac{rT^2}{2};$$

d'où l'on tire, aux θ^3 près,

$$T = \theta - \frac{r\theta^2}{u};$$

substituant cette valeur dans la flèche $\frac{gT^2}{u}$, elle devient $\frac{g\theta^2}{2} - \frac{gr\theta^3}{u}$; et la différence des deux flèches sera $\frac{gr\theta^3}{u}$; c'est la quantité que nous avons nommée ci-dessus δ. D'un autre côté, il est clair qu'on a, suivant les dénominations employées ci-dessus,

$$\alpha = u\theta - \frac{r\theta^2}{2}, \quad \gamma = \frac{g\theta^2}{2}, \quad \rho = \frac{r\theta^2}{2};$$

donc

$$\frac{r}{g} = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2};$$

de là en faisant $\alpha = o\sqrt{1+Q^2}$, et prenant $Ro^2 + So^3$, $Ro^2 - So^3$ pour les deux flèches, ce qui donne $\gamma = Ro^2$, $\delta = 2So^3$, on a

$$\frac{r}{g} = \frac{\rho}{r} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2},$$

comme *Newton* l'a trouvé par sa construction.

21. Maintenant il est aisé de voir que ce résultat vient des équations

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}, \quad -uT - \frac{rT^2}{2} = -o\sqrt{1+Q^2},$$
$$\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3, \qquad \frac{gT^2}{2} = Ro^2 - So^3,$$

ou bien simplement de celles-ci

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}, \quad \frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3,$$

en prenant θ et o positivement et négativement, ce qui revient à vérifier ces équations indépendamment de la valeur de o, qui en effet doit demeurer indéterminée, étant supposée très-petite.

La première équation donne, aux termes du troisième ordre près, θ et o étant du premier,

$$\theta = \frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)\,o^2}{2u^3}.$$

Cette valeur étant substituée dans la seconde, on a, au quatrième ordre près,

$$\frac{g(1+Q^2)\,o^2}{2u^2} + \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{2u^4} = Ro^2 + So^3,$$

et la comparaison des termes homogènes en o donne

$$R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2}, \quad S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^4}.$$

De la première on tire $u^2 = \frac{g(1+Q^2)}{2R}$, et cette valeur étant substituée dans la seconde, on a le résultat de *Newton*,

$$\frac{r}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}.$$

Mais nous devons remarquer que ce dernier résultat étant tiré de la comparaison des termes affectés de o^3 dans la transformée de l'équation $\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3$, ne saurait être exact, parce que le premier membre de cette équation, qui est l'expression de la flèche en temps, n'est lui-même exact qu'aux θ^3 près; de sorte qu'à la rigueur il n'y a d'exact que le résultat $R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2}$ tiré de la comparaison des termes du second ordre. Pour avoir de cette manière la valeur exacte de $\frac{r}{g}$, en la déduisant des termes affectés de o^3, il faudrait que l'expression de la flèche en θ fût elle-même exacte jusqu'aux θ^3; mais le terme qui devrait suivre $\frac{g\theta^2}{2}$, n'étant

pas

son expression en θ sera

$$Q\left(x'\theta+x''\frac{\theta^2}{2}+x'''\frac{\theta'''}{2.3}+\text{etc.}\right)-y'\theta-y''\frac{\theta^2}{2}-y'''\frac{\theta^3}{2.3}-\text{etc.},$$

ou $$(Qx'-y')\theta+(Qx''-y'')\frac{\theta^2}{2}+(Qx'''-y''')\frac{\theta^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Les deux premiers termes se réduisent à $\frac{g\theta^2}{2}$ par la substitution des valeurs de x', x'', y', y''; pour avoir le terme suivant, il n'y aura qu'à chercher les valeurs de x''', y''' d'après celles de x'', y''. Or, on a $y''=Qx''-g$, d'où l'on tire $y'''=Qx'''+Q'x''$; donc, $Qx'''-y'''=-Q'x''$. Pour avoir Q', je prends l'équation $y'=Qx'$ qui résulte des valeurs x' et y' trouvées ci-dessus, d'où l'on tire $y''=Qx''+Q'x'$; donc

$$Q'=\frac{y''-Qx''}{x'}=-\frac{g}{x'};\text{ donc }Qx'''-y'''=g\frac{x''}{x'}=-\frac{gr}{2}.$$

Il résulte de là que l'expression de la flèche, au lieu d'être simplement $\frac{g\theta^2}{2}$ sera $\frac{g\theta^2}{2}-\frac{gr\theta^3}{6u}$. Ainsi, au lieu de l'équation $\frac{g\theta^2}{2}=Ro^2+So^3$, on aura celle-ci,

$$\frac{g\theta^2}{2}-\frac{gr\theta^3}{6u}=Ro^2+So^3,$$

qui est exacte jusqu'aux quantités du troisième ordre. En y substituant la valeur de θ de l'article précédent, qui est exacte, jusqu'aux quantités du second ordre, on aura au quatrième ordre près.

$$Ro^2+So^3=\frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2}+\left(\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^4}-\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{6u^4}\right)o^3,$$

savoir,

$$Ro^2+So^3=\frac{g(1+Q)o^2}{2u^2}+\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{3u^4};$$

d'où l'on tire, par la comparaison des termes,

$$R=\frac{g(1+Q^2)}{2u^2},\quad S=\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{3u^4}.$$

Substituant dans la seconde équation la valeur de u^4 tirée de la première, et qui est la même qu'on avait trouvée plus haut, on en déduira

$$\frac{r}{g} = \frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2}.$$

C'est la valeur que *Newton* a donnée ensuite dans la seconde édition de ses *Principes* (Liv. II, probl. III), et on voit qu'en mettant dans cette valeur y', $-\frac{y''}{2}$, $-\frac{y'''}{2.3}$ à la place de Q, R, S, comme dans l'article 19, elle devient $\frac{y''\sqrt{1+y'^2}}{2y'^3}$, telle que nous l'avons trouvée dans l'article 17.

23. Si on voulait suivre la première marche de *Newton*, mais en prenant pour la flèche qui répond au temps très-petit θ, l'expression plus exacte $\frac{g\theta^2}{2} - \frac{gr\delta^3}{6u}$ que nous venons de trouver, on aurait pour la flèche qui répond au temps, $-T$, $\frac{gT^2}{2} + \frac{grT^3}{6u}$; substituant pour T sa valeur en θ, $\theta - \frac{r\delta^2}{u}$, elle deviendrait $\frac{g\theta^2}{2} - \frac{5gr\theta^3}{6u}$, et la différence des deux flèches serait alors $\frac{2gr\theta^3}{3u}$ qu'il faudrait prendre pour δ^3; les valeurs de γ et ρ seraient également, aux θ^3 près, $\frac{g^2\theta^2}{2}$, $\frac{r\theta^2}{2}$, et l'on aurait, par la substitution,

$$\frac{\alpha\delta^3}{4\gamma^2} = \frac{2r}{3g}; \quad \text{donc} \quad \frac{r}{g} = \frac{3\alpha\delta^3}{8\gamma^2}.$$

Prenant maintenant, comme *Newton*, $\alpha = o\sqrt{1+Q^2}$, $\gamma = Ro^2$, $\delta^3 = 2So^3$, on aurait le résultat exact

$$\frac{r}{g} = \frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2}.$$

Comme *Newton* n'est parvenu à ce second résultat qu'en suivant une marche analogue à celle du calcul différentiel, et en considérant deux tangentes successives, ou deux côtés successifs de la courbe, au lieu que dans la première solution, il n'avait considéré qu'une seule tangente prolongée de part et d'autre du point

de contact; nous avons cru devoir montrer comment, sans s'écarter de l'esprit de cette solution, mais en la rectifiant par la méthode des séries, on pouvait aussi arriver à un résultat exact. En effet, on peut toujours trouver, par cette méthode, les premiers termes de l'ordonnée en série d'une courbe, ou en général du développement d'une fonction, lesquels satisfassent aux conditions mécaniques ou géométriques du problème proposé; et la loi de ces termes donnera l'équation du problème. C'est en quoi consiste la méthode qu'on peut appeler, d'après *Newton*, méthode des séries, pour la distinguer de la méthode des différences ou des fonctions dérivées, par laquelle on arrive directement à cette équation sans le circuit des séries et sans employer d'autres termes que ceux qui doivent y entrer, comme on le voit par l'analyse de l'article 18.

24. Il est à remarquer, au reste, que la construction employée par *Newton* dans sa seconde solution, mène à une formule semblable à celle de la première que nous avons représentée par $\frac{\rho}{\gamma} = \frac{a\delta}{4\gamma^2}$, et que nous avons vu n'être pas exacte, mais avec cette différence que la quantité δ, au lieu d'exprimer, comme dans la première solution, la différence des flèches qui répondent à des portions égales de la même tangente, prises de part et d'autre du point de contact, et dont les parties correspondantes de l'axe des x sont o et $-o$, doit exprimer, au contraire, la différence des flèches de deux tangentes consécutives, prises du même côté, et répondantes à des parties de l'axe égales à o. Pour avoir ces flèches, *Newton* représente l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x+o$, par la série $P+Qo+Ro^2+So^3+$ etc.; mais il les détermine par la méthode différentielle, en prenant la différence d'une ordonnée intermédiaire et de la demi-somme des deux ordonnées adjacentes. Ainsi, en considérant les trois ordonnées qui répondent aux abscisses $x-o$, x, $x+o$, il a la flèche Ro^2, et les ordonnées qui répondent aux abscisses x, $x+o$, $x+2o$ donnent la flèche Ro^2+3So^3, et la différence des deux flèches est $3So^3$. Cette valeur étant prise pour δ, et faisant, comme dans la première solution,

(art. 19), $\alpha = o\sqrt{1+Q^2}$, $\gamma = Ro^2$, on a

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2},$$

expression exacte, comme on l'a vu plus haut.

Suivant nos dénominations, lorsque x devient $x+o$, y devient $y + oy' + \frac{o^2y''}{2} + \frac{o^3y'''}{2.3}$, etc. La partie de la tangente qui répond à o est $o\sqrt{1+y'^2}$; c'est la valeur de α. La partie interceptée entre la tangente et la courbe, ou la flèche, est $\frac{o^2y''}{2} + \frac{o^3y'''}{2.3}$, etc.; c'est la valeur de γ. Ainsi on a, dans les deux solutions,

$$\frac{\alpha}{4\gamma^2} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{o^2y''^2}.$$

A l'égard de δ, dans la première solution, c'est la différence des flèches qui répondent à o et à $-o$, laquelle est $\frac{o^3y'''}{3}$; mais dans la seconde solution, c'est la différence des flèches qui répondent à x et à $x+o$. Or, x devenant $x+o$, y'' devient $y'' + oy''' +$ etc.; donc, négligeant les o^4, la seconde flèche sera $\frac{o^2y''}{2} + \frac{4o^3y'''}{2.3}$, et la différence des flèches sera $\frac{o^3y'''}{2}$. Substituant dans $\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2} = \frac{\delta\sqrt{1+y'^2}}{o^4y''^2}$, la première valeur de $\delta = \frac{o^3y'''}{3}$, ou la seconde $\frac{o^3y'''}{2}$, on a les deux résultats $\frac{y''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}$ et $\frac{y''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}$, dont le premier est fautif et le second exact (art. 19).

CHAPITRE V.

Du mouvement d'un corps sur une surface donnée, ou assujéti à de certaines conditions. Du mouvement de plusieurs corps liés entre eux. Des équations de condition entre les coordonnées de ces différens corps, et de la manière d'en déduire les forces qui résultent de leur action mutuelle. Démonstration générale du principe des vîtesses virtuelles.

25. Reprenons les formules générales de l'article 15, et supposons que la force P soit dirigée vers un point ou centre déterminé par les coordonnées a, b, c; si on nomme p la distance rectiligne de ce centre au point de la courbe qui répond aux coordonnées x, y, z, on aura

$$p = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

et il est visible que $x-a$, $y-b$, $z-c$ seront les projections de la ligne p sur les axes des x, y, z; donc $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ seront les cosinus des angles que la ligne p fait avec ces axes, c'est-à-dire, des angles λ, μ, ν que la direction de la force P fait avec les mêmes axes. Donc les termes $P\cos\lambda$, $P\cos\mu$, $P\cos\nu$ dus à la force p dans les valeurs de Mx'', My'', Mz'', pourront être représentés par $P\frac{x-a}{p}$, $P\frac{y-b}{p}$, $P\frac{z-c}{p}$: ce sont les forces qui résultent de la décomposition de la force P suivant les directions des coordonnées x, y, z.

Si maintenant on suppose p égale à une constante d, on aura l'équation d'une sphère dont d sera le rayon, et dont le centre sera

déterminé par les coordonnées a, b, c; et la direction de la force P sera perpendiculaire à la surface de cette sphère. Donc elle sera aussi perpendiculaire à toute autre surface qui passerait par le même point et qui serait tangente à la sphère.

Représentons par $f(x,y,z)=0$ l'équation de la sphère

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}-d=0,$$

on aura, en prenant les fonctions primes,

$$\frac{x-a}{d}=f'(x),\quad \frac{y-b}{d}=f'(y),\quad \frac{z-c}{d}=f'(z),$$

et comme on a supposé $p=d$, il est clair que les forces dirigées suivant x, y, z, et résultantes de la force P, seront exprimées par $Pf'(x)$, $Pf'(y)$, $Pf'(z)$.

26. Si on a une surface représentée par l'équation $F(x,y,z)=0$, laquelle soit tangente de la sphère dont il s'agit, il faudra, par ce qu'on a vu dans l'article 40 de la seconde Partie, que les trois fonctions primes $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ de cette surface, soient proportionnelles aux fonctions primes $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ de la surface de la sphère. Donc, si la force P agit perpendiculairement à cette surface, il en résultera, suivant les directions de x, y, z, trois forces proportionnelles à $PF'(x)$, $PF'(y)$, $PF'(z)$.

Or, si on fait abstraction de la force P, et qu'on suppose que le corps soit forcé de se mouvoir sur cette surface, il est clair que l'action, ou plutôt la résistance que la surface oppose au corps, ne peut agir que dans une direction perpendiculaire à la surface; donc il en résultera, sur le corps, des forces proportionnelles aux fonctions primes $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ de l'équation $F(x,y,z)=0$ de la surface.

Donc le même résultat aura lieu aussi, si, en faisant abstraction de la surface, on considère seulement l'équation $F(x,y,z)=0$ comme une équation de condition donnée pour la nature de la question mécanique proposée. D'où l'on peut conclure que toute condition du problème, représentée par l'équation $F(x,y,z)=0$,

sera équivalente à des forces proportionnelles aux fonctions primes $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$, et dirigées suivant les coordonnées x, y, z. Ainsi, en prenant un coefficient indéterminé Π, il faudra ajouter aux valeurs de Mx'', My'', Mz'' des équations de l'article 15, les termes $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$. La quantité inconnue Π devra être éliminée, mais l'équation qu'on aura de moins par cette élimination, sera remplacée par l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$.

On peut étendre cette conclusion au cas où il y aurait deux équations de condition représentées par $F(x, y, z) = 0$ et $\Phi(x, y, z) = 0$; elles équivaudraient à des forces exprimées par

$$\Pi F'(x) + \Psi\Phi'(x),\ \Pi F'(y) + \Psi\Phi'(y),\ \Pi F'(z) + \Psi\Phi'(z),$$

et dirigées suivant x, y, z, qu'il faudrait ajouter aux valeurs de Mx'', My'', Mz'' (art. 15), les coefficiens Π et Ψ étant indéterminés et devant être éliminés.

27. Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un corps isolé. Soient maintenant deux corps M et N attachés aux extrémités d'un fil inextensible qui passe sur une poulie fixe. Soient x, y, z les coordonnées du corps M; ξ, η, ζ celles du corps N; a, b, c les coordonnées du point fixe où est placée la poulie, et d la longueur donnée du fil; il est clair qu'on aura l'équation

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2}-d=0,$$

que nous représenterons par

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Si on nomme T la tension du fil qui agit également sur les deux corps, et qu'on applique ici l'analyse de l'article 25, il est clair que l'action du fil sur les deux corps, produira sur le corps M les forces $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$, suivant x, y, z; et sur le corps N les forces $Tf'(\xi)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$, suivant ses coordonnés ξ, η, ζ.

Il en serait de même si le fil passait sur deux poulies fixes, dont la position dans l'espace fût déterminée par les coordonnées a, b, c pour la première, et par α, β, γ pour la seconde. Alors en désignant

gnant par d la longueur totale du fil, moins la partie interceptée entre les deux poulies, qui est aussi donnée, l'équation de l'inextensibilité du fil donnerait

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0,$$

et en représentant cette équation par $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0$, on aurait pareillement $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$ pour les forces qui tireraient le corps M suivant les coordonnées x, y, z, et $Tf'(\zeta)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$ pour celles qui tireraient le corps N suivant les coordonnées ξ, η, ζ.

Enfin, si on supposait que le fil auquel est attaché le corps M après avoir passé sur la première poulie fixe, repassât sur le même corps M, et de là sur la même poulie, et de nouveau sur le corps et sur la poulie à plusieurs reprises, de manière qu'il y eût m cordons entre le corps et la poulie; qu'ensuite le fil, en quittant cette poulie, passât sur la seconde poulie fixe, et de là sur le corps N, en faisant aussi plusieurs tours entre ce corps et la même poulie avant d'être attaché fixément au corps N, de manière qu'il y eût n cordons entre ce corps et la poulie; comme la tension T est la même dans toute l'étendue du fil, le corps M étant tiré par m cordons, serait tiré vers la première poulie par une force égale à mT, et le corps N serait tiré vers la seconde poulie par une force égale à nN. Or, il est clair que dans ce cas l'équation qui renferme la condition de l'inextensibilité du fil serait

$$m\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+n\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0;$$

en désignant toujours par d la longueur totale du fil, moins la longueur interceptée entre les deux poulies; et il est facile de voir qu'en représentant cette équation par $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0$, on aurait aussi pour les forces qui tireraient le corps M suivant x, y, z, et le corps N suivant ξ, η, ζ les mêmes expressions que ci-dessus $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$, $Tf'(\xi)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$.

Si on suppose que P et Q soient les forces qui tirent les corps M et N vers les deux poulies fixes, on aura $P=mT$ et $Q=nT$; donc puisque m et n doivent être des nombres entiers, si les quantités P et Q sont commensurables, il faudra prendre T pour leur com-

mune mesure ; mais quelles que soient les forces P et Q, on peut toujours les représenter par mT et nT, en prenant dans le cas où elles seraient incommensurables, les nombres m et n très-grands et la quantité T infiniment petite ; et les forces qui tirent les corps M et N suivant leurs coordonnées $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ seront toujours proportionnelles aux fonctions primes de la même équation de condition relatives à ces coordonnées.

28. Maintenant, si au lieu de l'équation de condition

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

dépendante de l'inextensibilité du fil, on a une autre équation quelconque entre les mêmes coordonnées $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ des deux corps, représentée par $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$, on peut, en regardant les constantes qui entrent dans la première de ces équations comme arbitraires, faire coïncider non-seulement les équations mêmes, mais encore toutes leurs fonctions primes pour des valeurs données des variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$; de cette manière les deux équations deviendront comme tangentes l'une de l'autre, par la théorie des contacts que nous avons donnée dans la seconde Partie ; et quelle que soit la liaison des deux corps qui est représentée par l'équation $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$, elle deviendra équivalente à celle d'un fil qui passe par deux poulies.

On pourrait croire que puisque l'équation de condition

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} + \sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2} - d = 0$$

pour un fil simple qui passe sur deux poulies fixes, renferme sept constantes arbitraires, elle peut toujours avoir un contact du premier ordre avec une équation quelconque, puisque ce contact ne demande que sept conditions ; mais en représentant cette équation par $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$, et prenant ses fonctions dérivées, il est visible qu'on a

$$\overline{f'(x)}^2 + \overline{f'(y)}^2 + \overline{f'(z)}^2 = 1, \quad \overline{f'(\xi)}^2 + \overline{f'(\eta)}^2 + \overline{f'(\zeta)}^2 = 1,$$

de sorte qu'on ne pourrait plus satisfaire en général aux conditions du contact

$$f'(x) = F'(x),\ f'(y) = F'(y),\ f'(z) = F'(z),$$
$$f'(\xi) = F'(\xi),\ f'(\eta) = F'(\eta),\ f'(\zeta) = F'(\zeta).$$

Cet inconvénient disparaît en prenant

$$m\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} + n\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)+(\zeta-\gamma)^2} - d = 0$$

pour l'équation de condition du fil multiple, à cause des nouveaux coefficiens indéterminés m et n; et on peut donc dire que l'équation de condition donnée $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$ produit sur les corps M et N les mêmes forces que le fil.

On tire de là cette conclusion, que dans un système de deux corps dont la liaison dépend de l'équation $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$, leur action mutuelle produit sur l'un des corps les forces $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$ suivant les trois coordonnées rectangles x, y, z, et sur l'autre corps les forces $\Pi F'(\xi)$, $\Pi F'(\eta)$, $\Pi F'(\zeta)$ suivant les coordonnées rectangles ξ, η, ζ, Π étant un coefficient indéterminé.

29. Si le système était composé de trois corps ayant pour coordonnées rectangles $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, x, y, z, on trouverait, par un pareil raisonnement, que toute équation entre ces coordonnées dépendante de la liaison des corps, et représentée par

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, x, y, z) = 0,$$

donnerait pour le premier corps les forces $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$ suivant x, y, z; pour le second corps, les forces $\Pi F'(\xi)$, $\Pi F'(\eta)$, $\Pi F'(\zeta)$ suivant ξ, η, ζ, et pour le troisième, les forces $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$ suivant x, y, z; et ainsi de suite, si le système était composé d'un plus grand nombre de corps. En effet, quel que soit le nombre des corps, et quelle que soit leur liaison, elle ne peut produire sur chaque corps qu'une force déterminée

suivant une certaine direction; or, toutes ces forces peuvent être aussi produites par la tension d'un même fil qui passerait successivement et à plusieurs reprises, sur les mêmes corps, et sur des poulies fixes.

Enfin, s'il y avait entre les mêmes coordonnées une seconde équation de condition représentée par

$$\Phi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0,$$

il en résulterait d'autres forces exprimées par $\Psi\Phi'(x)$, $\Psi\Phi'(y)$, $\Psi\Phi'(z)$ pour le premier corps, par $\Psi\Phi'(\xi)$, $\Psi\Phi'(\eta)$, $\Psi\Phi'(\zeta)$ pour le second corps, et par $\Psi\Phi'(\mathrm{x})$, $\Psi\Phi'(\mathrm{y})$, $\Psi\Phi'(\mathrm{z})$ pour le troisième, et suivant les directions des mêmes coordonnées, le coefficient Ψ étant indéterminé comme le coefficient Π; et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre d'équations de condition.

30. On doit conclure de là en général, que les forces qui peuvent résulter de l'action mutuelle des corps d'un système donné, se déduisent directement des équations de condition qui doivent avoir lieu entre les coordonnées des différens corps du système, en prenant les fonctions primes des fonctions qui sont nulles en vertu de ces équations. Les fonctions primes de la même fonction, prises par rapport aux différentes coordonnées, sont toujours proportionnelles aux forces qui agissent suivant ces coordonnées, et qui dépendent de la condition exprimée par cette fonction.

J'étais déjà arrivé à un résultat semblable dans la Mécanique analytique, en partant du principe général des vîtesses virtuelles; et en effet, ce principe est renfermé dans le résultat que nous venons de trouver. Car il est évident que si plusieurs forces appliquées à un système de corps sont en équilibre, elles doivent être égales et directement opposées à celles qui résultent de leur action mutuelle.

Soient X, Y, Z les forces appliquées à l'un des corps suivant les directions des coordonnées x, y, z prolongées, Ξ, Υ, Σ les forces appliquées à un autre corps suivant le prolongement de ses coordonnées ξ, η, ζ, et X, Y, Z les forces appliquées à un troisième corps suivant le prolongement de ses coordonnées x, y, z,

on aura par ce qu'on vient de démontrer

$$\begin{aligned}
&X=\Pi F'(x)+\Psi\Phi'(x),\ Y=\Pi F'(y)+\Psi\Phi'(y),\ Z=\Pi F'(z)+\Psi\Phi'(z);\\
&\Xi=\Pi F'(\xi)+\Psi\Phi'(\xi),\ \Upsilon=\Pi F'(\eta)+\Psi\Phi'(\eta),\ \Sigma=\Pi F'(\zeta)+\Psi\Phi'(\zeta);\\
&\mathrm{X}=\Pi F'(\mathrm{x})+\Psi\Phi'(\mathrm{x}),\ \mathrm{Y}=\Pi F'(\mathrm{y})+\Psi\Phi'(\mathrm{y}),\ \mathrm{Z}=\Pi F'(\mathrm{z})+\Psi\Phi'(\mathrm{z});
\end{aligned}$$

et de là on tirera immédiatement

$$\begin{aligned}
&X x'+Y y'+Z z'+\Xi\xi'+\Upsilon\eta'+\Sigma\zeta'+\mathrm{X}\mathrm{x}'+\mathrm{Y}\mathrm{y}'+\mathrm{Z}\mathrm{z}'\\
&=\Pi F'(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})'+\Psi\Phi'(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})'.
\end{aligned}$$

Le second membre de cette équation est évidemment nul en vertu des équations de condition, puisque les quantités indéterminées Π, Ψ se trouvent multipliées par les fonctions primes de ces équations ; donc on aura

$$X x'+Y y'+Z z'+\Xi\xi'+\Upsilon\eta'+\Sigma\zeta'+\mathrm{X}\mathrm{x}'+\mathrm{Y}\mathrm{y}'+\mathrm{Z}\mathrm{z}'=0,$$

équation générale du principe des vîtesses virtuelles pour l'équilibre des forces X, Y, Z, Ξ, Υ, Σ, X, Y, Z, dans laquelle les fonctions primes x', y', z', ξ', etc. expriment les vîtesses virtuelles des points auxquels sont appliquées les forces X, Y, Z, Ξ, etc., estimées suivant les directions de ces forces. Voyez la première Partie de la Mécanique analytique.

Au reste, on ne doit pas être surpris de voir le principe des vîtesses virtuelles devenir une conséquence naturelle des formules qui expriment les forces d'après les équations de condition, puisque la considération d'un fil qui, par sa tension uniforme, agit sur tous les corps et y produit des forces données, suffit pour conduire à une démonstration directe et générale de ce principe, comme je l'ai fait voir dans la seconde édition de l'ouvrage cité.

CHAPITRE VI.

De la loi du mouvement du centre de gravité. De la loi des aires dans la rotation autour d'un axe fixe, ou d'un seul point fixe, ou autour du centre de gravité dans les systèmes libres.

31. Nous venons de donner la manière de déterminer les forces qui peuvent résulter de l'action mutuelle des corps dans un système quelconque, et qui doivent être ajoutées aux autres forces dans les équations de l'article 15, pour avoir les équations complettes du mouvement du système. Quoique les équations de condition $F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta\ldots)=0$, $\Phi(x,y,z,\xi,\eta,\zeta\ldots)=0$, etc. qui donnent naissance à ces forces, dépendent des circonstances particulières de chaque problème, il y a néanmoins des cas généraux qui méritent d'être examinés, parce qu'ils offrent des résultats remarquables.

Le premier de ces cas est celui où les conditions du système sont indépendantes de l'origine des abscisses x, ξ, etc., et où les fonctions désignées par les caractéristiques F, Φ, etc. ne contiennent que les différences $\xi - x$, $\mathrm{x} - x$, etc. des abscisses. Alors, il est évident que si on augmente chacune des variables x, ξ, etc. d'une même quantité i, cette quantité disparaîtra d'elle-même des fonctions dont il s'agit. Or, en substituant $x+i$, $\xi+i$, etc., à la place de x, ξ, etc. dans la fonction $F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta\ldots)$, elle devient, par le développement,

$$F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta\ldots)+i[F'(x)+F'(\xi)+\text{etc.}]+\text{etc.}$$

Donc, on aura nécessairement l'équation du premier ordre

$$F'(x)+F'(\xi)+\text{etc.}=0.$$

On trouvera, de la même manière,

$$\Phi'(x) + \Phi'(\xi) + \text{etc.} = 0;$$

et ainsi de suite.

Or, si le système n'est soumis à d'autres forces que celles qui peuvent résulter de l'action mutuelle des corps, les équations du mouvement relatives aux coordonnées x, ξ, etc. seront de la forme (art. 15),

$$\begin{aligned} Mx'' &= \Pi F'(x) + \Psi\Phi'(x) + \text{etc.}, \\ N\xi'' &= \Pi F'(\xi) + \Psi\Phi'(\xi) + \text{etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Donc, ajoutant ces équations ensemble, on aura simplement

$$Mx'' + N\xi'' + \text{etc.} = 0,$$

équation indépendante des conditions du système.

Cette équation a l'équation primitive

$$Mx' + N\xi' + \text{etc.} = a;$$

et celle-ci a encore l'équation primitive

$$Mx + N\xi + \text{etc.} = at + b,$$

a et b étant des constantes arbitraires.

Ainsi, on a tout de suite, dans ce cas, une relation entre les différentes abscisses x, ξ, etc.

Il est facile de voir que le cas dont il s'agit, aura lieu dans tout système entièrement libre de se mouvoir dans la direction de l'axe des abscisses, quelle que soit l'action que les corps peuvent exercer les uns sur les autres. Car alors, relativement à cet axe, les conditions du système ne pourront dépendre que de la position respective des corps, et nullement de leur position par rapport à l'origine des abscisses; par conséquent, les équations qui exprimeront ces conditions, ne pourront contenir que les différences $x - \xi$, etc. des abscisses. Et si les corps exercent les uns sur les autres des attractions ou des répulsions mutuelles, comme les fonctions $F(x, y, z, \xi \ldots)$ dues à ces forces, ne dépendent que

des distances $\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}$, etc., ces fonctions auront aussi la même propriété.

Donc, lorsque le mouvement du système sera tout à fait libre suivant la direction de l'axe des x, de quelque manière que les corps agissent les uns sur les autres, soit par des forces quelconques de résistance, ou par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, l'équation précédente entre les abscisses x, ξ, etc. des différens corps, aura toujours lieu.

Si l'on prend dans le système un point qui réponde à l'abscisse X, telle que l'on ait

$$X = \frac{Mx + N\xi + \text{etc.}}{M + N + \text{etc.}},$$

on aura

$$X'' = 0, \quad \text{et de là} \quad X' = a, \quad X = at,$$

en supposant que l'espace x soit nul au commencement du temps. Ainsi, le mouvement de ce point suivant la direction de l'axe des x sera uniforme avec la vîtesse constante a.

52. Si, dans le même système, on suppose que les corps M, N, etc. soient de plus animés par des forces quelconques P, Q, etc. dirigées suivant l'axe des x et tendant à augmenter les x, ξ, etc., il faudra dans ce cas ajouter respectivement les quantités P, Q, etc. aux valeurs de Mx'', $N\xi''$, etc.; ce qui donnera les équations

$$\begin{aligned} Mx'' &= P + \Pi F'(x) + \Psi\Phi'(x) + \text{etc.}, \\ N\xi'' &= Q + \Pi F'(\xi) + \Psi\Phi'(\xi) + \text{etc.}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

dont la somme sera

$$Mx'' + N\xi'' + \text{etc.} = P + Q + \text{etc.};$$

et si l'on substitue pour $Mx + N\xi + \text{etc.}$ la quantité $(M+N+\text{etc.})X$, on aura

$$(M+N+\text{etc.})\,X'' = P + Q + \text{etc.},$$

équation qui représente le mouvement rectiligne suivant l'axe des x d'un

d'un corps dont la masse serait $M+N+$ etc., et qui serait animé par une force égale à $P+Q+$ etc.

D'où l'on peut conclure que le point du système qui répond à l'abscisse X, aura, dans la direction de l'axe des x, le même mouvement qu'il aurait si tous les corps du système étaient concentrés dans ce point, et que toutes les forces qui agissent sur les corps dans la direction du même axe, lui fussent appliquées.

33. Si le système est libre à la fois relativement à l'axe des x et à celui des y, il est visible que les mêmes résultats auront lieu pour les mouvemens suivant ces deux axes; et si le système est absolument libre dans tous les sens, alors les mêmes résultats auront lieu par rapport aux trois axes; et on en pourra conclure que si on prend dans le système un point qui réponde aux coordonnées X, Y, Z, telles que l'on ait

$$X = \frac{Mx+N\xi+\text{etc.}}{M+N+\text{etc.}},$$
$$Y = \frac{My+N\eta+\text{etc.}}{M+N+\text{etc.}},$$
$$Z = \frac{Mz+N\zeta+\text{etc.}}{M+N+\text{etc.}};$$

ce point, lorsque le système n'est animé par aucune force extérieure, se mouvra uniformément en ligne droite; et que si les différens corps du système sont animés par des forces quelconques, le même point se mouvra comme si tous les corps y étaient concentrés, et que toutes les forces y fussent appliquées chacune suivant sa direction propre.

Le point dont il s'agit est connu, en mécanique, sous le nom de *centre de gravité*, et la proposition que nous venons de démontrer s'énonce ordinairement ainsi : L'état de mouvement ou de repos du centre de gravité de plusieurs corps, ne change point par l'action mutuelle des corps entre eux, pourvu que le système soit entièrement libre; c'est ce qui constitue la loi de la *conservation du mouvement du centre de gravité.*

Il est bon de remarquer que cette loi a lieu aussi lorsque, par la rencontre et l'action mutuelle des corps, il survient des chan-

gemens brusques dans leurs mouvemens ; car on peut regarder ces changemens comme produits par l'action de ressorts interposés entre les corps qui se choquent, et dont la durée est presque momentanée. C'est ainsi qu'on peut envisager les changemens qui arrivent dans le choc des corps durs, et c'est par cette raison que le mouvement du centre de gravité n'est point altéré dans ces changemens.

34. On rapporte communément le centre de gravité de plusieurs corps à trois axes fixes, par le moyen des coordonnées X, Y, Z, données ci-dessus; si on voulait le rapporter à des points déterminés, alors nommant a, b, c les trois coordonnées d'un de ces points, et d la distance du centre de gravité à ce point, on aurait

$$d^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2$$
$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aX - 2bY - 2cZ + a^2 + b^2 + c^2.$$

Or, si on fait le carré de la quantité $Mx + N\xi + \text{etc.}$, il est facile de voir qu'on peut le mettre sous la forme

$$(M+N+\text{etc.})(Mx^2 + N\xi^2 + \text{etc.}) - MN(x-\xi)^2 - \text{etc.};$$

donc on aura (art. précédent)

$$X^2 = \frac{Mx^2 + N\xi^2 + \text{etc.}}{M+N+\text{etc.}} - \frac{MN(x-\xi)^2 + \text{etc.}}{(M+N+\text{etc.})^2},$$

et de là

$$X^2 - 2aX + a^2 = \frac{M(x-a)^2 + N(\xi-a)^2 + \text{etc.}}{M+N+\text{etc.}} - \frac{MN(x-\xi)^2 + \text{etc.}}{(M+N+\text{etc.})^2}.$$

On trouvera de même

$$Y^2 - 2bY + b^2 = \frac{M(y-b)^2 + N(\eta-b)^2 + \text{etc.}}{M+N+\text{etc.}} - \frac{MN(y-\eta)^2 + \text{etc.}}{(M+N+\text{etc.})^2};$$

et pareillement

$$Z^2 - 2cZ + c^2 = \frac{M(z-c)^2 + N(\zeta-c)^2 + \text{etc.}}{M+N+\text{etc.}} - \frac{MN(z-\zeta)^2 + \text{etc.}}{(M+N+\text{etc.})^2}.$$

Si l'on fait ces substitutions dans l'expression précédente de d^2, et qu'on désigne, pour abréger, par A la somme des masses M,

N, etc., multipliées chacune par le carré de sa distance au point donné, cette somme étant de plus divisée par la somme des masses; et qu'on désigne aussi par B la somme des produits des masses prises deux à deux et multipliées par le carré de leurs distances respectives, cette somme étant divisée par le carré de la somme des masses, on aura $d^2 = A - B$, et par conséquent $d = \sqrt{(A - B)}$.

Ainsi, comme la quantité B ne dépend que de la position respective des corps, si on détermine les valeurs de A par rapport à trois points différens, pris dans le système ou hors du système, à volonté, on aura les distances du centre de gravité à ces points, et par conséquent sa position absolue. Si les corps étaient tous dans le même plan, il suffirait de considérer deux points, et il n'en faudrait qu'un seul si tous les corps étaient dans une même ligne droite. En prenant les trois points donnés dans les corps mêmes du système, la position du centre de gravité sera donnée simplement par les masses et par leurs distances respectives. Comme cette manière de trouver le centre de gravité est peu connue, j'ai cru pouvoir la donner ici à cause de l'utilité dont elle peut être dans plusieurs occasions.

35. Le second cas est celui où les conditions du système sont indépendantes de la direction des axes des x et y sur le plan de ces coordonnées, ensorte qu'en faisant tourner ces axes autour de l'axe des z d'un angle quelconque i, ce qui changera les abscisses x, ξ, etc. en $x\cos i - y\sin i$, $\xi\cos i - \eta\sin i$, etc., et les ordonnées y, η, etc. en $y\cos i + x\sin i$, $\eta\cos i + \xi\sin i$, etc., les fonctions représentées par les caractéristiques F, Φ, etc. ne varient point par ces changemens, quel que soit l'angle i. Il est facile de voir que cette propriété aura lieu, en général, dans toute fonction des quantités $x^2 + y^2$, $\xi^2 + \eta^2$, $x\xi + y\eta$, $x\eta - y\xi$, etc.

Si l'on fait dans ce cas

$$a = x(\cos i - 1) - y\sin i, \quad b = y(\cos i - 1) + x\sin i,$$
$$\alpha = \xi(\cos i - 1) - \eta\sin i, \quad \beta = \eta(\cos i - 1) + \xi\sin i, \text{ etc.};$$

il faudra qu'en substituant à la fois dans ces fonctions $x + a$,

$y+b$, $\xi+\alpha$, $\eta+\beta$, etc. à la place de x, y, ξ, η, etc., et développant suivant les puissances de i, la somme des termes affectés d'une même puissance soit nulle. Or, par ces substitutions, et par le développement suivant les puissances de a, b, α, β, etc., la fonction $F(x, y, z, \xi\ldots)$ devient

$$F(x, y, z, \xi\ldots)+aF'(x)+bF'(y)+\alpha F'(\xi)+\beta F'(\eta)+\text{etc.}$$
$$+\frac{a^2}{2}F''(x)+\text{etc.}$$

Mais on a

$$\sin i = i-\frac{i^3}{2.3}+\text{etc.}, \qquad \cos i = 1-\frac{i^2}{2}+\text{etc.};$$

donc les termes affectés de i dans la formule précédente seront

$$i[-yF'(x)+xF'(y)-\eta F'(\xi)+\xi F'(\eta)-\text{etc.}];$$

par conséquent on aura pour la fonction $F(x, y\ldots)$ l'équation de condition

$$xF'y-yF'(x)+\xi F'(\eta)-\eta F'(\xi)+\text{etc.}=0.$$

On trouvera de la même manière pour la fonction $\Phi(x, y\ldots)$, l'équation

$$x\Phi'(y)-y\Phi'(x)+\xi\Phi'(\eta)-\eta\Phi'(\xi)+\text{etc.}=0;$$

et ainsi des autres.

36. Maintenant, si les corps du système n'éprouvent d'autres actions que celles qui peuvent résulter de leur liaison mutuelle, les équations du mouvement relatives aux coordonnées x, y, ξ, η, etc. seront de cette forme (art. 26 et 30);

$$\begin{aligned}
Mx'' &= \Pi F'(x)+\Psi\Phi'(x)+\text{etc.};\\
My'' &= \Pi F'(y)+\Psi\Phi'(y)+\text{etc.};\\
N\xi'' &= \Pi F'(\xi)+\Psi\Phi'(\xi)+\text{etc.};\\
N\eta'' &= \Pi F'(\eta)+\Psi\Phi'(\eta)+\text{etc.};\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc, si on ajoute la seconde de ces équations multipliée par

x, la quatrième multipliée par ξ et ainsi de suite, et qu'on en retranche la première multipliée par y, la troisième multipliée par η, etc., on aura, en vertu des équations de condition trouvées ci-dessus, l'équation

$$M(xy'' - yx'') + N(\xi\eta'' - \eta\xi'') + \text{etc.} = 0,$$

qui est aussi, comme l'on voit, indépendante des conditions du système.

En prenant son équation primitive, on aura

$$M(xy' - yx') + N(\xi\eta' - \eta\xi') + \text{etc.} = C,$$

C étant une constante arbitraire. Ainsi on a tout de suite une équation du premier ordre entre les coordonnées, x, y, ξ, η, etc. des différens corps.

Or, $xy' - yx' = xy' + yx' - 2yx'$; mais $xy' + yx'$ est la fonction prime de xy, c'est-à-dire, du double de l'aire du triangle rectangle dont x est la base et y la hauteur, et yx' est la fonction prime de l'aire de la courbe comprise entre l'abscisse x et l'ordonnée y; donc $\frac{xy' - yx'}{2}$ sera la fonction prime de la différence du triangle et de l'aire dont nous parlons; et il est facile de voir que cette différence est, en général, égale à l'espace compris entre la courbe dont x et y sont les coordonnées, et la droite menée de l'origine de ces coordonnées à la courbe, c'est-à-dire, à l'aire du secteur décrit par cette même droite qu'on nomme *rayon vecteur*.

Ainsi nommant A cette aire, on aura

$$xy' - yx' = 2A';$$

et nommant de même α l'aire décrite par le rayon vecteur mené à la courbe dont ξ et η sont les coordonnées, on aura pareillement

$$\xi\eta' - \eta\xi' = 2\alpha';$$

et ainsi des autres. De cette manière, l'équation précédente deviendra

$$2MA' + 2N\alpha' + \text{etc.} = C;$$

et comme les fonctions primes se rapportent ici au tems t, on aura cette équation primitive

$$MA + N\alpha + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}Ct + D,$$

D étant une constante arbitraire, qui sera nulle si on fait commencer les aires A, α, etc. au commencement du temps t. Alors la somme des aires multipliées chacune par la masse correspondante, sera proportionnelle au temps.

Il peut arriver, suivant la forme de la courbe dont x et y sont les coordonnées, que l'aire décrite par le rayon vecteur soit au contraire la différence de l'aire de la courbe et de celle du triangle, auquel cas on aura

$$xy' - yx' = -2A';$$

mais il est facile de se convaincre que, dans ce cas, l'aire sera décrite dans un sens opposé. Donc en général la somme des produits des masses par les aires, sera proportionnelle au temps, en prenant positivement les aires tracées dans le même sens, et négativement celles qui seraient tracées dans un sens opposé. C'est une remarque essentielle, et sans laquelle le théorème dont il s'agit ne serait pas vrai en général.

Cette loi des aires aura donc lieu dans le mouvement de tout système de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, pourvu que le système soit entièrement libre de tourner autour de l'axe des z perpendiculaire au plan des x et y; car il est visible que les conditions provenant de la liaison mutuelle des corps, seront alors les mêmes, quelque direction qu'on donne aux axes des x et y.

Et si les corps agissent les uns sur les autres par des forces d'attraction ou de répulsion, ces forces seront exprimées par des fonctions des distances $\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}$ lesquelles auront aussi la propriété que nous avons supposée; par conséquent la même loi des aires aura encore lieu.

Enfin, si les corps M, N, etc. étaient de plus animés par des forces quelconques P, Q, etc., dirigées vers des points donnés de

l'axe des z, éloignés du plan des x et y des quantités m, n, etc., il est facile de conclure des formules de l'article 15 que l'on aurait à ajouter aux valeurs de Mx'' et Ny'', les termes respectifs

$$\frac{Px}{V[x^2+y^2+(z-m)^2]} \quad \text{et} \quad \frac{Py}{V[x^2+y^2+(z-m)^2]};$$

et de même aux valeurs de $M\xi''$ et $N\eta''$, les termes

$$\frac{Q\xi}{V[\xi^2+\eta^2+(\zeta-n)^2]} \quad \text{et} \quad \frac{Q\eta}{V[\xi^2+\eta^2+(\zeta-n)^2]};$$

et ainsi de suite. Donc les valeurs des quantités $M(xy''-yx'')$, $M(\xi\eta''-\eta\xi'')$, etc. seront indépendantes de ces forces, et la loi des aires subsistera également dans ce cas; donc elle subsistera aussi si les corps ne sont animés que par des forces dirigées parallèlement au même axe, et par conséquent perpendiculaire au plan des x et y.

57. Donc, en général, si le système est libre de tourner autour d'un axe fixe, quelle que soit l'action que les corps peuvent exercer les uns sur les autres et de quelques forces qu'ils soient animés, pourvu qu'elles tendent à cet axe ou qu'elles y soient parallèles, la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que sa projection sur un plan perpendiculaire au même axe décrit autour de cet axe, est toujours proportionnelle au temps.

Si donc le système était libre de tourner, d'une manière quelconque, autour d'un point fixe, et qu'outre l'action mutuelle des corps, chacun d'eux fût encore sollicité par une force quelconque tendant à ce point, la même loi des aires aurait lieu relativement à tous les axes qui passeraient par ce même point. Ainsi, dans ce cas, en prenant ce point pour l'origine des coordonnées, on aurait, relativement aux trois axes des coordonnées, ces trois équations du premier ordre (art. précédent) :

$$\begin{aligned}
&M(xy'-yx')+N(\xi\eta'-\eta\xi')+\text{etc.}=C,\\
&M(xz'-zx')+N(\xi\zeta'-\zeta\xi')+\text{etc.}=D,\\
&M(yz'-zy')+N(\eta\zeta'-\zeta\eta')+\text{etc.}=E;
\end{aligned}$$

C, D, E étant trois constantes arbitraires.

38. Si le système était entièrement libre, et qu'il n'y eût aucun point fixe, ces équations et par conséquent la loi des aires auraient lieu par rapport à un point quelconque qu'on prendrait pour l'origine des coordonnées, et pour tous les axes qu'on ferait passer par ce point.

Il en serait encore de même dans ce cas, si le point dont il s'agit, au lieu d'être fixe dans l'espace, avait un mouvement quelconque rectiligne et uniforme. En effet, supposons qu'il parcoure dans le temps t les espaces αt, βt, γt suivant la direction des axes des x, y, z, les vîtesses α, β, γ étant constantes, et soient p, q, r les coordonnées du corps M, π, χ, ρ celles du corps N, etc., rapportées à ce même point pris pour leur origine, il est clair qu'on aura

$$p = x - \alpha t, \quad q = y - \beta t, \quad r = z - \gamma t,$$

et de même

$$\pi = \xi - \alpha t, \quad \chi = \eta - \beta t, \quad \rho = \zeta - \gamma t;$$

et ainsi des autres. Donc on aura

$$pq' - qp' = (x - \alpha t)(y' - \beta) - (y - \beta t)(x' - \alpha) = xy' - yx' - \alpha(ty' - y) + \beta(tx' - x),$$

et pareillement

$$\pi\chi' - \chi\pi' = \xi\eta' - \eta\xi' - \alpha(t\eta' - \eta) + \beta(t\xi' - \xi);$$

et ainsi des autres formules semblables. On aura donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}(pq' - qp') + \mathrm{N}(\pi\chi' - \chi\pi') + \text{etc.} \\ &= \mathrm{M}(xy' - yx') + \mathrm{N}(\xi\eta' - \eta\xi') + \text{etc.} \\ &- \alpha t(\mathrm{M}y' + \mathrm{N}\eta' + \text{etc.}) + \alpha(\mathrm{M}y + \mathrm{N}\eta + \text{etc.}) \\ &+ \beta t(\mathrm{M}x' + \mathrm{N}\xi' + \text{etc.}) - \beta(\mathrm{M}x + \mathrm{N}\xi + \text{etc.}) \end{aligned}$$

Or, dans ce cas (art. 32 et 33),

$$\mathrm{M}x + \mathrm{N}\xi + \text{etc.} = at + b, \quad \mathrm{M}y + \mathrm{N}\eta + \text{etc.} = ct + d;$$

a, b, c, d étant des constantes : donc faisant ces substitutions, il viendra

viendra

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}(pq' - qp') + \mathrm{N}(\pi\chi' - \chi\pi') + \text{etc.} \\ =\ &\mathrm{M}(xy' - yx') + \mathrm{N}(\xi\eta' - \eta\xi') + \text{etc.} \\ &+ \alpha d - \beta b = \mathrm{C} + \alpha d - \beta b. \end{aligned}$$

Ainsi la quantité $\mathrm{M}(pq' - qp') + \mathrm{N}(\pi\chi' - \chi\pi')$ etc. sera encore constante; par conséquent, la somme des aires décrites autour de l'axe des r passant par le point mobile, multipliées chacune par la masse respective, sera aussi proportionnelle au tems.

On trouvera de la même manière que les deux autres quantités

$$\mathrm{M}(pr' - rp') + \mathrm{N}(\pi\rho' - \rho\pi') + \text{etc.},\ \mathrm{M}(qr' - rq') + \mathrm{N}(\chi\rho' - \rho\chi') + \text{etc.},$$

seront constantes, et qu'ainsi la somme des aires décrites autour des axes de q et p passant par le même point mobile, multipliées chacune par la masse respective, sera encore proportionnelle au tems.

Donc, puisque dans le cas dont il s'agit, le centre de gravité du système ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme (art. 33), il s'ensuit que la loi des aires aura lieu aussi par rapport au centre de gravité et pour tous les axes qu'on fera passer par ce centre.

Nous remarquerons encore que la loi des aires dont nous parlons a lieu aussi comme celle du mouvement du centre de gravité, et par la même raison (art. cité), lorsqu'il survient des changemens brusques dans les mouvemens du système, par l'action mutuelle des corps qui le composent. Ainsi la même loi peut s'appliquer également au choc des corps durs et à celui des corps élastiques.

CHAPITRE VII.

De la loi des forces vives dans le mouvement d'un système animé par des forces accélératrices quelconques. De la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques. De la perte de ces forces dans le choc des corps durs, ou en général dans les changemens brusques que le système peut éprouver. De la somme des forces vives dans les situations de l'équilibre. Remarques générales sur l'économie de ces forces dans les machines.

39. En général quelles que soient les conditions du système, les équations de condition

$$F(x, y, z, \xi \ldots) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \xi \ldots) = 0, \text{ etc.}$$

donneront toujours, en prenant les fonctions primes relativement au tems t, dont les variables x, y, etc. sont des fonctions,

$$x'F'(x)+y'F'(y)+z'F'(z)+\xi'F'(\xi)+\eta'F'(\eta)+\zeta'F'(\zeta)+\text{etc.} = 0,$$
$$x'\Phi'(x)+y'\Phi'(y)+z'\Phi'(z)+\xi'\Phi'(\xi)+\eta'\Phi'(\eta)+\zeta'\Phi'(\zeta)+\text{etc.} = 0;$$

et ainsi de suite.

Or, si le système n'éprouve que l'action des forces qui résultent de ces conditions, les équations du mouvement des corps M, N, etc. seront, comme dans l'article 36, de la forme

$$\begin{aligned}
Mx'' &= \Pi F'(x) + \Psi\Phi'(x) + \text{etc.}\\
My'' &= \Pi F'(y) + \Psi\Phi'(y) + \text{etc.}\\
Mz'' &= \Pi F'(z) + \Psi\Phi'(z) + \text{etc.}\\
N\xi'' &= \Pi F'(\xi) + \Psi\Phi'(\xi) + \text{etc.}\\
N\eta'' &= \Pi F'(\eta) + \Psi\Phi'(\eta) + \text{etc.}\\
N\zeta'' &= \Pi F'(\zeta) + \Psi\Phi'(\zeta) + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc, multipliant ces équations respectivement par x', y', z', ξ', η', ζ', etc. et les ajoutant ensemble, on aura celle-ci,

$$M(x'x''+y'y''+z'z'')+N(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')+\text{etc.}=0,$$

qui est entièrement indépendante des conditions du système, et qui par conséquent aura lieu en général, quelle que puisse être la disposition et la liaison mutuelle des corps qui le composent.

Cette équation a pour équation primitive

$$M(x'^2+y'^2+z'^2)+N(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+\text{etc.}=H,$$

dans laquelle H est une constante arbitraire. Or, nous avons vu (art. 11) que $\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}$ exprime la vîtesse du corps qui décrit la courbe dont x, y, z sont les coordonnées; donc, si on nomme u la vîtesse du corps M, ν celle du corps N, et ainsi des autres, on aura

$$x'^2+y'^2+z'^2=u^2, \qquad \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=\nu^2, \text{ etc.},$$

et l'équation précédente deviendra

$$Mu^2+N\nu^2+\text{etc.}=H.$$

Dans la fameuse dispute sur l'estimation des forces, on a appelé *force vive* d'un corps en mouvement, le produit de sa masse et du carré de sa vîtesse. Ainsi, en conservant cette dénomination, on voit par l'équation qu'on vient de trouver, que la somme des forces vives de tous les corps d'un système est constante, lorsque ces corps n'éprouvent d'autres actions que celles qui résultent de leur liaison, et en général, de toutes les conditions qui peuvent être exprimées par des équations entre les différentes coordonnées du corps, sans que le tems y entre. C'est dans cette loi que consiste le principe de la conservation des forces vives.

4o. Si les corps agissaient de plus les uns sur les autres par des forces d'attraction ou de répulsion quelconques, ces forces donneraient à la vérité, des termes de la même forme $\Pi f'(x)$, $\Pi f'(y)$, etc. dans les valeurs des quantités Mx'', My'', etc., en prenant pour

la fonction $f(x, y, \ldots)$ la distance $\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}$ entre deux corps, et pour Π la force absolue que ces corps exercent l'un sur l'autre (art. 25); mais il est évident que la condition $x'f'(x) + y'f'(y) + \text{etc.} = 0$, n'aurait pas lieu pour cette fonction, comme pour celles qui résultent des conditions du système. Ainsi ces termes subsisteront dans l'équation indépendante des conditions du système, et l'on aura par conséquent

$$M(x'x''+y'y''+z'z'')+N(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')+\text{etc.}$$
$$=\Pi[x'f'(x)+y'f'(y)+z'f'(z)+\xi'f'(\xi)+\eta'f'(\eta)+\zeta'f'(\zeta)]+\text{etc.},$$

où l'on voit que la quantité $x'f'(x)+y'f'(y)+\text{etc.}$ est la fonction prime relativement à t de la fonction $f(x, y, z, \xi\ldots)$ qui est ici

$$\sqrt{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]}.$$

Donc, en général, si on désigne par p la distance rectiligne entre les corps M et N, et par P la force absolue d'attraction ou de répulsion que ces corps exercent l'un sur l'autre, si on désigne de même par q la distance rectiligne entre deux autres corps du système, et par Q la force d'attraction ou de répulsion entre ces corps, et ainsi de suite, en prenant les quantités P, Q, etc., positivement lorsqu'elles tendent à augmenter les distances p, q, etc., et négativement lorsqu'elles tendent à diminuer ces distances, et qu'on nomme u, v, etc. les vîtesses des corps M, N, etc., l'équation précédente deviendra

$$Muu'+Nvv'+\text{etc.}=Pp'+Qq'+\text{etc.}$$

qui est également indépendante des conditions du système, mais qui renferme, comme l'on voit, les forces P, Q, etc. d'attraction ou de répulsion mutuelle.

41. Enfin, si les corps étaient en même temps attirés vers des centres fixes ou repoussés de ces centres, la même équation aurait encore lieu en prenant, par exemple, p pour la distance du corps M à un centre fixe, et P pour la force qui vient de ce centre; et ainsi des autres. Car on peut déduire le cas des forces tendantes à des centres fixes, de celui des actions mutuelles des corps,

en supposant que quelques-uns de ces corps deviennent immobiles, ce qui a lieu lorsque leurs masses sont infinies; mais, sans avoir recours à cette démonstration indirecte, il n'y a qu'à considérer que si le corps M, par exemple, éprouve l'action d'une force P qui part d'un centre fixe dont la position soit déterminée par les coordonnées l, m, n, et dont la distance à M soit p, il en résultera (art. 25) dans les valeurs des quantités Mx'', My'', Mz'', les termes respectifs

$$\frac{P(x-l)}{p}, \quad \frac{P(y-m)}{p}, \quad \frac{P(z-n)}{p},$$

et par conséquent dans la valeur de $M(x'x''+y'y''+z'z'')$, ou de Muu', les termes

$$\frac{P(x-l)x'}{p}+\frac{P(y-m)y'}{p}+\frac{P(z-n)z'}{p};$$

mais p étant $= \sqrt{[(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2]}$, on a

$$p'=\frac{(x-l)x'+(y-m)y'+(z-n)z'}{p};$$

donc les termes dont il s'agit se réduisent à Pp'.

D'où l'on conclura, en général, que l'équation

$$Muu'+Nvv'+\text{etc.}=Pp'+Qq'+\text{etc.}$$

a lieu pour un système quelconque de corps disposés ou liés entre eux d'une manière quelconque, et qui s'attirent ou se repoussent réciproquement, ou sont attirés vers des centres fixes, ou repoussés par des forces quelconques P, Q, etc., en nommant p, q, etc. les distances mutuelles des corps qui s'attirent ou se repoussent, ou leurs distances aux centres fixes d'attraction ou de répulsion, et prenant les quantités P, Q, etc., positivement ou négativement, selon que ces forces seront répulsives ou attractives, parce que les premières tendent à augmenter les distances p, q, etc., et les secondes à les diminuer.

42. Si les forces P, Q, etc. sont respectivement des fonctions

quelconques des distances p, q, etc., suivant lesquelles elles agissent, ce qu'on peut toujours supposer lorsque ces forces sont indépendantes les unes des autres, ou, en général, si les quantités P, Q, etc. sont des fonctions de p, q, etc., telles que la quantité $Pp' + Qq' +$ etc. soit la fonction prime d'une fonction de p, q, etc., que nous désignerons par $F(p, q.....)$, l'équation primitive de l'équation ci-dessus sera

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{etc.} = K + 2F(p, q...)$$

K étant une constante arbitraire; et, dans ce cas, les forces P, Q, etc., qui agissent suivant les lignes p, q, etc., seront représentées par les fonctions primes $F'(p)$, $F'(q)$, etc.

Soient a, b, etc. les valeurs de p, q, etc. dans un instant donné, et U, V, etc. les vîtesses de M, N, etc. dans cet instant, l'équation précédente rapportée à ce même instant, donnera

$$MU^2 + NV^2 + \text{etc.} = K + 2F(a, b...),$$

d'où l'on tire

$$K = MU^2 + NV^2 + \text{etc.} - 2F(a, b...);$$

donc, substituant cette valeur, on aura l'équation générale

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{etc.} = MU^2 + MV^2 + \text{etc.} + 2F(p, q...) - 2F(a, b...).$$

Cette équation renferme le principe de la conservation des forces vives pris dans toute sa généralité. Elle fait voir que la force vive totale du système ne dépend que des forces actives qui animent les corps, et de la position des corps relativement aux centres de ces forces; de sorte que si, dans deux instans, les corps se trouvent à mêmes distances de ces centres, la somme de leurs forces vives sera aussi la même.

J'entends par *forces actives*, les forces que les corps exercent les uns sur les autres, et dont l'effet est de changer leurs distances ou leurs positions respectives, comme les forces intrinsèques d'attraction ou de répulsion, les forces des ressorts placés entre les corps, etc. Au contraire j'appelle *forces passives* les forces de

résistance produites par les pressions des corps, les tensions des fils ou des verges, etc., et dont l'effet est de maintenir les corps dans une même position respective, et d'empêcher que les conditions du système ne soient violées. Ces forces passives ne contribuent en rien, comme l'on voit, à la production de la force vive; les forces actives seules l'augmentent ou la diminuent, comme elles feraient, si les corps, étant mus librement, partaient des mêmes points et arrivaient aux mêmes points, en décrivant des lignes quelconques.

43. Nous avons vu que la loi du mouvement du centre de gravité, et celle des aires, sont indépendantes de l'action mutuelle des corps, quelle que soit cette action, soit qu'elle vienne des forces passives ou actives; ainsi, à cet égard, ces deux lois ont une plus grande étendue que la loi de la conservation des forces vives, qui n'est indépendante que de l'action des forces passives. Il résulte de là que cette dernière loi ne peut pas subsister, comme les deux premières, dans le cas où, par l'action mutuelle des corps, ou par la rencontre d'obstacles, il survient des changemens brusques dans leurs mouvemens, parce que ces changemens sont ou peuvent toujours être regardés comme l'effet des forces actives de ressorts placés entre les corps, ou entre eux et les obstacles, et qui, en se contractant ou se dilatant très-peu, maintiennent la loi de continuité dans la variation des mouvemens. La force vive des corps qui subissent ainsi des changemens brusques, reçoit, à chacun de ces changemens, une augmentation ou une diminution égale à la force vive que l'action de ces ressorts produirait si les corps n'étaient soumis qu'à cette action.

Ainsi, si les corps M, N, etc. viennent à se rencontrer, ou à rencontrer des obstacles, de manière qu'il en résulte des changemens brusques dans leurs mouvemens, on pourra appliquer à ces corps, pendant leur action, quelque courte qu'elle puisse être, la formule de l'article précédent; de sorte qu'en nommant U, V, etc. leurs vîtesses au commencement de l'action u, v les vîtesses à la fin de l'action, désignant de plus par a, b, etc. les valeurs des dis-

tances p, q, etc. au commencement, et par α, β, etc. leurs valeurs à la fin de la même action, on aura

$$MU^2+NV^2+\text{etc.}-Mu^2-N\nu^2-\text{etc.}=2F(a,\ b\ldots)-2F(\alpha,\ \beta\ldots).$$

Ce qui montre que la différence des forces vives au commencement et à la fin de l'action sera

$$2F(a,\ b\ldots)-2F(\alpha,\ \beta\ldots),$$

où l'on remarquera que, quoique les quantités α, β, etc. diffèrent très-peu des quantités a, b, etc., la différence des fonctions semblables $F(a,\ b\ldots)$ et $F(\alpha,\ \beta\ldots)$ peut avoir une valeur finie quelconque.

44. Comme ces fonctions sont inconnues, on ne pourrait pas déterminer, de cette manière, la variation de la force vive; mais dans les cas particuliers on pourra la trouver d'après les conditions du problème.

Lorsque des corps se choquent, soit immédiatement, soit par l'entremise de leviers ou de machines quelconques, si les corps sont parfaitement élastiques, la compression et la restitution se font suivant la même loi, et l'action est censée durer jusqu'à ce que les corps soient revenus, par la restitution du ressort, à la même position respective où la compression a commencé. On aura donc pour ce cas, dans l'équation précédente,

$$\alpha=a,\quad \beta=b,\ \text{etc.},$$

et par conséquent

$$F(\alpha,\ \beta\ldots)=F(a,\ b\ldots);$$

d'où il suit que la force vive sera la même avant et après le choc; ce qu'on sait depuis long-temps, mais dont on n'avait pas, que je sache, une démonstration simple et générale.

Au contraire, dans le choc des corps durs, l'action n'est censée durer que jusqu'à ce que les corps aient acquis des vîtesses en vertu desquelles ils ne se nuisent plus, et qui, par conséquent,

ne

ne produisent point d'action entre eux. Ainsi l'effet de ces vîtesses sur l'action mutuelle des corps étant nul, si on leur imprimait ces mêmes vîtesses avant ou pendant l'action, elle serait la même en vertu des vîtesses composées de celles-ci et des vîtesses propres des corps. Donc elle serait encore la même, si les vîtesses imprimées étaient égales et directement contraires à celles dont nous parlons, car l'action ne varierait pas, en supposant qu'on détruisît ces vîtesses imprimées par des vîtesses opposées.

Il s'ensuit de là que, dans le choc des corps durs, les vîtesses u, v, etc. après le choc, sont telles, que l'équation

$$MU^2+NV^2+\text{etc.}-Mu^2-Nv^2-\text{etc.}=2F(a, b, c...)-2F(\alpha, \beta, \gamma...)$$

subsisterait également en composant les vîtesses U, V, etc., u, v, etc. avec les vîtesses $-u$, $-v$, etc., le second membre de cette équation demeurant le même, parce qu'il ne dépend que de la position mutuelle des corps, avant et après le choc.

Si donc on nomme A la vîtesse composée de U et de $-u$, B la vîtesse composée de V et de $-v$, etc., l'équation deviendra

$$MA^2+NB^2+\text{etc.}=2F(a, b, c...)-2F(\alpha, \beta, \gamma...),$$

puisque les vîtesses composées $u-u$, $v-v$, etc. sont nulles.

On aura donc, pour le choc des corps durs, cette équation

$$MU^2-NV^2-Mu^2-Nv^2-\text{etc.}=MA^2+NB^2+\text{etc.}$$

Comme U, V, etc. sont les vîtesses avant le choc, et u, v les vîtesses après le choc, il est clair que A, B, etc. seront les vîtesses perdues par le choc; par conséquent MA^2+NB^2+ etc. sera la force vive qui résulterait de ces vîtesses; d'où l'on tire cette conclusion : que dans le choc des corps durs, il se fait une perte de forces vives égale à la force vive que les mêmes corps auraient s'ils étaient animés chacun de la vîtesse qu'il perd dans le choc. Ce théorème remarquable est dû, je crois, à M. *Carnot*, qui l'a trouvé d'une autre manière dans son *Essai sur les machines en général;* il est utile pour compléter l'équation des forces vives, dans les cas où il se fait une perte de ces forces par le choc.

45. Dans l'équation (art. 41)

$$Mu u' + N v v' + \text{etc.} = P p' + Q q' + \text{etc.},$$

les quantités p, q, etc. désignent les distances rectilignes des points où les forces P, Q, etc. sont appliquées, aux centres de ces forces; ainsi les quantités p', q', etc. expriment les vîtesses de ces points suivant les directions de ces mêmes forces, et comme les quantités p, q, etc. n'entrent point dans l'équation, il s'ensuit qu'elle a toujours lieu, quelles que soient les forces P, Q, etc., soit qu'elles tendent à des points donnés ou non, pourvu que l'on prenne pour p', q', etc. les vîtesses respectives des points où ces forces sont appliquées suivant les directions mêmes des forces.

Si les forces P, Q, étaient en équilibre, la quantité $Pp' + Qq' + \text{etc.}$ serait nulle par le principe des vîtesses virtuelles (art. 30): ainsi l'équation précédente montre ce que cette quantité devient lorsque les forces produisent du mouvement; et l'on voit qu'elle est alors égale à la fonction prime de la moitié de la force vive de tous les corps du système, quelles que soient d'ailleurs la disposition et la liaison mutuelle de ces corps.

Donc si, dans un instant quelconque, les forces qui agissent sur le système viennent à se contre-balancer, la fonction prime de la force vive sera alors nulle, et par conséquent, la force vive sera un *maximum* ou un *minimum* (art. 26, 2ᵉ Partie). En général, de toutes les situations que le système peut prendre, celle où il serait en équilibre, est aussi celle où sa force vive serait un *maximum* ou un *minimum* s'il était en mouvement; et il est démontré que l'équilibre sera stable lorsque la force vive sera un *maximum*, et qu'il ne le sera pas, lorsque la force vive sera un *minimum*. Mais la démonstration de cette propriété singulière de l'équilibre ne peut pas être insérée ici; on peut la voir dans la *Mécanique analytique*.

46. Puisque les quantités p', q', etc. n'expriment que les vîtesses des points où sont appliquées les forces P, Q, etc., estimées suivant la direction de ces forces, on peut prendre pour p', q', etc. les espaces simultanés parcourus par ces points, suivant ces directions. Ainsi Pp' sera la fonction prime de l'aire de la courbe

dont l'abscisse serait égale à p et l'ordonnée rectangle serait P, et de même Qq' sera la fonction prime de l'aire de la courbe dont l'abscisse serait q et l'ordonnée Q; et ainsi des autres (art. 28, 2e Partie). Donc, si on désigne respectivement ces aires par (P), (Q), etc., et qu'on prenne les fonctions primitives des deux membres de l'équation de l'article précédent, on aura en multipliant par 2 et nommant U, V les vîtesses de M, N, etc. lorsque les aires (P), (Q), etc. sont supposées commencer :

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{etc.} - MU^2 - NV^2 - \text{etc.} = 2(P) + 2(Q) + \text{etc.}$$

Cette équation est la même que celle de l'article 42, qui renferme le principe de la conservation des forces vives; mais elle est présentée ici d'une manière indépendante des fonctions qui peuvent représenter les forces P, Q, etc.

Si on suppose que ces forces agissent chacune séparement sur des corps libres dont les masses soient m, n, etc., on aura, par les équations fondamentales de l'article 15,

$$mp'' = P, \quad nq'' = Q, \text{ etc.};$$

donc, multipliant respectivement par $2p'$, $2q'$, etc., et prenant les fonctions primitives, on aura

$$mp'^2 = a + 2(P), \quad nq'^2 = b + 2(Q),$$

et ainsi des autres, a et b étant des constantes arbitraires. Donc, si on suppose, pour plus de simplicité, que les vîtesses p', q', etc. soient nulles, lorsque les aires (P), (Q), etc. commencent, on aura

$$a = 0, \quad b = 0, \text{ etc.};$$

et par conséquent

$$mp'^2 = 2(P), \quad nq'^2 = 2(Q), \text{ etc.},$$

où l'on voit que mp'^2, nq'^2, etc. sont les forces vives produites séparément et librement par les forces P, Q, etc. pendant la génération des aires (P), (Q), etc. de sorte que ces aires elles-mêmes sont égales à la moitié des forces vives engendrées.

45. Dans l'équation (art. 41)

$$Mu u' + N v v' + \text{etc.} = P p' + Q q' + \text{etc.},$$

les quantités p, q, etc. désignent les distances rectilignes des points où les forces P, Q, etc. sont appliquées, aux centres de ces forces; ainsi les quantités p', q', etc. expriment les vîtesses de ces points suivant les directions de ces mêmes forces, et comme les quantités p, q, etc. n'entrent point dans l'équation, il s'ensuit qu'elle a toujours lieu, quelles que soient les forces P, Q, etc., soit qu'elles tendent à des points donnés ou non, pourvu que l'on prenne pour p', q', etc. les vîtesses respectives des points où ces forces sont appliquées suivant les directions mêmes des forces.

Si les forces P, Q, étaient en équilibre, la quantité $Pp' + Qq' + \text{etc.}$ serait nulle par le principe des vîtesses virtuelles (art. 30): ainsi l'équation précédente montre ce que cette quantité devient lorsque les forces produisent du mouvement; et l'on voit qu'elle est alors égale à la fonction prime de la moitié de la force vive de tous les corps du système, quelles que soient d'ailleurs la disposition et la liaison mutuelle de ces corps.

Donc si, dans un instant quelconque, les forces qui agissent sur le système viennent à se contre-balancer, la fonction prime de la force vive sera alors nulle, et par conséquent, la force vive sera un *maximum* ou un *minimum* (art. 26, 2ᵉ Partie). En général, de toutes les situations que le système peut prendre, celle où il serait en équilibre, est aussi celle où sa force vive serait un *maximum* ou un *minimum* s'il était en mouvement; et il est démontré que l'équilibre sera stable lorsque la force vive sera un *maximum*, et qu'il ne le sera pas, lorsque la force vive sera un *minimum*. Mais la démonstration de cette propriété singulière de l'équilibre ne peut pas être insérée ici; on peut la voir dans la *Mécanique analytique*.

46. Puisque les quantités p', q', etc. n'expriment que les vîtesses des points où sont appliquées les forces P, Q, etc., estimées suivant la direction de ces forces, on peut prendre pour p', q', etc. les espaces simultanés parcourus par ces points, suivant ces directions. Ainsi Pp' sera la fonction prime de l'aire de la courbe

dont l'abscisse serait égale à p et l'ordonnée rectangle serait P, et de même Qq' sera la fonction prime de l'aire de la courbe dont l'abscisse serait q et l'ordonnée Q; et ainsi des autres (art. 28, 2e Partie). Donc, si on désigne respectivement ces aires par (P), (Q), etc., et qu'on prenne les fonctions primitives des deux membres de l'équation de l'article précédent, on aura en multipliant par 2 et nommant U, V les vîtesses de M, N, etc. lorsque les aires (P), (Q), etc. sont supposées commencer :

$$Mu^2 + Nv^2 + \text{etc.} - MU^2 - NV^2 - \text{etc.} = 2(P) + 2(Q) + \text{etc.}$$

Cette équation est la même que celle de l'article 42, qui renferme le principe de la conservation des forces vives; mais elle est présentée ici d'une manière indépendante des fonctions qui peuvent représenter les forces P, Q, etc.

Si on suppose que ces forces agissent chacune séparement sur des corps libres dont les masses soient m, n, etc., on aura, par les équations fondamentales de l'article 15,

$$mp'' = P, \quad nq'' = Q, \text{ etc.};$$

donc, multipliant respectivement par $2p'$, $2q'$, etc., et prenant les fonctions primitives, on aura

$$mp'^2 = a + 2(P), \quad nq'^2 = b + 2(Q),$$

et ainsi des autres, a et b étant des constantes arbitraires. Donc, si on suppose, pour plus de simplicité, que les vîtesses p', q', etc. soient nulles, lorsque les aires (P), (Q), etc. commencent, on aura

$$a = 0, \quad b = 0, \text{ etc.};$$

et par conséquent

$$mp'^2 = 2(P), \quad nq'^2 = 2(Q), \text{ etc.},$$

où l'on voit que mp'^2, nq'^2, etc. sont les forces vives produites séparément et librement par les forces P, Q, etc. pendant la génération des aires (P), (Q), etc. de sorte que ces aires elles-mêmes sont égales à la moitié des forces vives engendrées.

ADDITION

Au Chapitre II de la première Partie, page 19.

On peut démontrer, de différentes manières, la correspondance des fonctions dérivées avec les différentielles. Si on désigne par dx la différence constante des valeurs successives x, $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, etc. de la variable x, les valeurs correspondantes de la variable y, regardée comme fonction de x, seront par la formule précédente, en y faisant successivement $i=dx$, $2dx$, $3dx$, etc.;

$$
\begin{array}{l}
y \\
y + y'dx + \frac{y''dx^2}{2} + \frac{y'''dx^3}{2.3} + \frac{y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.}, \\
y + 2y'dx + \frac{4y''dx^2}{2} + \frac{8y'''dx^3}{2.3} + \frac{16y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.}, \\
y + 3y'dx + \frac{9y''dx^2}{2} + \frac{27y'''dx^3}{2.3} + \frac{81y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.}, \\
y + 4y'dx + \frac{16y''dx^2}{2} + \frac{64y'''dx^3}{2.3} + \frac{256y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

Si on prend, par des soustractions successives, les différences premières, secondes, troisièmes, etc. de ces valeurs, et qu'on les dénote par dy, d^2y, d^3y, etc., on aura

$$
\begin{array}{l}
dy = y'dx + \frac{y''dx^2}{2} + \frac{y'''dx^3}{2.3} + \frac{y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.} \\
d^2y = \frac{2y''dx^2}{2} + \frac{6y'''dx^3}{2.3} + \frac{14y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.}, \\
d^3y = \frac{6y'''dx^3}{2.3} + \frac{36y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.}, \\
d^4y = \frac{24y^{IV}dx^4}{2.3.4} + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

Supposons que la différence dx devienne infiniment petite, les puissances dx^2, dx^3, etc. deviendront infiniment petites, chacune par rapport à celle qui précède, et les séries qui expriment les valeurs des différences dy, d^2y, d^3y, etc. se trouveront composées de termes infiniment petits, chacun relativement au précédent, de sorte qu'en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur relativement à ceux d'un ordre inférieur, on aura simplement

$$dy = y'dx, \quad d^2y = y''dx^2, \quad d^3y = y'''dx^3, \text{ etc.};$$

et par conséquent

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc.}$$

On voit par là comment la supposition des infiniment petits peut servir à trouver les fonctions dérivées; et on peut en conclure que les expressions différentielles $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. au lieu d'exprimer ce qu'elles paraissent représenter, ne sont à la rigueur que des symboles qui dénotent des fonctions différentes de la fonction primitive y, mais dérivées de celle-ci suivant certaines lois. Voyez dans la nouvelle édition des *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, la leçon dix-huitième, qui contient des remarques importantes sur le passage du fini à l'infiniment petit.

FIN.

NOUVELLE THÉORIE

DE

L'ACTION CAPILLAIRE;

PAR S. D. POISSON,

Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes et de l'Université de France; des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, de Boston, et de différentes villes d'Italie; de l'Université de Wilna; des Sociétés, astronomique de Londres, philomatiques de Paris et de Varsovie, et des Sciences et Arts d'Orléans.

PARIS,

BACHELIER PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1831

NOUVELLE THÉORIE

DE

L'ACTION CAPILLAIRE;

PAR S. D. POISSON,

Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes et de l'Université de France; des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, de Boston, et de différentes villes d'Italie; de l'Université de Wilna; des Sociétés, astronomique de Londres, philomatiques de Paris et de Varsovie, et des Sciences et Arts d'Orléans.

PARIS,

BACHELIER PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1831

IMPRIMERIE DE ALFRED COURCIER,
Rue du Jardinet, n° 12.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉAMBULE DE L'OUVRAGE..... 1

CHAPITRE Ier. Discussion préliminaire..... 9

CHAPITRE II. Équation de la surface capillaire..... 47

CHAPITRE III. Équation relative au contour de la surface capillaire..... 77

CHAPITRE IV. Équilibre d'un ou de plusieurs liquides dans un tube capillaire..... 98

CHAPITRE V. Pression des liquides, modifiée par l'action capillaire..... 149

CHAPITRE VI. Solutions de différens problèmes..... 174

CHAPITRE VII. Notes et Additions..... 264

Préambule de ce chapitre..... *ibid.*

§ Ier. Constitution intime des corps, et particulièrement des fluides; nature des forces moléculaires..... 267

§ II. Conversion des sommes en intégrales..... 277

§ III. Équations générales de l'équilibre des fluides..... 282

§ IV. Dépression du mercure dans le baromètre..... 287

§ V. Expériences sur les mélanges..... 293

§ VI. Phénomène de l'endosmose..... 296

Errata.

Page 9, ligne 10 en remontant, la surface, *lisez* sa surface

18, 12, μ, *lisez* $\mu\omega$

38, 7 en remontant, *supprimez* le signe $\int_0^\infty$ dans le second membre de l'équation

39, 2, $y = \infty$, *lisez* $x = \infty$

47, 13 en remontant, le filet, *lisez* le filet de B

48, 3, n° 15, *lisez* n° 13

79, 11 en remontant, P, *lisez* P_8

96, 8, qui comprend, *lisez* qui comprendrait

9, et qui s'obtient, *lisez* si on pouvait l'obtenir

10, *supprimez* par le même procédé

101, 4 en remontant, *supprimez* il ne changera pas lorsqu'on inclinera le tube (n° 36)

109, 12, $\sqrt{\gamma^2 + t^2}$, *lisez* $\sqrt{\gamma^2 - t^2}$

113, 4, $9^{mm},9519$, *lisez* $0^{mm},9519$

121, 2 en remontant, et à cette, *lisez* et cette

125, 3, négatif, *lisez* positif

135, 12, *remplacez* les exposans 3, 5, 7, etc., de n, par 1, 2, 3, etc.

144, 5 en remontant, $\varpi = -q$, *lisez* $\varpi = -q_1$

152, 10 en remontant, T, T', *lisez* T, T', V

153, 15, z, *lisez* ζ

195, 10, la conche, *lisez* la courbe

255, 4 en remontant, $-\frac{2}{3}h^3$, *lisez* $-\frac{2}{3}h^3 \sin\theta$

270, 4, ses masses, *lisez* leurs masses

NOUVELLE THÉORIE

DE

L'ACTION CAPILLAIRE.

L'élévation de l'eau et l'abaissement du mercure dans un tube de verre d'un très petit diamètre sont des phénomènes très anciennement connus, qui se présentent, au premier aspect, comme des exceptions aux lois de l'Hydrostatique, et dont on a donné pendant long-temps des explications qu'il serait inutile de rappeler. Les théories qui ne sont pas fondées sur le calcul et l'observation doivent maintenant être bannies de la Physique, comme elles le sont de l'Astronomie. Lors même que la véritable cause des phénomènes est connue, il n'y a que l'analyse mathématique qui puisse découvrir leur liaison réciproque, et les déduire les uns des autres, en employant les seules données indispensables de l'expérience. Les effets, si nombreux et si variés, qui se rapportent à l'action capillaire, en offrent l'exemple le plus remarquable; car, sans le secours de l'analyse, ils seraient restés isolés, et l'on ne serait pas parvenu à les prévoir ou à les expliquer tous avec précision, et encore moins à en déterminer la grandeur, au moyen de deux données spéciales empruntées à l'observation, l'une relative à la matière du liquide, et l'autre dépendante de cette matière et de celle du corps dont le contact donne naissance aux différens effets dont il s'agit.

Quoique l'ascension d'un liquide au-dessus de son niveau soit pro-

duite par l'action du tube dans lequel elle a lieu, on sait cependant qu'elle ne dépend pas de son épaisseur, et Jurin a fait voir que, pour un même liquide, l'ascension ou la dépression dans des tubes capillaires formés d'une même matière suit la raison inverse de leurs diamètres intérieurs. Ces deux faits importans étaient constatés par l'expérience, lorsque Clairaut essaya, le premier, de ramener les phénomènes de la capillarité aux lois de l'équilibre des fluides, dont il venait de trouver les équations générales (1). Il considère un canal infiniment étroit, situé dans l'axe du tube, et se prolongeant au-dessous de son extrémité inférieure, pour se relever ensuite en-dehors et aboutir à la surface plane et horizontale du liquide; il montre que l'action du liquide sur la partie inférieure et sur les deux branches ascendantes de ce canal se détruit en partie, et qu'il ne subsiste que l'action du ménisque qui termine le liquide dans l'intérieur du tube; et, selon Clairaut, cette force, jointe à celle qui provient de l'action directe du tube, doit faire équilibre au poids de la partie du canal élevée au-dessus du niveau extérieur. Cette conclusion est exacte; mais il aurait dû ajouter que la seconde force, qu'il regardait comme la principale, était au contraire insensible, et ne conserver, en conséquence, que la seule action du ménisque. En effet, si l'action du tube ne dépend pas de son épaisseur, il en faut conclure qu'elle n'émane que de sa couche intérieure, d'une épaisseur insensible, en sorte que les points du tube qui sont à une distance sensible du liquide n'agissent pas sur ses molécules, ni par conséquent sur les points du canal dont la distance au tube est égale à son demi-diamètre. Faute d'avoir fait cette remarque et de l'avoir étendue à l'action du liquide sur lui-même, Clairaut a seulement ouvert la route, et n'a pas pu déduire de son analyse la loi expérimentale que Jurin avait trouvée. Mais quoique

(1) *Théorie de la figure de la Terre*, première partie, chapitre X.

ces idées nous paraissent aujourd'hui très naturelles, et qu'on trouvât déjà un exemple du calcul de ce genre de forces dans la manière dont Newton avait déterminé l'action des corps sur la lumière, il s'est néanmoins écoulé un long intervalle de temps avant que nous eussions une théorie de l'action capillaire où l'action du tube et celle du liquide fussent envisagées sous ce point de vue.

Dans cette théorie, que Laplace a publiée en 1806 et 1807, il considère l'action des molécules du tube sur celles du liquide et l'action mutuelle des molécules du liquide, comme des forces attractives, décroissantes très rapidement suivant une loi inconnue, depuis le contact jusqu'à une distance insensible, où elles disparaissent entièrement. Ces forces ont lieu en même temps que l'attraction newtonienne qui suit la raison inverse du carré des distances; mais l'effet de celle-ci n'est sensible que dans des masses très grandes, qui peuvent balancer l'action de la terre entière sur le fil-à-plomb placé dans leur voisinage, ou bien encore, quand on l'oppose à une force de torsion très délicate, comme dans l'expérience de Cavendish pour mesurer l'attraction d'un globe de plomb d'une assez petite étendue. Les phénomènes de la capillarité ne dépendent donc pas de l'attraction qui s'étend à de grandes distances, et qu'il sera permis de négliger, sans aucune erreur, pour ne s'occuper que de celle dont la sphère d'activité est supposée tout-à-fait insensible, et qu'on appelle proprement l'*attraction moléculaire*. En partant de cette hypothèse, Laplace obtient l'équation de la surface d'un liquide dans son état d'équilibre, soit en considérant son action normale sur un canal infiniment étroit et prolongé indéfiniment, soit d'après l'action tangentielle qu'il exerce sur chaque molécule superficielle; méthodes qui ne sont pas essentiellement différentes, et dont l'une doit conduire à la différentielle de l'équation donnée par l'autre, ainsi que Laplace l'a fait voir *à priori*. Il regarde l'angle sous lequel la surface intérieure du tube est coupée par celle du liquide, comme ne dépen-

dant uniquement que de la matière du liquide et de celle du tube; en sorte que cet angle est constant et donné, dans chaque cas, pour tous les points du contour de la surface capillaire; le liquide étant supposé homogène, aussi bien que la matière du tube. L'équation qui résulte de cette considération et celle qui appartient à la surface entière sont les deux équations du problème; elles renferment les deux constantes spéciales dont j'ai parlé tout à l'heure; et c'est de ces deux équations que Laplace a déduit l'explication des différens phénomènes observés par les physiciens.

Un ou deux ans avant Laplace, Th. Young s'était déjà occupé de ces questions (1). Des idées ingénieuses l'avaient conduit à reconnaître l'invariabilité de l'angle sous lequel la surface capillaire vient couper celle du tube, et le rapport qui existe entre l'élévation d'un liquide dans un tube d'un très petit diamètre et son adhésion à un disque formé de la même matière que le tube; mais il s'appuyait sur l'identité de la surface du liquide avec celle d'une membrane également tendue en tous ses points; identité qui ne peut être que la conséquence, et non le principe, de la solution du problème. Lorsque le travail de Laplace eut paru, Th. Young éleva contre sa théorie plusieurs objections, parmi lesquelles il n'y en a que deux qui soient importantes : l'une, que Laplace n'a pas eu égard à l'action de la chaleur dans le calcul des forces moléculaires (2), et l'autre, tirée de l'expérience, qui se rapporte au cas de plusieurs liquides superposés dans un même tube (3). J'examinerai celle-ci lorsqu'il sera question, dans cet ouvrage, de l'équilibre de ces liquides; quant à la nécessité de tenir compte de la répulsion calorifique, il ne peut

(1) *Transactions philosophiques*, année 1805.
(2) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire*, page 75.
(3) *Supplément à l'Encyclopédie britannique*, article *Cohésion des liquides*.

rester aucun doute à ce sujet : mais, pour cela, il suffit de prendre pour l'action mutuelle de deux molécules, l'excès de l'attraction de leurs matières pondérables sur la répulsion de leurs quantités de chaleur, et de considérer, en conséquence, la fonction qui l'exprime comme une quantité qui peut changer de signe dans l'étendue de ses valeurs sensibles. Mais Laplace a omis, dans ses calculs, une circonstance physique dont la considération était essentielle : je veux parler de la variation rapide de densité que le liquide éprouve près de sa surface libre et près de la paroi du tube, sans laquelle les phénomènes capillaires n'auraient pas lieu, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer dans mon Mémoire sur l'équilibre des liquides (1).

En effet, dans l'état d'équilibre, chaque couche infiniment mince d'un liquide est comprimée également sur ses deux faces par l'action répulsive des molécules voisines, diminuée de leur force attractive, ou, ce qui est la même chose, on peut la considérer comme appuyée sur la partie du liquide située d'un côté, et comprimée par la partie située du côté opposé; et son degré de condensation est déterminé par la grandeur de la force comprimante. A une distance sensible de la superficie du liquide, cette force provient d'une couche du liquide adjacente à la couche infiniment mince, dont l'épaisseur est complète et partout la même, c'est-à-dire égale au rayon d'activité des molécules fluides; et, pour cette raison, la densité intérieure du liquide est aussi constante, abstraction faite de la petite condensation due à la pesanteur, qui varie avec la distance à la surface supérieure. Mais quand cette distance est moindre que le rayon d'activité moléculaire, l'épaisseur de la couche située au-dessus de celle que l'on considère est aussi plus petite que ce rayon : la force comprimante qui provient de cette couche supérieure décroît alors très rapide-

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome IX, page 76 et suivantes.

ment avec la distance à la surface, et s'évanouit entièrement à la surface même, où la couche infiniment mince n'est plus comprimée que par la pression atmosphérique. Par conséquent, la condensation du liquide décroît de même, suivant une loi inconnue, à mesure que l'on s'approche de sa surface libre, et sa densité est très différente à cette surface et à une profondeur qui excède un tant soit peu le rayon d'activité de ses molécules, ce qui suffit pour qu'elle soit égale à la densité intérieure du liquide. Or, on démontrera, dans le premier chapitre de cet ouvrage, que si l'on négligeait cette variation rapide de la densité dans l'épaisseur de la couche superficielle (1), la surface capillaire demeurerait plane et horizontale, et il n'y aurait ni élévation ni abaissement du liquide. On fera voir de même la nécessité d'avoir égard à la compression variable que le liquide éprouve près de la paroi du tube, et qui s'étend jusqu'à la limite de l'action exercée par ce corps solide.

En ayant donc égard à ces données physiques de la question, je suis parvenu à former, dans les chapitres II et III, l'équation commune à tous les points de la surface de contact de deux liquides superposés et contenus dans un tube quelconque, et l'équation particulière aux points de son contour, ce qui comprend, comme cas particulier, les équations relatives à la surface libre d'un seul liquide. Leur forme est la même que celle des équations de la *Mécanique céleste;* mais les expressions en intégrales définies des deux constantes spéciales qu'elles renferment sont très différentes, de sorte

(1) Cette épaisseur doit être de grandeur finie, mais absolument insensible, d'après l'hypothèse qu'on a faite sur le peu d'étendue de la sphère d'activité moléculaire. Cela est confirmé par une expérience de M. Gay-Lussac. Ayant réduit un corps en poussière très fine, il a trouvé sa pesanteur spécifique sensiblement la même avant et après cette opération; d'où il faut conclure que l'épaisseur de la couche dilatée qui termine chacune des parcelles de poussière, est insensible eu égard à leurs dimensions.

que leurs valeurs numériques le seraient également si, au lieu de les déterminer par l'expérience, on pouvait les calculer directement d'après leurs expressions analytiques, ce qui exigerait que l'on connût les lois des actions du tube sur le liquide et du liquide sur lui-même. On trouvera, dans les chapitres suivans, les applications de ces équations générales à l'équilibre des liquides dans les tubes d'un très petit diamètre et à d'autres questions analogues, et l'on y pourra remarquer l'usage que j'ai fait des tables elliptiques de M. Legendre, pour la solution rigoureuse de problèmes qui n'auraient pu, sans ce secours, être résolus que par approximation.

Depuis que cet ouvrage est écrit, j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Gauss, qui paraît en ce moment sous le titre de *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (1). Pour former les équations de cet équilibre, l'auteur a recours au principe des vitesses virtuelles, qu'il applique à la masse entière du liquide, et non pas, comme dans la *Mécanique analytique*, à un élément différentiel de cette masse. Il trouve, de cette manière, qu'une certaine intégrale sextuple, étendue à toute cette masse, doit être un *minimum*. Dans le cas d'un liquide homogène et incompressible, il réduit d'abord cette quantité à une intégrale quadruple; et en considérant spécialement le cas où les forces appliquées au liquide sont la pesanteur et l'attraction mutuelle de ses molécules, dont la sphère d'activité est insensible, il réduit de nouveau la quantité dont il s'agit, qui est ensuite composée de trois termes, savoir, le produit du poids du liquide et de l'ordonnée verticale de son centre de gravité, l'aire de sa surface libre multipliée par une constante qui ne dépend que de la matière du liquide, et l'aire des parois fixes contre lesquelles il s'appuie, multipliée par une seconde constante dépendante de la matière du liquide

(1) Gottingue, 1830.

et de celle de la partie solide du système. Par les règles connues du calcul des variations, on détermine la surface inconnue du liquide qui rend cette somme un *minimum*, et, comme on sait, on trouve à la fois l'équation générale de cette surface et l'équation particulière de son contour, ce qui est l'avantage caractéristique de la méthode que M. Gauss a suivie. Mais cet illustre géomètre étant parti des mêmes données physiques que Laplace, et n'ayant pas non plus considéré la variation de densité aux extrémités du liquide, qu'il a regardé, au contraire, comme incompressible dans toutes ses parties, les objections qui s'élèvent contre la théorie de Laplace s'appliquent également à la sienne, qui ne diffère de l'autre que par la manière de former les équations d'équilibre. On peut, à cet égard, employer différens moyens; mais, sans craindre de compliquer le calcul et d'en augmenter les difficultés, il importe de ne négliger aucune des circonstances essentielles de la question, parmi lesquelles il faut compter surtout la dilatation du liquide près de sa surface libre et la condensation qui peut être produite par l'attraction du tube.

La conséquence générale que l'on tirera de notre théorie, c'est que les phénomènes de la capillarité sont dus à l'action moléculaire, modifiée, non-seulement par la courbure des surfaces, comme Laplace l'avait dit, mais aussi par l'état particulier des liquides à leurs extrémités.

CHAPITRE PREMIER.

Discussion préliminaire.

(1). La théorie de l'action capillaire se compose de deux parties distinctes: l'une est relative à la surface du liquide contenu dans un tube, l'autre se rapporte au contour de cette surface et à l'action du tube sur le liquide. Nous allons, dans ce premier chapitre, examiner successivement les principes que Laplace a suivis dans le supplément au livre X de la *Mécanique céleste*, pour traiter ces deux parties de la question; nous montrerons les difficultés auxquelles ils sont sujets, et en même temps nous ferons connaître ceux que nous nous proposons d'y substituer, et qui seront la base de la nouvelle théorie qui fait l'objet de cet ouvrage.

Ainsi, nous supposerons que les molécules du liquide sont soumises à une attraction mutuelle qui n'est sensible qu'à des distances insensibles, et que les points matériels du tube exercent une semblable action sur ces molécules. Comme dans la théorie de Laplace, nous ferons d'abord abstraction de la répulsion calorifique; nous n'aurons point égard à la dilatation ou à la compression du liquide près de la surface ou près des parois du tube, c'est-à-dire que nous y regarderons la densité du liquide comme étant la même que dans son intérieur. Enfin, pour calculer les résultantes de l'attraction moléculaire, nous partagerons le volume du liquide et celui du tube en élémens infiniment petits, puis nous exprimerons ces forces par des intégrales définies relatives à ces élémens.

(2). Soit AOB (fig. 1re) la surface du liquide. Par le point quelconque O, menons le plan tangent COD; appelons ω l'élément infiniment petit, commun à cette surface et à ce plan; et sur ω, comme base, élevons dans l'intérieur du liquide un cylindre OE normal et

indéfiniment prolongé. Désignons par $N\omega$ l'action exercée par le liquide sur ce cylindre, suivant sa longueur et de dehors en dedans. On pourra diviser $N\omega$ en deux parties : l'une relative à la portion du liquide terminée par le plan COD et dont le cylindre fait partie, l'autre correspondante au ménisque compris entre ce plan et la surface AOB ; et si l'on désigne la première par $K\omega$, et la seconde par $\mu\omega$, on aura

$$N = K \pm \mu,$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le liquide sera concave ou convexe au point O. La figure suppose que ce soit le premier cas qui ait lieu.

Pour calculer K, soit M un point du cylindre OE, et M′ un point quelconque du liquide compris dans la sphère d'activité de M. Appelons r la distance MM′, s et s' les perpendiculaires abaissées de ces deux points sur le plan COD, et ω' un élément de ce plan, qui sera la base d'un cylindre parallèle à OE et comprenant le point M′. Les élémens de volume qui répondent à M et M′ auront pour expressions ωds et $\omega' ds'$; et si l'on représente par ρ la densité du liquide, et par φr une fonction de r qui n'ait de valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de cette variable, l'action mutuelle de ces deux élémens pourra s'exprimer par le produit

$$\rho^2 \varphi r . \omega\omega' ds ds'.$$

La fonction φr ne changera pas de signe dans toute l'étendue des valeurs de r, puisqu'on a seulement égard à l'attraction des molécules, et qu'on ne tient pas compte de la répulsion due à leur calorique ; et si on la regarde comme positive, la composante de la force précédente, dirigée suivant ME, s'obtiendra en multipliant cette force par le rapport $\frac{s'-s}{r}$ qui est le cosinus de l'angle M′ME.

Représentons par u la projection de r sur le plan COD, et par v l'angle que cette projection fait avec une droite fixe, menée par le point O dans ce même plan. On pourra prendre

$$\omega' = u du dv ;$$

on aura en outre

$$r^2 = u^2 + (s' - s)^2;$$

et la valeur de $K\omega$ s'obtiendra par des intégrations relatives à u, v, s', s. Celle qui répond à l'angle v aura pour limites $v = 0$ et $v = 2\pi$, en désignant par π le rapport de la circonférence au diamètre; elle s'effectuera immédiatement; et si l'on supprime le facteur ω, on aura

$$K = 2\pi\rho^2 \iiint \varphi r \frac{s' - s}{r} u\,du\,ds'\,ds.$$

Soit O′ un point de OE, tel que l'on ait MO = MO′. Par ce point, menons un plan C′O′D′ parallèle à COD. Il est évident que l'action du liquide compris entre ces deux plans, sur le point M, se réduira à zéro, à cause que l'on n'a point égard à la variation rapide de sa densité dans la couche qui le termine. Si donc on fait

$$s' = x + 2s, \quad ds' = dx,$$

on pourra faire commencer à zéro l'intégrale relative à la nouvelle variable x, aussi bien que les intégrales relatives à u et à s. On aura d'ailleurs

$$r^2 = u^2 + (x + s)^2;$$

en sorte que pour toute valeur sensible de l'une des variables positives u, x, s, la variable r aura aussi une valeur sensible, et φr sera nulle; on pourra donc étendre ces intégrales jusqu'à l'infini, et écrire

$$K = 2\pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi r \frac{s + x}{r} u\,du\,dx\,ds.$$

Soit maintenant

$$s = uz, \quad x = uy, \quad ds = u\,dz, \quad dx = u\,dy;$$

les limites relatives aux nouvelles variables z et y seront encore zéro et l'infini, et nous aurons

$$K = 2\pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi r \frac{(y + z)\,u^4}{r}\,du\,dy\,dz,$$

$$r^2 = u^2[1 + (y + z)^2].$$

Si donc nous substituons r à la variable u, et que nous prenions, en conséquence,

$$u = \frac{r}{\sqrt{1+(y+z)^2}}, \quad du = \frac{dr}{\sqrt{1+(y+z)^2}},$$

les limites relatives à r seront aussi $r = 0$ et $r = \infty$, et il en résultera

$$K = 2\pi\rho^3 q \int_0^\infty r^3 \varphi r dr,$$

en faisant, pour abréger,

$$q = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(y+z)\,dydz}{[1+(y+z)^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

Mais on a

$$\int_0^\infty \frac{(y+z)\,dz}{[1+(y+z)^2]^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$q = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3};$$

on aura donc enfin

$$K = \frac{2\pi\rho^3}{3}\int_0^\infty r^3 \varphi r dr. \qquad (1)$$

(3). Calculons de même la valeur de μ. Pour cela, je partage le ménisque en cylindres perpendiculaires au plan tangent COD, qui aient pour bases les élémens infiniment petits de ce plan, et se terminent à la surface AOB. Soit M'O' (fig. 2) l'un de ces cylindres. Désignons par ω' sa base, et par ζ sa hauteur; en sorte que $\omega'\zeta$ soit son volume. Pour qu'il agisse sur le cylindre OE, il faudra que la distance OM' soit très petite, et, par conséquent, que l'ordonnée ζ de la surface soit très petite du second ordre; on pourra alors, sans erreur sensible, regarder tous les points de M'O' comme exerçant des actions égales et parallèles sur le point quelconque M de OE, et prendre

$$\rho^3 \varphi r . \omega' \zeta \alpha ds,$$

pour l'action totale de M'O', sur l'élément αds qui répond à ce point; les distances MO et MM' étant représentées par s et r, comme précé-

demment. Cette force étant dirigée de M vers M′, sa composante suivant ME sera négative, et s'obtiendra en multipliant cette force par $-\frac{s}{r}$. Si l'on appelle u la distance OM′, et v l'angle qu'elle fait avec une droite fixe, menée par le point O dans le plan tangent, on aura

$$r^2 = s^2 + u^2, \quad \omega' = u\,du\,dv,$$

et l'on en conclura

$$\mu = -\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varphi r \frac{s\zeta u}{r}\, du\,ds\,dv.$$

Soient η et η' les deux coordonnées de M′ relatives à des axes rectangulaires, menés par le point O dans le plan COD, de sorte qu'on ait

$$\eta = u \sin v, \qquad \eta' = u \cos v.$$

La valeur de ζ sera donnée en fonction de η et η' par l'équation de la surface du liquide; on pourra la développer en série très convergente, suivant les puissances et les produits de η et η'; et comme ζ, $\frac{d\zeta}{d\eta}$, $\frac{d\zeta}{d\eta'}$, s'évanouissent en même temps que ces deux variables, on aura

$$\zeta = Q\eta^2 + Q'\eta'^2 + Q''\eta\eta',$$

en négligeant les termes du troisième ordre, et désignant par Q, Q′, Q″, des coefficiens indépendans de η et η'. Je substitue ces valeurs de ζ, η, η', dans celle de μ, et j'effectue l'intégration relative à v; il vient

$$\mu = -H(Q + Q'),$$

en faisant, pour abréger,

$$H = \pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi r \frac{su^3}{r}\, du\,ds.$$

On réduira cette intégrale double à une intégrale simple, en faisant d'abord

$$s = ux, \qquad ds = u\,dx,$$

et ensuite

$$u = \frac{r}{\sqrt{1+x^2}}, \quad du = \frac{dr}{\sqrt{1+x^2}};$$

ce qui donne

$$H = \pi\rho^2 \int_0^\infty r^4 \varphi r dr \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^3},$$

c'est-à-dire

$$H = \frac{1}{4}\pi\rho^2 \int_0^\infty r^4 \varphi r dr. \qquad (2)$$

Prenons pour axes des coordonnées n et n' les tangentes aux sections normales de plus grande et de moindre courbure, de la surface du liquide au point O. En désignant par λ et λ' les rayons de ces deux courbures principales, nous aurons

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d^2\zeta}{dn^2} = 2Q, \quad \frac{1}{\lambda'} = \frac{d^2\zeta}{dn'^2} = 2Q';$$

au moyen de quoi la valeur de μ sera

$$\mu = -\frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right).$$

(4). Les quantités K et μ étant ainsi déterminées, et la surface du liquide ayant été supposée concave au point O, on aura

$$N = K - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right); \qquad (3)$$

formule dans laquelle on regardera λ et λ' comme des quantités positives. Pour l'étendre au cas de la surface convexe, il suffira d'y changer les signes de λ et λ'; et, généralement, on y considérera chacune de ces deux quantités comme positive ou comme négative, selon que la ligne de courbure à laquelle elle répond tournera sa concavité en-dehors ou en-dedans du liquide.

Les expressions des coefficiens K et H que cette formule renferme s'accordent avec celles que Laplace a trouvées, sous une autre forme, pour les mêmes quantités. En effet, on suppose, dans la *Mécanique céleste*,

$$\int \varphi r dr = c - \Pi r, \quad \int r \Pi r dr = c' - \psi r;$$

les intégrales commençant avec r, c et c' étant leurs valeurs quand r a

une grandeur sensible, Πr et $\downarrow r$ désignant des fonctions qui s'évanouissent pour toute valeur sensible de r. D'après cela, on a

$$K = 2\pi\rho^2\int_0^h \downarrow r dr, \quad H = 2\pi\rho^2\int_0^h r\downarrow r dr,$$

en rétablissant la densité ρ que Laplace a prise pour unité, et la limite h étant une quantité de grandeur sensible, qu'on pourra, si l'on veut, remplacer par l'infini. Or, si l'on intègre par partie, il vient

$$K = 2\pi\rho^2 h\downarrow h - 2\pi\rho^2\int_0^h r\frac{d\downarrow r}{dr}dr = 2\pi\rho^2\int_0^h r^2\Pi r dr,$$

$$H = \pi\rho^2 h^2\downarrow h - \pi\rho^2\int_0^h r^2\frac{d\downarrow r}{dr}dr = \pi\rho^2\int_0^h r^3\Pi r dr;$$

intégrant de nouveau, on a

$$K = \frac{2\pi\rho^2}{3}h^3\Pi h - \frac{2\pi\rho^2}{3}\int_0^h r^3\frac{d\Pi r}{dr}dr = \frac{2\pi\rho^2}{3}\int_0^h r^3\varphi r dr,$$

$$H = \frac{\pi\rho^2}{4}h^4\Pi h - \frac{\pi\rho^2}{4}\int_0^h r^4\frac{d\Pi r}{dr}dr = \frac{\pi\rho^2}{4}\int_0^h r^4\varphi r dr;$$

ce qui coïncide avec les formules (1) et (2), en prenant $h = \infty$.

(5). Lorsque la surface du liquide sera connue, et que les valeurs des constantes K et H, dépendantes de sa nature, seront données, la formule (3) fera connaître l'action qu'il exerce sur un filet cylindrique, normal à cette surface au point où il la rencontre. Si, par exemple, la surface du liquide était celle de l'aire *minima*, on aurait

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 0,$$

et l'action dont il s'agit serait constante et la même que dans le cas d'une surface plane.

Réciproquement, on conclura de cette expression de N l'équation de la surface libre d'un liquide homogène soumis à l'attraction mutuelle de ses molécules et à d'autres forces données, telles que la pesanteur. En effet, l'action de ce liquide sur tous les points sensiblement éloignés de la surface étant égale en tous sens et se détruisant

par conséquent, $N\omega$ exprimera encore cette action sur le filet OE (fig. 3), normal au point quelconque O, lors même qu'il cessera d'être droit à une profondeur sensible, pourvu que la section perpendiculaire à sa longueur ne varie pas, et soit toujours égale à ω. Supposons donc que ce filet curviligne vienne aboutir en un point fixe L de la surface du liquide, et qu'il soit aussi normal en ce point. Désignons par l et l' les valeurs de λ et λ' relatives à ce point L. Les actions du liquide sur le filet OEL seront $N\omega$ au point O, et $N'\omega$ au point L, en appelant N' ce que devient N quand on y met l et l', au lieu de λ et λ'. Si donc la pression extérieure est nulle ou la même aux deux points O et L, et si l'on suppose que la pesanteur soit la seule force donnée qui agisse sur le liquide, il faudra, pour l'équilibre du filet OEL, que l'excès de $N'\omega$ sur $N\omega$ soit balancé par la différence des actions exercées par la pesanteur sur les deux branches de ce filet, suivant leurs longueurs. En appelant donc Δ cette différence, il faudra qu'on ait

$$N'\omega - N\omega = \Delta.$$

Or, si l'on représente par g la pesanteur, par z l'ordonnée verticale d'un point quelconque du filet, et par ds l'élément de sa longueur, $g\rho\omega ds$ sera le poids de la masse correspondante à cet élément, et $g\rho\omega dz$ sa composante suivant la longueur du filet; d'où l'on conclura

$$\Delta = g\rho\omega z,$$

en prenant le point L pour origine des coordonnées, et comptant les z positives au-dessus du plan horizontal passant par ce point; et si l'on substitue cette valeur de Δ et celles de N et N' dans l'équation d'équilibre, il en résultera

$$\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{\bar{l}}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)+g\rho z=0, \qquad (4)$$

pour l'équation de la surface du liquide qu'il s'agissait d'obtenir.

(6). Les points O et L peuvent être des points de la surface du liquide situés en-dehors ou en-dedans du tube. Le raisonnement qui nous a conduit à l'équation (4) subsistera toujours, pourvu que le

filet OEL ne soit pas interrompu par le tube, et il suffira pour cela de le faire passer au-dessous de l'extrémité inférieure du tube lorsque l'un des deux points sera en-dedans et l'autre en-dehors. Si le point L est en-dehors, à une distance du tube assez grande pour que la surface du liquide y soit sensiblement plane et horizontale, on aura

$$l = \infty, \quad l' = \infty,$$

et l'équation précédente fera connaître l'élévation ou l'abaissement de chaque point de la surface capillaire, au-dessus ou au-dessous du niveau extérieur du liquide.

Cela étant, supposons que le tube soit formé d'une matière homogène, et que sa surface intérieure soit celle d'un cylindre à base circulaire et qui ait son axe vertical; il est évident que, dans ce cas, la surface capillaire ne pourra être qu'une surface de révolution, dont l'axe de figure sera celui du tube. Au point situé sur cet axe, les deux rayons λ et λ' seront égaux et de même signe. En désignant par b leur grandeur absolue, on aura donc

$$\lambda = \lambda' = \pm b,$$

selon que le liquide sera concave ou convexe; et si l'on représente par h la valeur de z relative au point dont il s'agit, et qu'on supprime les termes de l'équation (4) qui dépendent de l et l', on aura

$$g\rho h \mp \frac{H}{b} = 0, \qquad (5)$$

pour déterminer l'élévation ou l'abaissement du centre de la surface capillaire.

En ayant égard à la formule (2), on tire de là

$$h = \pm \frac{\pi\rho}{4gb} \int_0^\infty r^4 \varphi r dr;$$

et comme φr est constamment positive, à cause que l'on a seulement égard à l'attraction des molécules, il s'ensuit que l'ordonnée h sera positive ou négative, et, par conséquent, que le liquide s'élèvera ou s'abaissera dans le tube, selon qu'il y sera terminé par une surface concave ou convexe; ce qui serait, en effet, conforme à l'expérience. Mais, dans la supposition de φr positive pour toutes

les valeurs de r, non-seulement H, mais aussi K, serait positif; or, on va voir que la force K doit au contraire être négative, pour faire équilibre à la pression extérieure; ce qui suffira pour rendre inadmissible l'hypothèse de φr constamment positive.

(7). Par un point O_1 (fig. 4) appartenant au filet normal OE, et situé à une distance quelconque du point O, menons un plan $C_1O_1D_1$ parallèle au plan tangent COD. L'action du liquide compris entre ces deux plans, sur la partie OO_1 de OE, sera évidemment nulle, puisqu'on y suppose la densité constante. Nous appellerons $K_1\omega$ l'action sur OO_1 de l'autre portion du liquide terminée par le plan $C_1O_1D_1$, laquelle action sera dirigée suivant O_1E, et s'ajoutera à l'action du ménisque qu'on a désignée précédemment par μ. Celle de la pesanteur, ou le poids de OO_1 décomposé suivant sa longueur, aura $g\rho\alpha\omega$ pour valeur, en appelant α la perpendiculaire abaissée de O sur le plan horizontal passant par O_1, ou la différence de niveau de ces deux points. Enfin, en appelant Π la pression extérieure rapportée à l'unité de surface, qui sera, si l'on veut, la pression atmosphérique, il y aura encore la force $\Pi\omega$ qui agira sur OO_1 dans le sens des forces précédentes. Pour l'équilibre de cette partie du filet OE, il faudra donc que la somme de toutes ces forces soit égale à zéro, ou qu'on ait

$$K_1 + \mu + g\rho\alpha + \Pi = 0, \qquad (6)$$

en supprimant le facteur commun ω.

Observons d'ailleurs qu'on a $K_1 = K$. En effet, soit M un point appartenant à OO_1, M_1 un point situé de l'autre côté du plan $C_1O_1D_1$, s_1 et x leurs distances à ce plan, r_1 la distance MM_1, u sa projection sur ce même plan; nous aurons

$$r_1^2 = u^2 + (x + s_1)^2.$$

Le cosinus de l'angle EMM_1 sera $\frac{x+s_1}{r_1}$; le volume d'un anneau circulaire dont tous les points agissent également sur le point M, aura pour expression $2\pi u du dx$, et celui de l'élément de OO_1 qui répond à M, étant ωds_1, on en conclura, sans difficulté,

$$K_1 = 2\pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi r_1 \frac{x+s_1}{r_1} u du dx ds_1,$$

en supposant que OO_1 ait une grandeur sensible, ou du moins plus grande que le rayon d'activité moléculaire, ce qui a permis d'étendre jusqu'à l'infini l'intégrale relative à s_1. Or, en y employant les lettres s et r, au lieu de s_1 et r_1, cette expression coïncide avec l'une de celles que l'on a trouvées pour K dans le n° 2.

Mettant donc K à la place de K_1, et pour μ sa valeur dans l'équation d'équilibre de OO_1, on aura

$$K = -\Pi - g\rho a + \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right);$$

ce qui montre que K sera généralement une quantité négative, dépendante principalement de la pression extérieure et de l'enfoncement du point O_1, auquel elle répond. Si la surface du liquide est plane, et que le point O_1 n'en soit éloigné que d'une distance insensible, K sera simplement égal et contraire à la pression Π, et nul quand le liquide sera placé dans le vide.

D'après la manière dont Laplace a formé les équations (4) et (5), il n'a pas eu besoin de considérer la quantité K qui n'y est pas comprise, ni de s'occuper de sa relation avec la pression extérieure; mais, suivant ses principes, cette quantité serait positive et extrêmement grande par rapport à H, ainsi qu'il le dit lui-même en plusieurs endroits, et comme cela résulterait effectivement des formules (1) et (2). Pour que l'intégrale représentée par K puisse être négative, et que cependant l'intégrale que H représente reste positive, conformément à l'expérience, il est indispensable d'avoir égard à l'attraction des molécules et à leur répulsion calorifique; on regardera alors, dans les formules (1) et (2), la quantité $\rho^2\varphi r$ comme exprimant l'excès de la force attractive sur la force répulsive, et φr comme étant positive à toutes les distances r où la première force l'emporte sur la seconde, et négative à toutes les distances où c'est la seconde qui surpasse la première (*); mais nous allons faire voir que cette considération serait encore insuffisante, et que dans la théorie

(*) Nous devons dire que cette modification à sa théorie a été indiquée par l'auteur dans une note qui fait partie du *Bulletin de la Société Philomatique*, année 1819, page 122.

de Laplace, ainsi modifiée, la quantité H, d'où dépend l'élévation ou l'abaissement du liquide, n'en devrait pas moins être nulle ou insensible.

(8). Supposons que le filet OE, normal à la surface du liquide, ne soit plus cylindrique, et que l'aire de la section perpendiculaire à sa longueur varie d'un point à un autre, quoiqu'elle soit toujours infiniment petite. La distance OM étant insensible et représentée par s, et ω désignant toujours l'élément de la surface du liquide au point O, on pourra représenter l'aire de la section au point M par $\omega(1+ks)$, en négligeant les puissances de s supérieures à la première, et désignant par k un coefficient indépendant de cette variable. Si nous regardons aussi la longueur de OO_1 comme insensible, l'expression $\omega(1+ks)$ aura lieu dans toute cette longueur, et nous pourrons partager le filet OO_1 en deux autres, l'un ayant une section constante et égale à ω, et l'autre une section variable et exprimée par ωks. Soient $U\omega k$ et $V\omega k$ les actions normales à la surface du liquide, et dirigées de dehors en-dedans, qui seront exercées sur la seconde partie de OO_1, par le liquide que termine le plan $C_1O_1D_1$ et par le liquide compris entre ce plan et le plan tangent COD. Observons que l'action du ménisque renfermé entre COD et AOB, sur cette partie de OO_1, est du même ordre que les quantités qu'on a négligées en calculant l'action $\mu\omega$ de ce ménisque sur la partie cylindrique de OO_1, en sorte que $\mu\omega$ exprimera encore l'action du ménisque sur le filet non cylindrique. Le poids de OO_1 n'aura pas non plus changé sensiblement, et la pression extérieure qui a lieu à son extrémité O, sera toujours $\Pi\omega$. Pour l'équilibre de OO_1, il faudra donc qu'on ait

$$K_1 + \mu + \rho g\alpha + \Pi + Uk + Vk = 0;$$

K_1 et $\rho g\alpha$ étant les mêmes quantités que dans le numéro précédent. Or, l'équilibre devant exister, soit qu'il s'agisse d'un filet cylindrique, ou soit que l'on considère un filet dont la section varie, il est nécessaire que cette équation ait lieu en même temps que l'équation (6), qui se rapportait au filet cylindrique. En retranchant l'une de l'autre, et supprimant le facteur commun k, on aura donc

$$U + V = 0.$$

Si l'on désigne par s_1 la distance MO_1 et par l la longueur de OO_1, et que l'on conserve toutes les autres notations du numéro précédent, on aura $s = l - s_1$, et l'expression de U sera

$$U = 2\pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi r_1 \frac{(x+s_1)(l-s_1)}{r_1} \, u\,du\,dx\,ds_1 ;$$

r_1 étant toujours donné par l'équation

$$r_1^2 = u^2 + (x+s_1)^2 .$$

Soit aussi s' la distance d'un point quelconque du liquide au plan COD, r' sa distance au point M, et u la projection de r' sur ce plan, en sorte qu'on ait

$$r'^2 = u^2 + (s' - s)^2 , \qquad (2)$$

et que le cosinus de l'angle que fait r' avec ME ait pour valeur $\frac{s'-s}{r'}$; nous aurons

$$V = 2\pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l \varphi r' \frac{(s'-s)s}{r'} \, u\,du\,ds\,ds' .$$

Ici l'on ne peut pas étendre jusqu'à l'infini les intégrales relatives à s et s', lors même que l aurait une grandeur sensible, parce que r' n'a pas une valeur sensible pour toute valeur semblable de s' ou de s, mais seulement pour une pareille valeur de leur différence.

En ayant égard à ce que K_1 représente, la valeur de U pourra s'écrire ainsi :

$$U = lK_1 - 2\pi\rho^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi r_1 \frac{(x+s_1)s_1}{r_1} \, u\,du\,dx\,ds_1 .$$

Je fais d'abord

$$s_1 = uy , \quad x = uz , \quad ds_1 = udy , \quad dx = udz ,$$

et ensuite

$$u = \frac{r_1}{\sqrt{1+(y+z)^2}} , \qquad du = \frac{dr_1}{\sqrt{1+(y+z)^2}} ;$$

il en résultera

$$U = lK_1 - 2\pi\rho^2 q \int_0^\infty r_1^4 \varphi r_1 dr_1 ,$$

en faisant, pour abréger,

$$q=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(y+z)\,y\,dy\,dz}{[1+(y+z)^2]^3}.$$

A cause de

$$\int_0^\infty \frac{(y+z)\,dz}{[1+(y+z)^2]^3}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+y^2)^2},$$

nous aurons

$$q=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(1+y^2)^2}=\frac{1}{8};$$

et d'après la formule (2), la valeur précédente de U deviendra

$$U=lK_1-H.$$

L'intégrale triple que V représente se réduit également à des intégrales simples; mais cette transformation exige une attention particulière, et nous allons l'effectuer en détail dans le numéro suivant.

(9). On a identiquement

$$s=\frac{1}{2}(s+s')+\frac{1}{2}(s-s');$$

d'où il résulte

$$2\int_0^l\int_0^l \varphi r'\frac{(s'-s)s}{r'}\,ds\,ds'=\int_0^l\int_0^l \varphi r'\frac{s'^2-s^2}{r'}\,ds\,ds'-\int_0^l\int_0^l \varphi r'\frac{(s'-s)^2}{r'}\,ds\,ds';$$

et la première de ces deux intégrales s'évanouit, comme étant composée d'élémens qui sont deux à deux égaux et de signes contraires.

Je désigne par v une variable positive, et je fais successivement

$$s'-s=v, \qquad s-s'=v,$$

et dans les deux cas

$$r'^2=u^2+v^2.$$

En partageant la dernière intégrale en deux parties, dont l'une réponde aux valeurs de s' plus grandes que s, et l'autre aux valeurs de s plus grandes que s', nous aurons

$$2\int_0^l\int_0^l \varphi r'\frac{(s'-s)s}{r'}\,ds\,ds'=\int_0^l\left(\int_0^{l-s}\varphi r'\frac{v^2}{r'}\,dv\right)ds=\int_0^l\left(\int_0^{l-s'}\varphi r'\frac{v^2}{r'}\,dv\right)ds',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\int_0^l\int_0^l \varphi r' \frac{(s'-s)s}{r'}\,dsds' = -\int_0^l\left(\int_0^{l-s}\varphi r'\frac{v^2}{r'}\,dv\right)ds.$$

Soit maintenant

$$\int\varphi r'dr' = c - \Phi r';$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse avec r', c étant une constante qui représente ce que cette intégrale devient pour une valeur sensible de r', et $\Phi r'$ une fonction qui devient insensible pour toute valeur sensible de cette variable; on aura

$$\varphi r' = -\frac{d\Phi r'}{dr'^2}, \qquad \varphi r'\frac{v}{r'} = -\frac{d\Phi r'}{dv},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^l\int_0^l \varphi r' \frac{(s'-s)s}{r'}\,dsds' = \int_0^l\left(\int_0^{l-s}\frac{d\Phi r'}{dv}\,vdv\right)ds$$
$$= \int_0^l (l-s)\Phi r ds - \int_0^l\left(\int_0^{l-s}\Phi r' dv\right)ds,$$

en désignant par r la valeur de r' qui répond à $v = l - s$, en sorte qu'on ait

$$r^2 = u^2 + (l-s)^2.$$

Au moyen de cette transformation, l'expression de V devient d'abord

$$V = 2\pi\rho^2\int_0^l\left(\int_0^\infty r\Phi r\frac{u}{r}\,du\right)(l-s)\,ds - 2\pi\rho^2\int_0^l\left[\int_0^{l-s}\left(\int_0^\infty r'\Phi r'\frac{u}{r'}\,du\right)dv\right]ds.$$

Soit encore

$$\int r'\Phi r'dr' = b - \Phi' r'; \qquad \int\Phi' r'dr' = a - \Phi'' r';$$

les intégrales commençant avec r', b et a désignant leurs valeurs relatives à $r' = \infty$, $\Phi' r'$ et $\Phi'' r'$ étant des fonctions qui s'évanouissent pour toute valeur de r' plus grande que le rayon d'activité moléculaire; nous aurons

$$\int_0^\infty r\Phi r\frac{u}{r}\,du = \Phi'(l-s), \qquad \int_0^\infty r'\Phi r'\frac{u}{r'}\,du = \Phi' v,$$

et ensuite

$$\int_0^{l-s}\Phi' v\,dv = a - \Phi''(l-s).$$

Il en résultera donc

$$V = 2\pi\rho^2\left[\int_0^l (l-s)\,\Phi'(l-s)\,ds + \int_0^l \Phi''(l-s)\,ds - al\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$V = 2\pi\rho^2\left(\int_0^l s\Phi' s\,ds + \int_0^l \Phi'' s\,ds - al\right),$$

en mettant $l-s$ et $-ds$, au lieu de s et ds. En intégrant par partie, et observant que

$$\frac{d\Phi^n s}{ds} = -\Phi' s,$$

il vient

$$\int_0^l \Phi'' s\,ds = l\Phi' l + \int_0^l s\Phi' s\,ds.$$

Si l'on suppose l plus grand que le rayon d'activité moléculaire, il faudra supprimer le terme compris hors du signe $\int$, et la valeur précédente de V se réduira à

$$V = 2\pi\rho^2\left(2\int_0^l s\Phi' s\,ds - al\right).$$

J'intègre encore deux fois de suite par partie, et, à cause de

$$\frac{d\Phi' s}{ds} = -s\Phi s, \quad \frac{d\Phi s}{ds} = -\varphi s, \quad \Phi' l = 0, \quad \Phi l = 0,$$

on trouve

$$2\int_0^l s\Phi' s\,ds = \frac{1}{4}\int_0^l s^4\varphi s\,ds = \frac{1}{4}\int_0^\infty r^4\varphi r\,dr,$$

en employant la lettre r au lieu de s sous le signe $\int$, et étendant l'intégrale jusqu'à $r = \infty$, ce qui est permis, puisque φr est insensible à la limite $r = l$ et au-delà. On trouvera de même

$$a = \int_0^\infty \Phi' v\,dv = \frac{1}{3}\int_0^\infty r^3\varphi r\,dr;$$

on aura donc

$$V = \frac{1}{2}\pi\rho^2\int_0^\infty r^4\varphi r\,dr - \frac{2\pi}{3}\rho^2 l\int_0^\infty r^3\varphi r\,dr;$$

expression qui est la même chose que

$$V = 2H - lK,$$

en vertu des formules (1) et (2).

(10). Je substitue cette valeur de V et celle de U dans l'équation $U + V = 0$; en observant que $K = K_1$, elle se réduit à $H = 0$: ce coefficient H serait donc nul, ou de l'ordre des quantités tout-à-fait insensibles qu'on a négligées dans les calculs précédens; ce qu'il s'agissait de démontrer. C'est aussi ce que j'avais déjà prouvé d'une manière différente dans le Mémoire cité au commencement de cet ouvrage, où j'exprimais les actions des différentes parties du liquide par des sommes Σ non réduites à des intégrales. Il s'ensuivrait que la surface d'un liquide contenu dans un tube capillaire resterait horizontale, et que le liquide ne s'élèverait ni ne s'abaisserait au-dessus ou au-dessous de son niveau extérieur; mais ce résultat tient à ce que nous n'avons pas eu égard à la dilatation du liquide qui a lieu près de sa surface; et quoique la loi de sa densité dans l'épaisseur de la couche superficielle dépende de celle de l'action moléculaire, et ne puisse pas être déterminée, nous ferons voir néanmoins, dans la suite de cet ouvrage, que d'après cette variation rapide de densité, l'action du liquide sur le filet OO_1 ne diffère pas sensiblement, soit qu'on le suppose cylindrique ou qu'il ne le soit pas. L'équation d'équilibre de OO_1 est identiquement la même dans les deux cas, et ne peut plus servir qu'à déterminer la valeur de K_1.

Il n'est pas inutile de remarquer que la valeur de V dont nous avons fait usage, se déduit de celle de U que l'on obtient, comme on l'a vu, beaucoup plus simplement. En effet, puisqu'on ne tient pas compte de la variation de densité du liquide, ces valeurs sont les mêmes que si OO_1 était pris dans son intérieur, et que le liquide s'étendît indéfiniment au-delà de la surface AOB. Dans cette hypothèse, désignons par F l'action du liquide terminé par le plan tangent COD sur le filet normal et extérieur OO_1, par F_1 l'action exercée en sens contraire sur ce filet par le liquide, également indéfini, que termine le plan $C_1O_1D_1$, et par $Vk\omega$, comme précédemment, l'action du liquide compris entre ces deux plans, sur ce même filet OO_1 et dans le même sens que F_1. Faisons abstraction de la pesanteur, ou, autrement dit, supposons OO_1

horizontal; pour l'équilibre de cette partie intérieure du liquide, il faudra qu'on ait

$$F_1 + Vk\omega = F.$$

D'après ce qu'on a vu précédemment (n° 8), et à cause de $K_1 = K$, la valeur complète de F_1 sera

$$F_1 = K\omega + (lK - H)k\omega.$$

Si l'on appelle ω_1 la section de OO_1 qui répond au point O_1, il est évident que la valeur de F se déduira de celle de F_1, en y mettant ω_1 et $-k$ au lieu de ω et k, en sorte que l'on aura

$$F = K\omega_1 - (lK - H)k\omega_1.$$

Je substitue ces deux valeurs dans l'équation précédente; il en résulte

$$Vk\omega = (H - lK)k(\omega_1 + \omega) + K(\omega_1 - \omega);$$

et, à cause de $\omega_1 = \omega(1 + lk)$, on aura

$$V = 2H - lK,$$

en négligeant l^2K et lH; quantités qui dépendent, d'après les formules (1) et (2), d'un même nombre de facteurs de grandeur insensible. Ce résultat servirait, au besoin, à confirmer l'analyse du numéro précédent, qui nous a conduit à la même valeur de V.

(11). Non-seulement il faut avoir égard à la variation rapide de densité des liquides près de leurs surfaces, pour expliquer les phénomènes capillaires, sans laquelle ils n'auraient pas lieu, mais, quelque peu compressible que l'on suppose un liquide, il faudra encore tenir compte, dans le calcul des pressions intérieures, des très petites condensations qu'il éprouve en vertu de son poids et de la pression extérieure, et aussi des variations de chaleur dont ces condensations sont accompagnées, à température égale.

Soit, en effet, M un point situé dans l'intérieur d'un liquide pesant. Par ce point, menons un plan qui divise le liquide en deux parties, que nous appellerons A et B; élevons dans B un cylindre C perpendiculaire à ce plan, dont la base comprenne le point M et soit représentée par ω; prenons les dimensions de ω, non pas infiniment petites, mais seulement très petites par rapport au rayon

d'activité des molécules : si nous appelons ωp l'action exercée par A sur C suivant la direction de ce cylindre, le coefficient p sera la pression normale de A sur B, rapportée à l'unité de surface et relative au point M, ou ce qu'on appelle ordinairement *la pression intérieure*, laquelle est la même en tous sens autour de chaque point d'un fluide quelconque en équilibre.

Supposons que le plan mené par M soit horizontal, et que le cylindre vertical C s'élève jusqu'à la surface libre du liquide, qui sera aussi plane et horizontale. Soit P le poids de C, et $\Pi\omega$ la pression extérieure qui a lieu à son extrémité. Pour l'équilibre de C, il faudra qu'on ait

$$p\omega = \mathrm{P} + \Pi\omega ;$$

et si le liquide est homogène, et que l'on désigne par ρ sa densité, par g la gravité, par z la hauteur de C, en sorte qu'on ait $\mathrm{P} = \rho g z\omega$, il en résultera

$$p = \rho g z + \Pi ;$$

ce qui montre que p variera avec la profondeur z de M et la grandeur de Π. Or, dans un liquide homogène, la force provenant des actions moléculaires que p représente ne peut varier qu'à raison de la condensation du liquide et de la quantité de chaleur de ses molécules; quoique ces deux élémens soient très peu différens dans toute la hauteur du liquide et pour des valeurs très inégales de Π, si la température est supposée constante (*), il faudra donc néanmoins avoir égard à leurs variations dans le calcul de p.

(12). Pour mieux connaître la nature de cette quantité p, soit ϖ le

(*) La température d'un corps est l'effet de la quantité de chaleur qu'il communique ou qu'il enlève à un autre corps, appelé *thermomètre*, jusqu'à ce que celui-ci ait cessé de se dilater ou de se contracter. Pour un même thermomètre et pour deux parties différentes d'un corps homogène, cette quantité de chaleur dépendra de la chaleur propre de chacune des molécules et du nombre de celles qui seront contenues sous un volume donné. A température égale, la chaleur propre des molécules variera donc avec ce nombre ou avec le degré de condensation d'un corps homogène, et ne sera pas exactement la même, par exemple, dans toute la hauteur d'un liquide soumis à la pesanteur.

volume d'une portion du liquide comprenant le point M, et dont les dimensions soient insensibles, mais qui renferme néanmoins un nombre immense de molécules. En représentant ce nombre par n, et faisant

$$\frac{n}{8} = \epsilon^3,$$

ϵ sera ce que j'ai appelé, dans différens Mémoires, l'intervalle moyen des molécules autour du point M. Le produit $p\omega$ exprimant la somme des actions de toutes les molécules de A sur toutes celles de C, décomposées suivant la longueur de ce cylindre, il est évident que, toutes choses d'ailleurs égales, la valeur de p variera avec ϵ. Si ϵ était infiniment petit, la somme dont il s'agit s'obtiendrait par des intégrations, et la valeur de p serait donnée par une intégrale quadruple, facilement réductible à une intégrale simple. Mais ϵ ayant une valeur finie et déterminée, cette intégrale ne représentera qu'une partie de la valeur de p, et il y faudra ajouter une autre partie dépendante de la grandeur de ϵ, pour avoir la valeur complète de p. Désignons par ϖ et Δ l'intégrale et la correction qu'on y doit faire, en sorte qu'on ait exactement

$$p = \varpi + \Delta.$$

Quoique ϵ soit extrêmement petit et tout-à-fait insensible, même à l'égard du rayon d'activité des molécules, cependant je dis qu'on ne pourra pas négliger Δ par rapport à ϖ, et que le premier terme de la valeur de p ne suffirait pas pour satisfaire aux conditions du numéro précédent.

En effet, soit r la distance d'un point m' de A à un point m de C. Désignons par dv et dv' les élémens de volume qui répondent à ces deux points, et par $frdvdv'$ l'action mutuelle des quantités de matière et de chaleur contenues dans ces deux élémens; en sorte que fr soit la mesure de l'action moléculaire à la distance r et rapportée aux unités de volume. Nous regarderons cette force comme positive ou comme négative, selon qu'elle sera répulsive ou attractive. En désignant par s et s' les perpendiculaires abaissées de m et m' sur le plan qui termine A, la force $frdvdv'$ appliquée au point m de C, perpendiculaire à ce plan et dirigée du dedans au dehors

de A, ou tendante à augmenter s, aura pour expression

$$\frac{s+s'}{r} f r dv dv'.$$

On en déduira la valeur de $\varpi\omega$ par des intégrations étendues à tous les élémens dv de C et dv' de A; mais vu la petitesse supposée de ω, l'intégration relative à tous les points d'une section de C perpendiculaire à sa longueur, se réduira à remplacer dv par ωds dans la différentielle. De plus, celle qui répond à tous les points de A situés à une même distance u de l'axe de C, consistera à remplacer dv' par $2\pi u du ds'$; et par la nature de la fonction fr, on pourra ensuite étendre depuis zéro jusqu'à l'infini, les intégrales relatives à u, s, s'; en supprimant le facteur ω, on aura donc

$$\varpi = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s+s'}{r} fr.u du ds ds',$$

et en même temps

$$r^2 = u^2 + (s+s')^2.$$

Pour l'objet que nous nous proposons maintenant, nous pourrions conserver la valeur de ϖ sous cette forme; mais, dans le n° 2, nous avons réduit une semblable intégrale triple à une intégrale simple, de manière qu'on a

$$\varpi = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty r^3 f r dr.$$

Or, si l'on comprime le liquide, et que son volume soit diminué dans un rapport de $1-\delta$ à l'unité, le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume augmentera dans le rapport inverse. A distance égale, l'attraction de molécule à molécule ne changera pas; et s'il en était de même à l'égard de la répulsion calorifique, la quantité fr augmenterait dans le rapport de l'unité au carré de $1-\delta$. Mais l'intensité de la répulsion diminuant à raison de la perte de chaleur plus ou moins sensible qui accompagne la condensation du liquide, la valeur de fr croîtra dans un rapport encore moindre que celui de l'unité à $(1-\delta)^2$; par conséquent, la nouvelle valeur de ϖ sera moindre que la précédente, divisée par $(1-\delta)^2$. De là, il résulte que si la quantité p se réduisait à son premier terme ϖ, il

serait impossible qu'elle variât dans le rapport de la pression extérieure près de la surface du liquide, et qu'elle augmentât dans son intérieur proportionnellement à la distance du point M à cette surface; car, pour de très grands accroissemens de pression, δ est une fraction extrêmement petite dans les liquides, qu'on appelle, pour cette raison, *fluides incompressibles*.

Ainsi, pour remplir les conditions du numéro précédent, la somme que p représente ne peut pas être réduite à une intégrale, et il faut avoir égard aux deux termes ϖ et Δ de sa valeur complète. Malgré la petitesse de ϵ, le second terme peut effectivement devenir comparable et même supérieur au premier, lorsque les deux forces attractive et répulsive, dont fr provient, sont l'une et l'autre extrêmement grandes par rapport à leur différence. On peut voir sur ce point les développemens et les exemples que j'ai donnés dans mon Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides (*).

(13). La quantité p est la pression sur un plan; celle qui a lieu sur une surface courbe, suivant une direction perpendiculaire à son plan tangent, se composera de deux parties, l'une qui sera la même que p, et l'autre qui dépendra de la courbure de la surface. L'une et l'autre seront des sommes relatives aux distances des molécules; et si l'on représente la première par ΣR, R étant une fonction de la distance, r, la seconde sera de la forme $\frac{1}{h}\Sigma rR$, en désignant par h une ligne dépendante des rayons de courbure, et ce diviseur linéaire étant compensé, pour l'homogénéité des quantités, par le facteur r contenu sous le signe Σ. Or, la variable r ne recevant que des valeurs insensibles, afin que R ne s'évanouisse pas, et la constante h ayant au contraire une grandeur donnée, le second terme serait, en général, insensible par rapport au premier; et celui-ci n'étant pas extrêmement grand, les phénomènes capillaires qui dépendent du terme relatif à la courbure seraient aussi insensibles. Mais cette nouvelle difficulté n'a plus lieu, si, comme on l'a dit tout à l'heure, l'action moléculaire provient de deux forces contraires, dont cha-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 20e cahier, qui paraîtra incessamment.

cune est extrêmement grande, eu égard à leur différence; circonstance qui peut rendre la quantité $\frac{1}{h}\Sigma r\mathrm{R}$ comparable et même supérieure à $\Sigma\mathrm{R}$. Toutefois, la somme $\Sigma\mathrm{R}$ étant irréductible, d'après cette circonstance même, à une intégrale, il n'en faut pas conclure que la même chose aura également lieu pour la somme $\Sigma r\mathrm{R}$. On se convaincra sans peine du contraire par des exemples auxquels on appliquera la formule d'Euler, relative à ce genre de réductions, et qui montreront que si la première somme est irréductible par la nature dè la fonction R, et malgré la petitesse des différences de r, la seconde ne le sera pas en général.

Pour rendre les calculs plus commodes et plus conformes aux usages ordinaires, nous pourrons donc déterminer par des intégrales définies les parties des pressions qui répondent aux courbures des surfaces, et généralement les sommes relatives à des fonctions qui contiendront un facteur de grandeur insensible, de plus que la fonction soumise à la sommation dans le calcul de la pression normale à une surface plane; ce qui ne dispensera pas d'avoir égard à la variation rapide de la densité, quand il s'agira de la couche superficielle du liquide, ainsi qu'on en a fait voir plus haut la nécessité. Vu l'extrême petitesse de l'intervalle qu'on a désigné par ϵ, et qu'on regarde comme insensible à l'égard même du rayon d'activité des molécules, la décomposition du volume en élémens infiniment petits et le changement des sommes en intégrales, d'après la formule citée d'Euler, ne pourront donner lieu à aucune erreur sensible. Quant à la somme d'où dépend la pression sur un plan, et qui fait exception à la règle générale, c'est-à-dire qui n'est pas réductible à une intégrale, il nous suffira d'avoir expliqué comment elle peut varier, suivant un rapport quelconque, pour des variations très petites dans les intervalles moléculaires, provenant du degré de condensation du liquide. Nous n'aurons pas besoin d'en calculer *à priori* la valeur; elle dépendra de la pression extérieure, de la pesanteur et des autres forces données qui agissent sur le liquide; et son expression en fonction des coordonnées d'un point quelconque, se déduira, comme de coutume, des équations de l'Hydrostatique.

(14). Jusqu'ici nous ne nous sommes point occupés de l'action du

tube sur le liquide dans lequel il est plongé. En calculant la partie de cette force qui est employée à soutenir le liquide au-dessus de son niveau, Laplace n'a point égard à l'état de compression de la couche sur laquelle elle s'exerce. Nous allons d'abord rappeler l'équation entre le poids du liquide soulevé et les actions du tube et du liquide extérieur, qu'il obtient en regardant sa densité comme constante; puis nous montrerons la nécessité de tenir compte de la variation rapide qu'elle éprouve près des parois du tube, aussi bien qu'à la surface libre du liquide.

Supposons que la surface intérieure du tube soit cylindrique et verticale, et que son extrémité inférieure ait une forme quelconque. La figure 5 représente une section verticale du tube et du liquide; la droite DE et les courbes EF et AOB sont la génératrice de la surface cylindrique et les sections de la surface inférieure du tube et de la surface libre du liquide. Dans ce plan vertical, et à une distance insensible de DE, soit OCK l'axe d'un filet fluide vertical d'une épaisseur infiniment petite et constante, et D′C′K′ celui d'un semblable filet, dont la partie D′C′ appartient au tube, et la partie C′K′ au liquide, en sorte que C′ est le point où cette droite rencontre la surface inférieure du tube. A une distance sensible au-dessous de cette surface, menons un plan horizontal GH qui coupe les deux filets en K et K′, et le prolongement de DE au point L. Par les points O et C′, menons deux plans parallèles à GH. Soient O′ et C leurs points de rencontre avec le second et avec le premier filet. Supposons que O′D′ et O′C′ aient des longueurs sensibles, ou, autrement dit, supposons que les extrémités du tube soient sensiblement au-dessus ou au-dessous de la surface AOB du liquide contenu dans son intérieur.

Dans l'hypothèse d'une densité constante et de l'homogénéité du liquide, et la matière du tube étant aussi homogène, les actions verticales de O′C′ sur OC et de C′K′ sur CK seront nulles; car il n'y aurait aucune raison pour qu'elles fussent dirigées plutôt de bas en haut que de haut en bas. Les longueurs de D′O′ et CK étant sensibles, il est aussi évident que l'action de D′O′ sur OK est la même que celle de D′C′ sur CK. Ainsi l'action verticale du filet entier D′K′ sur le filet OK se composera de celle de C′K′ sur CO et de deux fois celle de

D'C' sur CK; et la même chose aura lieu pour tous les autres filets verticaux dans lesquels on pourra décomposer le tube et le liquide.

Cela posé, appelons A le liquide contenu dans un cylindre vertical qui a sa base sur le plan GH et dont la génératrice est la droite DL tangente à la paroi du tube, et B le liquide situé autour de ce cylindre et au-dessous de GH. Il suit de ce qui précède que les actions verticales du tube et de B sur A seront indépendantes de la surface inférieure du tube, dont la section verticale est représentée par EC'F, en sorte qu'on pourra remplacer cette surface par un plan horizontal. Si l'on désigne alors par R l'action de B sur la partie de A située au-dessus de ce plan, et par R' l'action du tube sur la partie de A située au-dessous de ce même plan, et si l'on suppose que la première force s'exerce dans le sens de la pesanteur, et la seconde dans le sens contraire, l'action totale du tube et de B pour soulever A aura pour valeur $2R' - R$, d'après ce qu'on vient de démontrer. Désignons, en outre, par a l'aire de la base de A, et par α la distance du plan GH de cette base, au niveau du liquide en dehors du tube; le poids du liquide compris entre ces deux plans horizontaux sera égal à $\rho g a \alpha$; la pression exercée en sens contraire sur a, ou l'action du liquide situé au-dessous de GH sur A, sera équivalente à $\Pi a + g\rho a\alpha$, en représentant toujours par Π la pression atmosphérique rapportée à l'unité de surface. De plus, cette dernière pression s'exercera aussi normalement et de dehors en dedans, en tous les points de la surface supérieure de A; et la somme de ses composantes verticales sera, comme on sait, égale à Πa, quelle que soit cette surface. Soit enfin $g\rho a\alpha + \Delta$ le poids de A; Δ étant une quantité inconnue, positive ou négative, qui exprimera le poids du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire : en ayant égard à toutes ces forces verticales, et supprimant celles qui sont égales et contraires, il faudra qu'on ait

$$2R' - R = \Delta, \qquad (7)$$

pour l'équilibre de A.

(15). Il restera maintenant à former les expressions de R et R'. Or, soit ds un élément infiniment petit du contour de a; par les deux extré-

mités de ds, menons des plans perpendiculaires à sa direction qui se couperont suivant une verticale passant par le centre de courbure de ce contour ; partageons le segment de A compris entre ces deux plans, en filets infiniment minces par des plans verticaux parallèles à ds ; et soit u la distance de l'un de ces filets au plan vertical passant par ds. On pourra exprimer sa base par $(1-ku)dsdu$, en supposant ce filet compris dans la sphère d'activité de B, négligeant les puissances de u supérieures à la première, et désignant par k un coefficient constant qui dépendra de la courbure du contour de a, au point qui répond à ds. La base d'un filet extérieur, appartenant à B, qui répondra à un autre élément ds' de ce contour, sera en même temps $(1+k'u')ds'du'$; u' étant la distance insensible de ce second filet à la surface de A, et k' ce que devient k au point correspondant à ds'. De là, on conclura sans difficulté

$$R = \rho^2 \iiiint \varphi r \frac{z+z'}{r} (1-ku)(1+k'u')\,dzdz'dudu'dsds',$$

en faisant

$$r^2 = x^2 + (u+u')^2 + (z+z')^2,$$

désignant par φr la même fonction que précédemment (n° 2), par x la projection de l'arc compris entre ds et ds' sur le prolongement de ds, et par z et z' les perpendiculaires abaissées d'un point de A et d'un point de B sur le plan GH, de manière que r soit la distance d'un point à l'autre. Au degré d'approximation où l'on s'est arrêté dans tout ce qui précède, on devra réduire à l'unité les facteurs $1-ku$ et $1+k'u'$. On pourra aussi, sans erreur sensible, prendre $ds' = dx$. On pourra ensuite étendre depuis zéro jusqu'à l'infini, les intégrales relatives à u, u', z, z', et l'intégrale relative à x, depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, ou seulement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, en doublant le résultat. En faisant

$$2\rho^2 \iiiint \varphi r \frac{z+z'}{r} dzdz'dudu'dx = q,$$

et prenant les cinq intégrales depuis zéro jusqu'à l'infini, on aura donc

$$R = \int q\,ds.$$

Cette dernière intégrale devra s'étendre à tous les points du contour de a; et comme q ne variera pas d'un point à un autre, il s'ensuit que si l'on appelle c la longueur entière de ce contour, on aura simplement

$$R = cq.$$

Si l'on désigne par $\varphi' r$ l'attraction mutuelle de la matière du tube et de celle du liquide, relative à la distance r et rapportée aux unités de masse, ou par $\rho\rho'\varphi' r$, cette attraction rapportée aux unités de volume, ρ' et ρ étant les densités des deux matières, et si l'on représente par q' ce que q devient, quand on y met $\rho\rho'\varphi' r$ au lieu de $\rho^2\varphi r$, on trouvera de même

$$R' = cq';$$

au moyen de quoi l'équation (7) deviendra

$$\Delta = (2q' - q)c. \qquad (8)$$

(16). L'intégrale quintuple que q représente se réduit facilement à une intégrale simple. En y mettant d'abord zx, $z'x$, ux, $u'x$, xdz, xdz', xdu, xdu', au lieu de z, z', u, u', et de leurs premières différentielles, les limites zéro et l'infini ne seront pas changées; et si l'on observe ensuite qu'on aura

$$x = \frac{r}{\sqrt{1+(u+u')^2+(z+z')^2}}, \quad dx = \frac{dr}{\sqrt{1+(u+u')^2+(z+z')^2}},$$

il en résultera

$$q = 2X\rho^2\int_0^\infty r^4\varphi r dr,$$

en faisant, pour abréger,

$$X = \iiiint \frac{(z+z')dzdz'dudu'}{[1+(u+u')^2+(z+z')^2]^3}.$$

L'intégration relative à l'une de ces quatre variables, à z' par exemple, s'effectue immédiatement; et à cause des limites $z' = 0$ et $z' = \infty$, on a

$$X = \frac{1}{4}\iiint \frac{dzdudu'}{[1+(u+u')^2+z^2]^2}.$$

Je fais

$$z = y\sqrt{1+(u+u')^2}, \quad dz = dy\sqrt{1+(u+u')^2};$$

ce qui donne

$$X = \frac{1}{4}\iint \frac{dudu'}{[1+(u+u')^2]^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^2};$$

et comme cette intégrale relative à y est égale à $\frac{1}{4}\pi$, on en conclut

$$X = \frac{\pi}{16}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dudu'}{[1+(u+u')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$X = \frac{\pi}{16}\int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) du,$$

ou bien, enfin,

$$X = \frac{\pi}{16}, \quad q = \frac{\pi\rho^2}{8}\int_0^\infty r^4 \varphi r dr.$$

En comparant cette valeur de q à la formule (2), on voit que $q = \frac{1}{8}H$. La même réduction s'appliquera à l'expression de q'; et de cette manière, l'équation (8) coïncidera avec celle qui est désignée par (p) dans la *Mécanique céleste* (*).

(17). Pour faire voir maintenant l'inexactitude du coefficient de c dans cette équation, et la nécessité d'avoir égard à la variation de densité du liquide près de la paroi du tube, menons un plan horizontal GH (fig. 6), à une distance sensible au-dessous de la surface AOB du liquide et au-dessus de l'extrémité EF du tube, qui coupe en L la génératrice DE de sa paroi cylindrique. Supposons le point O situé à une distance insensible de cette paroi, plus grande cependant que le rayon d'activité des points du tube sur ceux du liquide. Par le point O, menons une verticale OKC qui rencontre au point K le plan GH, et que nous prendrons pour la génératrice d'une surface cylindrique parallèle à la paroi du tube, ou dont tous les points seront à une même distance KL de cette paroi. Cette surface cylindrique et le plan GH

(*) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire*, page 17.

partageront le liquide contenu dans le tube en quatre parties. Nous appellerons C et C′ les parties comprises entre cette surface et la paroi, la première au-dessus et la seconde au-dessous du plan GH, c'est-à-dire les parties qui répondent à OKLA et à CKLE, et nous désignerons par D et D′ les deux autres parties qui répondent respectivement à BOKH et CKH. Soient Q, Q′, P, les actions verticales et dirigées dans le sens de la pesanteur, exercées par D, D′, C′, sur C. Comme on peut négliger, par rapport à ces forces, le poids de C et la pression atmosphérique qui a lieu à son extrémité supérieure, à cause que l'épaisseur KL de cette couche liquide est insensible, et que d'ailleurs l'action verticale du tube sur chacun des points de C est évidemment nulle, il s'ensuit qu'on aura pour son équilibre l'équation

$$Q + Q' + P = 0. \qquad (9)$$

Je déterminerai la force Q par la considération de l'équilibre de D. Soit b la base de D; supposons son plan à une distance 6 au-dessous du niveau extérieur : la pression qui a lieu sur cette base en sens contraire de la pesanteur, et qui provient des actions réunies de C′ et D′, sera équivalente à $\Pi b + g\rho b 6$; la pression qui s'exercera sur la surface supérieure de D, décomposée dans le sens de la pesanteur, sera égale à Πb; le poids de D aura pour valeur $g\rho b 6 + \Delta$; et l'on pourra regarder cette inconnue Δ comme étant la même que dans le n° 14, puisque la différence serait le poids d'une couche liquide d'une épaisseur insensible. La réaction étant égale et contraire à l'action, il faudra représenter par $-Q$ l'action verticale et dirigée dans le sens de la pesanteur, exercée par C sur D. En considérant ces différentes forces verticales, supprimant celles qui se détruisent, et observant que, par hypothèse, l'action du tube ne s'étend pas jusqu'à D, nous aurons

$$Q = \Delta,$$

pour l'équilibre de cette partie du liquide.

La force Q′ ne différera pas sensiblement de la force R du n° 14; car elles seraient entre elles dans le rapport du contour c de la base a à celui de la base b, que l'on peut prendre l'un pour l'autre. Ainsi

l'on aura

$$Q' = R = cq.$$

Quant à la force P, son expression différera de celle de R en intégrale quintuple, par le signe de u', et par les limites relatives à u et u', c'est-à-dire que l'on aura

$$P = 2\rho^2 c \iiiint \varphi r \frac{z+z'}{r} dz dz' du du' dx,$$

$$r^2 = x^2 + (u-u')^2 + (z+z')^2;$$

les intégrales relatives à x, z, z', étant toujours zéro et l'infini; mais celles qui répondent à u et u' ne s'étendant que depuis zéro jusqu'à l, en désignant par l la longueur de KL.

Soit Φr une fonction qui devienne insensible pour toute valeur sensible de r; faisons

$$\varphi r = -\frac{d\Phi r}{dr}, \quad \varphi r \frac{z+z'}{r} = -\frac{d\Phi r}{dz'};$$

nous aurons

$$\int_0^\infty \varphi r \frac{z+z'}{r} dz' = \Phi r';$$

r' étant ce que devient r à la limite $z' = 0$. En intégrant par partie, on aura

$$\int_0^l \Phi r' du = l \Phi r_1 + \int_0^l \varphi r' \frac{(u-u')u}{r'} du;$$

r_1 étant la valeur de r' relative à $u = l$. A cause du facteur l, on peut supprimer le terme compris en-dehors du signe $\int$; on aura donc

$$\int_0^l \int_0^\infty \varphi r \frac{z+z'}{r} du dz' = \int_0^l \int_0^\infty \varphi r' \frac{(u-u')u}{r'} du,$$

et par conséquent,

$$P = 2\rho^2 c \iiiint \varphi r' \frac{(u-u')u}{r'} dz dx du du',$$

$$r'^2 = x^2 + z^2 + (u-u')^2.$$

Soit encore

$$x = y \cos \nu, \quad z = y \sin \nu.$$

Si l'on substitue ces variables y et ν à x et z, il faudra prendre

$$dxdz = ydydv;$$

les limites qui répondent à $x=0$ et $z=0$, $y=\infty$ et $z=\infty$, seront $y=0$ et $v=0$, $y=\infty$ et $v=\frac{1}{2}\pi$; en effectuant l'intégration relative à v, il en résultera donc

$$P = -\pi\rho^2 c\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l \varphi r' \frac{(u'-u)u}{r'} ydydudu',$$

$$r'^2 = y^2 + (u-u')^2.$$

Or, cette intégrale triple est la même que celle qui entre dans l'expression de V du n° 8; par l'analyse du n° 9, on en conclura donc

$$P = -\frac{1}{4}\pi\rho^2 c\int_0^\infty r^4\varphi r dr = -2cq,$$

en négligeant toujours le terme qui aurait le facteur l, et ayant égard à la valeur de q du n° 16.

Ces valeurs de Q, Q', P, réduisent l'équation (9) à

$$\Delta = cq.$$

Or, pour que cette valeur de Δ s'accordât avec celle qui est donnée par l'équation (8), il faudrait qu'on eût $q'=q$; ce qui exigerait que la matière du tube fût la même que celle du liquide. Dans ce cas, en effet, le liquide n'éprouverait aucune compression près du tube, et les calculs précédens, fondés sur l'hypothèse d'une densité constante, seraient applicables; mais, dans tout autre cas, il sera indispensable d'avoir égard à la variation rapide de densité du liquide dans l'étendue de la sphère d'activité du tube, puisqu'en en faisant abstraction, on est conduit à deux valeurs de Δ, qui ne sauraient être égales entre elles.

On peut remarquer que si l'équation $\Delta = cq$ avait réellement lieu, le poids soulevé ou abaissé par l'action capillaire ne dépendrait aucunement de la matière du tube. En ayant égard à la répulsion calorifique, aussi bien qu'à l'attraction des molécules du liquide, et supposant, en conséquence, que la fonction φr peut changer de signe dans l'étendue de ses valeurs sensibles, l'intégrale que q représente pourrait être positive ou négative. Le poids Δ serait de même signe que q ou que

H, à cause de $q = \frac{1}{2}H$, c'est-à-dire qu'il y aurait élévation du liquide quand la quantité H serait positive, et abaissement quand elle serait négative. L'ordonnée h du centre de la surface capillaire qui est déterminée par l'équation (5) devrait donc être de même signe que H; par conséquent, pour satisfaire à cette équation, il y faudrait prendre le terme ambigu avec son signe supérieur; d'où il résulterait que la surface capillaire serait toujours concave par en-haut, soit que le liquide s'élevât ou qu'il s'abaissât; ce qui est contraire à l'observation. Mais toutes ces contradictions disparaissent lorsqu'on tient compte de la variation de densité du liquide dans l'épaisseur de C et C'; ce qui rend la force P implicitement dépendante de la matière du tube, et change aussi les valeurs des forces R et R'.

(18). Au lieu de déterminer la force Q d'après la condition d'équilibre de D, on peut en obtenir la valeur par des intégrations directes, en continuant de négliger la variation de densité du liquide près de sa surface supérieure. L'expression de Q en intégrale sextuple ne différera alors de celle de R du n° 15 que par le signe de z' et par les limites relatives à z et z', de sorte qu'on aura

$$Q = \rho^2 \int\int\int\int\int\int \varphi r \frac{z - z'}{r}\, dz dz' du du' dx ds,$$
$$r^2 = x^2 + (u + u')^2 + (z - z')^2,$$

en conservant toutes les notations du numéro cité, et intégrant par rapport à z et z', depuis le plan GH jusqu'à la surface du liquide, ou bien, avec une approximation suffisante, jusqu'à son plan tangent. Si l'on suppose que le plan de la figure, qui est déjà vertical, soit en outre perpendiculaire à la paroi cylindrique du tube, il est évident que le plan tangent en O sera perpendiculaire à ce plan; car il n'y aurait aucune raison pour qu'il s'inclinât plutôt d'un côté que de l'autre. Cela étant, les valeurs de z et z', qui répondent aux secondes limites des intégrales, seront indépendantes de x, et de la forme

$$z = y + \theta u, \qquad z' = y - \theta u',$$

en désignant par y l'ordonnée OK du point O, et par θ la tangente

de l'inclinaison du plan tangent en O sur le plan horizontal passant par le même point. On prendra pour cette inclinaison l'angle K'ON compris entre le prolongement OK' de OK et la normale extérieure ON; angle que l'on regardera comme positif ou comme négatif, selon que ON tombera en-dehors ou en-dedans des deux parallèles K'K et DL. Il s'ensuit que si l'on désigne par ω l'angle NOM que fait la normale ON avec la perpendiculaire OM abaissée du point O sur la droite DE, et qui sera obtus ou aigu, selon que la courbe AOB tournera au point O, sa concavité ou sa convexité par en haut, on aura

$$\theta = -\cot\omega.$$

En appelant Z l'intégrale double relative à z et z', nous aurons donc

$$Z = \int_0^{y+\theta u}\int_0^{y-\theta u'} \varphi r \frac{z-z'}{r}\, dz dz'.$$

Soit Φr la même fonction que dans le n° 9, de sorte qu'on ait

$$\varphi r = -\frac{d\Phi r}{dr}, \quad \varphi r \frac{z'-z}{r} = -\frac{d\Phi r}{dz'};$$

il en résultera

$$Z = \int_0^{y+\theta u} \Phi r' dz - \int_0^{\infty} \Phi r_1 dz,$$

en supposant

$$r'^2 = x^2 + (u+u')^2 + (y - \theta u' - z)^2,$$
$$r_1^2 = x^2 + (u+u')^2 + z^2,$$

et observant qu'on peut remplacer la limite $z = y + \theta u$ par l'infini dans la seconde intégrale. Si nous faisons, dans la première,

$$y - \theta u' - z = \zeta, \quad dz = -d\zeta,$$

les limites relatives à ζ seront $y - \theta u'$ et $-\theta(u+u')$. On remplacera la première limite par $\zeta = \infty$, à cause que $y - \theta u'$ a une valeur sensible pour toutes les valeurs insensibles de u', lesquelles sont les seules qui ne rendent pas r' sensible; on aura donc

$$Z = -\int_{\infty}^{-\theta(u+u')} \Phi r' d\zeta - \int_0^{\infty} \Phi r_1 dz = -\int_0^{-\theta(u+u')} \Phi r' d\zeta,$$
$$r'^2 = x^2 + (u+u')^2 + \zeta^2,$$

en employant la lettre ζ au lieu de z, dans la seconde intégrale, ce qui change r_1 en r', et réduisant ensuite les deux intégrales à une seule; et si l'on met $-(u+u')\zeta$ et $-(u+u')\,d\zeta$ à la place de ζ et $d\zeta$, on en conclura :

$$Z = \int_0^\theta r'\Phi r' \frac{u+u'}{r'}\, d\zeta,$$

$$r'^2 = x^2 + (u+u')^2(1+\zeta^2).$$

Il sera permis maintenant d'étendre les intégrales relatives à u et à u' depuis zéro jusqu'à l'infini; celle qui répond à x aura pour limites $\pm\infty$, ou seulement $x=0$ et $x=\infty$, en doublant le résultat. Nous aurons donc

$$\iiint Z du du' dx = 2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\theta r'\Phi r' \frac{u+u'}{r'}\, du du' dx d\zeta.$$

Soit encore, comme dans le n° 9,

$$r'\Phi r' = -\frac{d\Phi' r'}{dr'};$$

il en résultera

$$r'\Phi r' \frac{u+u'}{r'} = -\frac{1}{1+\zeta^2}\frac{d\Phi' r'}{du'},$$

et par conséquent

$$\iiint Z du du' dx = 2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\theta \Phi' r' \frac{du dx d\zeta}{1+\zeta^2},$$

$$r'^2 = x^2 + u^2(1+\zeta^2),$$

à cause que $\Phi' r'$ s'évanouit à la limite $u'=\infty$. Si donc nous mettons xu et xdu au lieu de u et du, et si nous employons r au lieu de r', nous aurons

$$\iiint Z du du' dx = 2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\theta \Phi' r \frac{x dx du d\zeta}{1+\zeta^2},$$

$$r^2 = x^2[1+u^2(1+\zeta^2)].$$

Cette dernière équation donne

$$x dx = \frac{r dr}{1+u^2(1+\zeta^2)};$$

d'où l'on conclut

$$\iiint Z du du' dx = 2\int_0^\infty r\Phi' r dr \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{du d\zeta}{(1+\zeta^2)[1+u^2(1+\zeta^2)]},$$

c'est-à-dire,

$$\iiint Z du du' dx = \frac{\pi\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \int_0^\infty r\Phi' r dr,$$

en effectuant l'intégration relative à u, et ensuite celle qui répond à ζ.

D'après cette réduction de l'intégrale relative à z, z', u, u', x, et en mettant pour θ sa valeur $-\cot\omega$, l'expression de Q deviendra

$$Q = -\pi\rho^2 \int_0^\infty r\Phi' r dr . \int \cos\omega ds.$$

En intégrant par partie, il vient

$$\int_0^\infty r\Phi' r dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty r^3\Phi r dr = \frac{1}{8}\int_0^\infty r^4\varphi r dr;$$

d'où l'on conclut (n° 16)

$$Q = -q\int \cos\omega ds. \qquad (10)$$

Cette intégrale relative à ds devra s'étendre au contour entier de la base de D. Or, je dis qu'il y faudra considérer $\cos\omega$ comme une quantité constante. En effet, si l'on mène par les extrémités de ds deux plans perpendiculaires à cet élément, $-q\cos\omega ds$ sera la partie de Q qui agira sur le segment de C compris entre ces deux plans; l'action verticale du surplus de C sur ce segment se composera de forces qui se détruiront deux à deux; on pourra négliger le poids de ce segment par rapport à la force $-q\cos\omega ds$, qui devra alors faire équilibre aux parties des forces Q' et P qui agissent sur ce même segment, lesquelles forces ne varient pas en passant du point K à un autre point du contour de D; il faudra donc que $\cos\omega$ ne varie pas non plus; et cela tient à ce que les quantités dépendantes de la courbure du tube, qui changent d'un point à un autre quand la base n'est pas circulaire, disparaissent de l'expression des forces que nous considérons, ainsi qu'on l'a vu dans le n° 15, à l'égard d'une autre force R de la même nature. En appelant donc c le contour entier de la base de D, nous aurons enfin

$$Q = -cq\cos\omega,$$

pour la valeur de Q qu'il s'agissait de calculer.

(19). Cette force étant égale à Δ d'après le n° 17, il faudra qu'on ait

$$\Delta = -cq\cos\omega.$$

En vertu de l'équation (8), dans laquelle c est sensiblement le même que dans celle-ci, on aura donc aussi

$$q - 2q' = q\cos\omega. \quad (11)$$

Laplace est parvenu à cette équation par la comparaison de deux méthodes différentes; ce qui laissait à désirer un moyen plus direct de l'obtenir; mais il ne faut pas oublier que le premier membre est en erreur, parce qu'on a négligé la compression du liquide près du tube, et le coefficient de cos ω dans le second, parce qu'on n'a pas tenu compte de la variation de la densité près de la surface libre.

En s'arrêtant à la formule (10), cette expression de Q et l'équation $Q = \Delta$ du n° 17, auront encore lieu, lors même que la partie D du liquide sera terminée par une surface cylindrique quelconque qui ne sera ni parallèle à la paroi du tube, ni à une distance insensible de cette paroi, pourvu qu'elle soit verticale. Quand la valeur de cos ω sera donnée en fonction de s, d'après la courbe d'intersection de cette surface et de celle qui termine le liquide, l'équation (10) fera connaître la valeur de Q, ou du poids Δ du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire et contenu dans D. Or, si la paroi cylindrique du tube est à base circulaire, il est évident que la surface supérieure du liquide sera une surface de révolution qui aura pour axe celui de la paroi. Si de plus D est terminé par une surface cylindrique ayant le même axe et dont nous représenterons le rayon par x, l'intersection de ces deux surfaces sera un cercle, et cos ω ne variera pas d'un point à un autre de cette courbe; sa longueur étant $2\pi x$, on aura donc

$$\Delta = -2\pi x q\cos\omega, \quad (12)$$

en vertu de la formule (10).

Comme cette équation aura lieu pour un point quelconque O de la courbe AOB, dont la distance à l'axe de révolution est x, on en pourra déduire l'équation de cette courbe, ou de la surface du liquide dont elle est la génératrice; et l'on y parvient, en effet, en la

différentiant par rapport à x. On a évidemment

$$d\Delta = 2\pi\rho g z x dx,$$

en appelant z l'ordonnée du point O, rapportée au niveau du liquide en-dehors du tube. La différentielle $d\omega$ est l'angle de contingence de la courbe AOB au point O; si l'on appelle λ son rayon de courbure au même point, on aura donc

$$d\omega = \frac{1}{\lambda}\sqrt{dx^2 + dz^2};$$

on aura, en outre,

$$\sin\omega\sqrt{dx^2 + dz^2} = dx;$$

et en différentiant l'équation (12) et divisant par $2\pi x dx$, il en résultera

$$g\rho z = q\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos\omega}{x}\right).$$

Soit λ' le second rayon de courbure principal de la surface de révolution au point O; sa valeur sera

$$\lambda' = -\frac{x}{\cos\omega};$$

on aura donc

$$g\rho z = q\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right);$$

ce qui s'accorde avec l'équation (4), à cause de $q = \frac{1}{2}H$, et peut servir de vérification à l'analyse du numéro précédent.

(20). Nous terminerons ce chapitre, en faisant remarquer que la compression de la couche liquide en contact avec le tube met aussi en défaut la proposition de Clairaut, suivant laquelle le liquide reste horizontal dans un tube vertical, lorsqu'à distance égale, l'action de la matière du tube sur celle du liquide est double de l'action du liquide sur lui-même.

En effet, supposons, pour un moment, que la surface supérieure du liquide soit horizontale; représentons-la par CAF (fig. 7), et par DAE celle du tube qui lui est perpendiculaire; soit M un point de la première surface, situé à une distance insensible MA de la seconde; prenons MB = MA, et tirons les verticales MM′ et BB′.

Dans le cas de l'incompressibilité du liquide, les actions horizontales et contraires, exercées sur le point M, par les parties de ce liquide qui répondent à EAMM′ et M′MBB′, seront égales et se détruiront par conséquent. Les actions horizontales des parties du tube qui répondent à CAD et CAE sur le point M sont égales entre elles; et, par hypothèse, chacune de ces forces est égale à la moitié de l'action horizontale exercée sur ce même point par la partie du liquide qui répond à B′BB. Cette dernière force sera donc aussi détruite par les actions réunies des deux parties du tube; donc toutes les forces horizontales qui agissent à chaque point M de la surface du liquide, se détruisant réciproquement, l'horizontalité subsistera dans l'état d'équilibre. Mais il est évident qu'il n'en sera plus de même, si l'on a égard à la compression du liquide près de la paroi du tube; car alors les actions contraires des deux parties EAMM′ et M′MBB′ ne seront plus égales entre elles; ce qui suffit pour que la démonstration précédente n'ait pas lieu. On voit d'ailleurs que l'action exercée sur un point donné, par une partie infiniment petite du liquide, variant avec le degré de compression, elle ne peut pas conserver un rapport constant, à égalité de distance et de volume, avec l'action d'une partie du tube sur le même point, et que celle-ci ne saurait être moitié de la première, ainsi qu'on l'a supposé.

CHAPITRE II.

Équation de la surface capillaire.

(21). Nous entendons par cette dénomination, la surface libre d'un liquide en équilibre dans un tube capillaire, ou plus généralement, la surface de séparation de deux liquides contenus dans ce tube. Avant de former l'équation d'une surface de cette nature, nous allons d'abord calculer les pressions qui ont lieu dans l'intérieur de chaque liquide et que nous aurons besoin de connaître.

Soit M un point situé à une distance sensible de la surface d'un liquide et des parois qui le contiennent; par ce point, faisons passer une surface quelconque, qui partage le liquide en deux portions que nous appellerons A et B; divisons cette surface en élémens infiniment petits, terminés par ses deux séries de lignes de courbure; par tous les points de ces lignes, élevons des normales qui formeront, comme on sait, des surfaces développables, par lesquelles A et B se trouveront décomposés en filets d'une épaisseur infiniment petite, mais variable; appelons C le filet qui répond au point M, et dont la base sur la surface menée par ce point sera représentée par ω. La résultante des actions de tous les points de A sur tous ceux de C, divisée par ω, sera la pression qui a lieu sur B, rapportée à l'unité de surface et relative au point M. Si l'on a égard, d'après le n° 11, à l'inégale compression du liquide dans l'étendue de la sphère d'activité de M, et à la différence de matière dans le cas d'un liquide hétérogène, la résultante dont il s'agit ne sera pas perpendiculaire à la surface de B. Nous désignerons en général par $N\omega$ sa composante normale et dirigée de dehors en dedans de B, et par $T\omega$ et $T'\omega$ ses composantes suivant deux droites rectangulaires, menées par le point M et comprises dans le plan tangent en ce point à la surface de B; et nous allons déterminer les valeurs de N, T, T', par

des intégrations, sauf la partie de N qui ne dépend pas de la courbure de B, et que nous représenterons, comme il a été dit précédemment (n° 15), par une inconnue p, de sorte qu'en appelant N′ l'autre partie, on ait

$$N = p + N',$$

pour la valeur complète de N.

Il est à propos d'observer que, dans l'intérieur du liquide, l'action d'une partie A sur un filet cylindrique et normal compris dans la partie adjacente B, différerait, en grandeur et en direction, de la force que nous venons de définir; et que si on la prenait pour la pression sur B, ce qui paraîtrait plus simple, les pressions relatives à toute l'étendue de la surface de séparation de A et B ne représenteraient pas l'action totale de A sur B, parce qu'on ne peut pas décomposer la masse entière de B en filets cylindriques perpendiculaires à cette surface.

(22). Soit m un point de C, et m' un point de A, l'un et l'autre compris dans la sphère d'activité de M. Désignons par s et s' les perpendiculaires abaissées de m et m' sur la surface de A, et par ω' l'élément de cette surface qui répond au filet fluide dont m' fait partie. Soient aussi $(1 + ks')\omega'$ et $(1 - ks)\omega$ les aires des sections de ce filet et de C, faites par les points m' et m, et parallèles à leurs bases ω' et ω; le coefficient k dépendant de la courbure de A au point M, et étant le même pour les deux filets, en négligeant les quantités du second ordre, par rapport à leur distance mutuelle et aux variables s et s'. Les élémens de volume qui répondent aux points m et m' seront

$$(1 - ks)\omega ds, \quad (1 + ks')\omega' ds',$$

et leur action mutuelle pourra être représentée par le produit

$$V(1 - ks)(1 + ks')\omega\omega' ds ds';$$

V étant la mesure de l'action moléculaire rapportée aux unités de volume et relative à la distance mm', que nous représenterons par r'.

Pour se former une idée précise de cette quantité V, il faut prendre autour des points m et m', des volumes v et v' dont les dimensions soient insensibles, eu égard même au rayon d'activité des molécules,

et qui en comprennent néanmoins un nombre extrêmement grand. L'action mutuelle de ces deux parties du liquide, provenant de la matière et de la chaleur qu'elles renferment, aura pour expression $V\omega\omega'$, en sorte que V sera le rapport de cette force au produit des deux volumes. Cela étant, V dépendra de la distance r', de la nature des molécules contenues dans ω et ω', de leur quantité de chaleur propre et de leur nombre; ce sera donc une fonction de r' insensible pour toute valeur sensible de r', mais qui renfermera en outre les coordonnées de m et m'.

D'après cela, représentons par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de M, et supposons les axes des x et y parallèles au plan tangent à B, mené par le point M, et l'axe des z parallèle à la normale au même point. Les coordonnées de m seront x, y, $z+s$, relativement aux mêmes axes; celles de m' pourront être représentées par $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$; on aura

$$r'^2 = (s-z')^2 + x'^2 + y'^2,$$

et ensuite

$$V = f(r', x, y, z+s, x+x', y+y', z+z').$$

Cette force V devant dépendre de la même manière, de la nature du liquide autour de chacun des deux points m et m', il faudra que la fonction f soit symétrique par rapport à x et $x+x'$, à y et $y+y'$, à $z+s$ et $z+z'$. De plus, la nature du liquide, sa quantité de chaleur et sa condensation intérieure ne variant que par degrés insensibles, on pourra développer cette fonction en série très convergente, suivant les puissances et les produits des variables s, x', y', z', qu'elle contient en-dehors de r', et qui ne peuvent être que de très petites quantités. A cause de la symétrie de f, on aura

$$\frac{dV}{dx'} = \frac{1}{2}\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy'} = \frac{1}{2}\frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz'} = \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dV}{dz},$$

pour $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, $s=0$, et en ne faisant pas varier r'. Si donc on désigne par R' une fonction de r', x, y, z, et qu'on néglige les termes du second ordre par rapport à x', y', z', s, on aura

$$V = R' + \frac{x'}{2}\frac{dR'}{dx} + \frac{y'}{2}\frac{dR'}{dy} + \frac{s+z'}{2}\frac{dR'}{dz}.$$

Représentons par u la perpendiculaire abaissée de ω' sur la normale en M à la surface de A, et par θ l'angle que fait le plan de ces deux droites avec un plan fixe, passant par la seconde. La projection de ω' sur le plan tangent en M pourra s'exprimer par $udud\theta$; et cette projection, au degré d'approximation où nous nous arrêtons, pouvant être prise pour l'aire de ω', nous aurons

$$\omega' = udud\theta.$$

Soient enfin α, ζ, γ, les cosinus des angles que fait la droite mm_1, prolongée au-delà de m_1, avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par ce point. Si l'on suppose les axes des x et des y parallèles aux directions des forces tangentielles T et T', et que l'on regarde la force V comme positive ou comme négative, selon qu'elle sera répulsive ou attractive, on aura

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{T} &= \int\int\int\int \mathrm{V}[1 + k(s' - s)]\, \alpha udud s ds' d\theta, \\ \mathrm{T}' &= \int\int\int\int \mathrm{V}[1 + k(s' - s)]\, \zeta udud s ds' d\theta, \\ \mathrm{N} &= \int\int\int\int \mathrm{V}[1 + k(s' - s)]\, \gamma udud s ds' d\theta, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

en négligeant le produit ss'. Les limites de l'intégrale relative à l'angle θ seront zéro et 2π; on pourra étendre les autres intégrales depuis zéro jusqu'à l'infini, parce que toute valeur sensible de l'une des trois variable u, s, s', rendra r' sensible, et, par conséquent, V insensible. Les valeurs de α, ζ, γ, qu'on emploiera dans ces formules seront

$$\alpha = -\frac{x'}{r'}, \quad \zeta = -\frac{y'}{r'}, \quad \gamma = \frac{z-z'}{r'}.$$

(23). Pour effectuer, autant qu'il sera possible, les intégrations indiquées, appelons ζ la perpendiculaire abaissée de ω' sur le plan tangent en M, et considérons cette quantité comme positive ou comme négative, selon que la partie A' du liquide sera concave ou convexe au point M. Soient η et η' les coordonnées du pied de cette perpendiculaire, rapportées à des axes menés par le point M parallèlement à ceux des x et des y. En négligeant les termes du troisième ordre par rapport à η et η', nous aurons

$$\zeta = \mathrm{Q}\eta^2 + \mathrm{Q}'\eta'^2 + \mathrm{Q}''\eta\eta';$$

Q, Q', Q'', étant des coefficiens indépendans de ces deux variables. Au même degré d'approximation, et d'après la manière dont nous déterminons le signe de ζ, nous aurons aussi

$$x' = n + \frac{d\zeta}{dn}s', \quad y' = n' + \frac{d\zeta}{dn'}s', \quad z' = -s' + \zeta,$$

$$r'\alpha = -n - \frac{d\zeta}{dn}s', \quad r'\beta = -n' - \frac{d\zeta}{dn'}s', \quad r'\gamma = s + s' - \zeta.$$

On a d'ailleurs

$$n = u\cos\theta, \quad n' = u\sin\theta,$$

en comptant l'angle θ à partir de l'axe des n. Si l'on fait, pour abréger,

$$r^2 = (s+s')^2 + u^2,$$

et si l'on observe que

$$n\frac{d\zeta}{dn} + n'\frac{d\zeta}{dn'} = 2\zeta,$$

on en conclura

$$r' = r + (s'-s)\frac{\zeta}{r}, \quad R' = R + (s'-s)\frac{\zeta}{r}\frac{dR}{dr},$$

en appelant R ce que devient R', quand on y met r au lieu de r'. On a enfin

$$Q + Q' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right);$$

λ et λ' étant les rayons de courbure principaux de la surface de A, dont chacun devra être regardé comme positif ou comme négatif, selon que la ligne de courbure à laquelle il appartient tournera sa concavité ou sa convexité en-dehors de A : il est évident, en effet, que cela résulte du signe de ζ que supposent les expressions de x', y', z'.

Cela posé, je substitue ces différentes valeurs et celle de V dans les équations (1); j'effectue les intégrations relatives à l'angle θ, puis je supprime la partie de N indépendante de la courbure de B, afin de réduire N à N', ainsi qu'il a été dit plus haut; il vient

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{T} &= -\frac{\pi}{2}\iiint \frac{d\mathrm{R}}{dx}\frac{u^3}{r}\,du\,ds\,ds', \\ \mathrm{T}' &= -\frac{\pi}{2}\iiint \frac{d\mathrm{R}}{dy}\frac{u^3}{r}\,du\,ds\,ds', \\ \mathrm{N}' &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\iiint \mathrm{R}\frac{u^3}{r}\,du\,ds\,ds', \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

en négligeant toujours les quantités du troisième ordre, par rapport à u, s, s'. La valeur de N′ devrait renfermer d'autres termes du deuxième ordre, que l'on n'a cependant point écrit, parce qu'ils contenaient le facteur $s^2 - s'^2$ sous les signes $\int$, et que, pour cette raison, les intégrations relatives à s et s' les feraient disparaître.

Si nous faisons, pour abréger,

$$-\frac{1}{2}\pi\iiint \mathrm{R}\frac{u^3}{r}\,du\,ds\,ds' = q,$$

et que nous transportions en-dehors des signes $\int$, les différentiations relatives à x et y dans les valeurs de T et T′, elles deviendront simplement

$$\mathrm{T} = \frac{dq}{dx}, \qquad \mathrm{T}' = \frac{dq}{dy}.$$

En ajoutant l'inconnue p à la valeur de N′, pour former celle de N, on aura en même temps

$$\mathrm{N} = p + q\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right).$$

Dans les usages qu'on fera de ces formules, on ne devra pas perdre de vue qu'elles exigent que la surface de B ne présente ni pointe ni arête vive près du point M, afin que la valeur de ζ, en fonction de η et η', puisse se développer en série convergente, suivant les puissances et les produits de η et η', et qu'il soit permis de réduire cette série, comme nous l'avons fait, à ses termes du second ordre. Si cette condition n'était pas remplie, notre analyse serait en défaut, et ces expressions de T, T′, N, n'auraient plus lieu.

(24). Afin de réduire q à une intégrale simple, j'y mets d'abord us, us', uds, uds', à la place de s, s', ds, ds'; il en résulte

$$q = -\frac{1}{2}\pi\iiint \mathrm{R}\frac{u^5}{r}\,du\,ds\,ds',$$
$$r^2 = u^2\left[1+(s+s')^2\right].$$

Cette seconde équation donne

$$u^5 du = \frac{r^5 dr}{[1+(s+s')^2]^3};$$

on a donc

$$q = -\frac{1}{2}\pi \int_0^\infty \mathrm{R} r^4 dr \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{ds ds'}{[1+(s+s')^2]^3},$$

c'est-à-dire

$$q = -\frac{1}{8}\pi \int_0^\infty \mathrm{R} r^4 dr,$$

en effectuant successivement les intégrations relatives à s et s' par les règles ordinaires, ou bien en mettant d'abord ss' et sds' à la place de s' et ds', puis intégrant par rapport à s', et ensuite par rapport à s.

Dans les liquides hétérogènes, cette quantité q variera d'un point à un autre, et devra être donnée en fonction des coordonnées du point auquel elle répond; dans un liquide homogène et à très peu près incompressible, on pourra la considérer comme constante, ainsi que la densité.

(25). Si la partie A du liquide enveloppe B de toutes parts, il faudra que les pressions résultantes de l'action de A sur toute l'étendue de B fassent équilibre au poids de B et aux autres forces données qui agissent sur sa masse. Or, dans le Mémoire déjà cité (n° 12), j'ai démontré que les forces tangentielles T et T′ et la partie N′ de la force normale, appliquées à tous les points de la surface quelconque de B, se détruisent d'elles-mêmes; et en prenant pour B une sphère d'un très petit rayon, j'ai aussi fait voir comment la considération de l'équilibre des forces données et de la pression normale et inconnue p, conduit aux équations connues de l'Hydrostatique. Ces équations déterminent, comme on sait, la valeur de p relative à un point quelconque de l'intérieur du liquide, en fonction de ses coordonnées x, y, z, d'après les forces données qui agissent en ce point. Si ces forces se réduisent à la pesanteur, et qu'il s'agisse d'un liquide homogène, l'expression de p est simplement

$$p = c - \rho g z,$$

en prenant les z positives, verticales et en sens contraire de la pesan-

teur, désignant par ρ la densité du liquide, par g la pesanteur, et par c une constante arbitraire.

Supposons qu'on ait plongé dans ce liquide un tube quelconque, et qu'ensuite on ait versé au-dessus de ce liquide, dans l'intérieur du tube, un autre liquide homogène, dont nous représenterons la densité par ρ'. La valeur de p aura lieu pour un point quelconque M du premier liquide situé en-dehors ou en-dedans du tube, mais un tant soit peu éloigné de ses parois et de la surface de séparation des deux liquides. En désignant par p' et z' ce que deviennent p et z relativement à un point M′ du second liquide, situé à une distance sensible de ses deux surfaces supérieure et inférieure, et des parois du tube, on aura

$$p' = c' - \rho' g z' ;$$

c' étant une constante arbitraire différente de c.

Pour déterminer c, plaçons le point M en-dehors du tube, à une distance insensible de la surface du liquide, qui surpasse néanmoins le rayon d'activité moléculaire, afin que l'expression de p soit applicable. Supposons en outre le point M assez éloigné du tube pour qu'en cette partie, la surface libre du liquide soit sensiblement plane et horizontale. Par le point M, menons un plan horizontal; par ce plan, élevons un cylindre vertical, qui sera terminé par la surface horizontale du liquide, que nous appellerons C, et dont la base, comprenant le point M, sera représentée par ω. Le produit $p\omega$ exprimera l'action du liquide inférieur sur C, laquelle force sera verticale et dirigée de bas en haut; et en même temps, C sera poussé en sens contraire par une force $\Pi\omega$, en désignant par Π la pression atmosphérique rapportée à l'unité de surface. De plus, quelle que soit la variation de la densité suivant l'épaisseur de la couche superficielle dont C fait partie, l'action de cette couche sur C consistera en des forces qui seront deux à deux égales et contraires, et se réduira conséquemment à zéro. Si donc on néglige le poids de C comme insensible, il faudra, pour l'équilibre de cette petite partie du liquide, que les forces contraires $p\omega$ et $\Pi\omega$ soient égales, ou qu'on ait $p = \Pi$. D'un autre côté, si nous prenons le niveau du liquide en-dehors du tube, pour le plan des x et y, nous aurons

$z = 0$ et $p = c$ pour la position du point M qu'on vient de supposer; nous aurons donc $c = \Pi$, et par conséquent

$$p = \Pi - \rho g z,$$

pour tous les points intérieurs du premier liquide compris en-dehors ou en-dedans du tube.

La variable z sera positive pour les points situés au-dessus du niveau de ce liquide, et négative pour les points situés au-dessous. Nous supposerons que la pression atmosphérique a aussi lieu, dans l'intérieur du tube, sur la surface du second liquide, et nous compterons les ordonnées z' à partir du même plan horizontal et dans le même sens que les ordonnées z; mais nous ne pourrons pas encore déterminer la constante c' que renferme l'expression de p', et dont la valeur dépendra de cette pression et du poids du liquide supérieur.

(26). Près de la surface de séparation de deux liquides superposés, la condensation varie très rapidement, en sorte que la densité de chaque liquide peut être très différente à la surface même et à une profondeur insensible. La loi de cette variation est inconnue, comme celle de l'action moléculaire, de laquelle elle dépend; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse former les équations d'équilibre relatives à la couche d'une épaisseur insensible, appartenant, en partie, à chacun des deux liquides, et qu'on n'en déduise l'équation de leur surface de séparation, dont la détermination est l'objet principal de ce chapitre.

Pour cela, transportons le point M très près de la surface de contact AOB (fig. 8) des deux liquides contenus dans le tube que nous considérons. Du point M, abaissons sur cette surface une perpendiculaire qui la rencontre en un point O, et se prolonge jusqu'au point M'' du second fluide, aussi très rapproché de AOB. Divisons cette surface en élémens infiniment petits, terminés par ses deux séries de lignes de courbure; par tous leurs points, élevons des normales qui formeront des surfaces développables, par lesquelles les deux liquides superposés se trouveront décomposés en filets d'une épaisseur infiniment petite et variable. Par les points M et M', traçons deux surfaces CMD et C'M'D', qui coupent aussi à angles droits toutes les normales à la surface AOB. Appelons A le liquide terminé par CMD, A' celui qui a pour limite C'M'D', B la couche liquide

comprise entre ces deux surfaces, C le filet MOM′ de B, ω et ω' les bases ou les sections normales de ce filet qui répondent aux points M et M′. Quoique les distances MO et M′O de ces deux points à la surface AOB soient insensibles, on pourra cependant les supposer assez grandes pour que les actions de A et A′ sur C ne s'étendent pas jusqu'aux points où les condensations des deux liquides varient très rapidement; c'est-à-dire qu'on pourra considérer M et M′ comme des points intérieurs de ces deux liquides, et déterminer, en conséquence, les actions totales de A et A′ sur C par les formules du n° 23. Alors, les composantes de l'action de A seront

$$\left[p+q\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\right]\omega,\quad \frac{dq}{dx}\omega,\quad \frac{dq}{dy}\omega;$$

la première étant normale et dirigée de M vers M′, et les deux autres tangentes à la surface CMD. En désignant par q' ce que devient la quantité q relativement au liquide supérieur, et observant que les courbures de A et A′ sont sensiblement égales, mais tournées en sens contraires, on aura

$$\left[p'-q'\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\right]\omega',\quad \frac{dq'}{dx}\omega',\quad \frac{dq'}{dy}\omega',$$

pour les composantes de l'action de A′ sur C; la première dirigée de M′ vers M, ou en sens contraire de la force normale précédente, et les dernières parallèles aux deux autres forces. Les coordonnées x et y sont parallèles au plan tangent en M à la surface CMD, et par conséquent les mêmes pour les deux points M et M′; les quantités p et p' sont déterminées par le numéro précédent. Nous représenterons, en outre, par $P\omega$, $Q\omega$, $Q'\omega$, les composantes de l'action exercée par la couche B sur le filet C qui en fait partie; la première de ces forces étant normale et dirigée de M vers M′, et les deux dernières parallèles aux axes des x et des y, comme les autres forces tangentielles.

On pourra négliger le poids de C par rapport à ces différentes forces, à cause que sa longueur MM′ est insensible, et regarder, par la même raison, le rapport de ω' à ω comme égal à l'unité. Cela posé, pour l'équilibre de C, il faudra que la somme des forces précédentes soit nulle, suivant chaque direction, ce qui donne les trois

équations :

$$\left.\begin{aligned} Q + \frac{d(q+q')}{dx} &= 0, \\ Q' + \frac{d(q+q')}{dy} &= 0, \\ P + p - p' + (q+q')\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Il ne restera donc plus qu'à déterminer les valeurs de P, Q, Q', par un calcul analogue à celui des n°s 22 et 23, que nous allons exposer succinctement.

(27). Soit m un point de C, et m_1 un point de B. Désignons par s et s_1 les perpendiculaires Mm et M_1m_1, abaissées de ces deux points sur la surface CMD. Ces deux droites tombent d'un même côté de cette surface, tandis que dans les numéros cités les perpendiculaires s et s', abaissées des points m et m', tombaient de deux côtés différens, il faudra d'abord changer s' en $-s_1$ dans les formules de ces numéros. De plus, si l'on décompose B en couches infiniment minces, qui coupent à angle droit les normales à la surface AQB, la condensation du liquide variera par degrés insensibles, dans toute l'étendue de chacune de ces couches ; mais, d'une couche à une autre, elle variera très rapidement, comme il a été dit plus haut. Il s'ensuit que, relativement aux perpendiculaires s et s_1, la fonction qui exprime la loi de l'action moléculaire variera aussi très rapidement, et ne pourra plus se réduire en série convergente ordonnée suivant leurs puissances et leurs produits. Toutefois, cette fonction sera toujours symétrique par rapport à s et s_1 ; les intégrales relatives à ces deux variables auront les mêmes limites zéro et l, en désignant par l l'épaisseur MM' de B ; par conséquent, cette double intégration fera disparaître les termes qui auront pour facteur la différence $s - s_1$; et cela étant, au lieu des formules (2), on trouvera sans difficulté celles-ci :

$$Q = \frac{dq_1}{dx}, \quad Q' = \frac{dq_1}{dy}, \quad P = q_1\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right),$$

en faisant, pour abréger,

$$q_1 = -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l \mathrm{R}_1 \frac{u^3}{r}\,du ds ds_1,$$
$$r^2 = u^2 + (s-s_1)^2,$$

et désignant par R_1 une fonction de r, s, s_1, qui deviendra insensible pour toute valeur sensible de r.

Cette fonction R_1 variera aussi très rapidement avec s et avec s_1, et de la même manière par rapport à chacune de ces deux variables; elle changera de forme dans l'étendue des intégrations relatives à s et à s_1, selon qu'elle proviendra de l'action du premier ou du second liquide sur lui-même, ou des molécules de l'un sur celles de l'autre. Ainsi, elle sera une certaine fonction S pour les valeurs de s et s_1, toutes deux moindres que MO; une autre fonction S' pour les valeurs de s et s_1, toutes deux plus grandes que MO; et une troisième fonction S_1, quand l'une des deux variables s et s_1 sera plus grande et l'autre plus petite que MO. Mais ces trois fonctions S, S', S_1, nous étant inconnues, il faudra considérer q_1 comme une quantité dépendante de la nature des deux liquides, dont la valeur ne pourrait être donnée que par l'expérience.

(28). L'épaisseur de B, quoique insensible, pouvant être néanmoins plus ou moins grande, on pourrait croire que l'intégrale représentée par q_1 change de valeur avec l, et, par suite, que les équations (3) dépendent de cette quantité arbitraire, ce qui serait absurde. Mais il est facile de prouver que les variations dont la grandeur de l est susceptible n'influent pas sensiblement sur la valeur de q_1.

En effet, soit M'' un point de A' situé sur le prolongement de MM', et tel que M'M'' soit insensible, mais plus grand que le rayon d'activité moléculaire. Désignons M'M'' et MM'' par s et l', en sorte qu'on ait $l' = l + s$; à cause de la symétrie de R_1 par rapport à s et s_1, nous aurons

$$\int_0^{l'}\int_0^{l'} \mathrm{R}_1 \frac{ds ds_1}{r} = \int_0^{l}\int_0^{l} \mathrm{R}_1 \frac{ds ds_1}{r} + 2\int_0^{l}\int_l^{l+s} \mathrm{R}_1 \frac{ds ds_1}{r} + \int_l^{l+s}\int_l^{l+s} \mathrm{R}_1 \frac{ds ds_1}{r}. \qquad (4)$$

Si nous faisons

$$s = l - x, \qquad s_1 = l + x_1,$$

il en résultera

$$\int_0^l\int_l^{l+s} R_1 \frac{ds\,ds_1}{r} = \int_0^l\int_0^s R_1 \frac{dx\,dx_1}{r},$$
$$r^2 = u^2 + (x+x_1)^2;$$

et d'après cette valeur de r^2 et l'hypothèse du n° 26, sur la grandeur de MM′ ou l, les intégrales relatives à x et x_1 ne comprendront pas les valeurs de R_1 qui varient très rapidement. On y pourra donc considérer la fonction R_1 comme indépendante de x et de x_1 en-dehors de r; on pourra aussi étendre ces intégrales depuis $x = 0$ et $x_1 = 0$ jusqu'à $x = \infty$ et $x_1 = \infty$: cela étant, on aura

$$\int_0^\infty\int_0^l\int_l^{l+s} R_1 \frac{u^3}{r} du\,ds\,ds_1 = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty R_1 \frac{u^3}{r} du\,dx\,dx_1;$$

et, par le calcul du n° 24, on réduira cette intégrale triple à une intégrale simple; d'où il résultera

$$\int_0^\infty\int_0^l\int_l^{l+s} R_1 \frac{u^3}{r} du\,ds\,ds_1 = \frac{1}{4}\int_0^\infty R_4 r^4 dr. \qquad (5)$$

Soit encore

$$s = l + y, \quad s_1 = l + y_1;$$

nous aurons

$$\int_l^{l+s}\int_l^{l+s} R_1 \frac{ds\,ds_1}{r} = \int_0^s\int_0^s R_1 \frac{dy\,dy_1}{r},$$
$$r^2 = u^2 + (y_1 - y)^2;$$

et, dans ces intégrations, nous pourrons considérer R_1 comme une fonction indépendante de y et y_1 en-dehors de r. Alors, en désignant par R_2 une autre fonction de r, qui devienne aussi nulle pour toute valeur sensible de r, et supposant qu'on ait

$$R_2 = -\frac{dR_2}{dr},$$

il s'ensuivra

$$\frac{u}{r}R_1 = -\frac{dR_2}{du}, \quad \frac{y - y_1}{r}R_1 = -\frac{dR_2}{dy};$$

et si l'on intègre par partie, d'abord par rapport à u, et ensuite par rapport à y, on en conclura

$$\int_0^\infty\int_0^\varepsilon R_1 \frac{u^3}{r} du dy = 2\int_0^\infty\int_0^\varepsilon R_2 u du dy$$
$$= 2\int_0^\infty\int_0^\varepsilon R_1 \frac{(y-y_1)yu}{r} du dy.$$

On aura donc

$$\int_0^\infty\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon R_1 \frac{u^3}{r} du dy dy_1 = 2\int_0^\infty\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon R_1 \frac{(y-y_1)yu}{r} du dy dy_1;$$

équation que l'on transformera, par l'analyse du n° 9, en celle-ci :

$$\int_0^\infty\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon R_1 \frac{u^3}{r} du dy dy_1 = \frac{2\varepsilon}{3}\int_0^\infty R_1 r^3 dr - \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\infty R_1 r^4 dr. \quad (6)$$

Cela posé, au moyen des équations (4), (5) et (6), nous aurons finalement

$$\int_0^\infty\int_0^{l'}\int_0^{l'} R_1 \frac{u^3}{r} du ds ds_1 = \int_0^\infty\int_0^{l}\int_0^{l} R_1 \frac{u^3}{r} du ds ds_1 + \frac{2\varepsilon}{3}\int_0^\infty R_1 r^3 dr;$$

la quantité r contenue dans les intégrales triples étant donnée par l'équation

$$r^2 = u^2 + (s - s_1)^2,$$

comme dans l'expression de q_1. Or, on voit par là que le changement de l en l' ne fait varier l'intégrale représentée par q_1 que d'une quantité insensible, ayant pour facteur ε, et de l'ordre de celles que nous avons négligées dans les équations (3) ; ce qu'il s'agissait de vérifier.

(29). Je substitue dans les deux premières équations (3), les valeurs trouvées pour Q et Q'; il vient

$$\frac{d(q+q'+q_1)}{dx} = 0, \quad \frac{d(q+q'+q_1)}{dy} = 0;$$

ce qui montre que dans l'état d'équilibre de deux liquides superposés, la quantité $q + q' + q_1$ est constante dans toute l'étendue de leur surface de contact. Nous ferons

$$q + q' + q_1 = \frac{1}{2} G;$$

et nous regarderons G comme une quantité dépendante de la matière et de la température de l'un et l'autre liquide, dont le signe et la valeur numérique seront donnés dans chaque cas particulier.

Si l'on applique les valeurs de p et p' du n° 25 aux points M et M′ de la figure 8, on y pourra faire $z' = z$, et considérer z comme l'ordonnée verticale du point quelconque O de la surface de séparation des deux liquides. Substituant ensuite ces valeurs et celle de P dans la troisième équation (3), on aura

$$\Pi - c' - (\rho - \rho')\, gz + \frac{1}{2} G \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) = 0, \quad (7)$$

pour l'équation commune à tous les points de cette surface qui ne sont pas compris dans la sphère d'activité du tube. On se souviendra que le plan des x et y est celui du niveau du liquide inférieur en-dehors du tube, que l'axe des z positives est dirigé en sens contraire de la pesanteur, et que chacun des rayons de courbure λ et λ' est regardé comme positif ou comme négatif, selon qu'au point O la ligne de courbure à laquelle il appartient tourne sa concavité ou sa convexité en-dehors du liquide inférieur, ou, ce qui revient au même, en-dedans du liquide supérieur.

D'après la théorie connue de la courbure des surfaces, on aura alors

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dy^2}}{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad (8)$$

et pour déterminer le signe du dénominateur, qui est ambigu, on concevra, par le point dont les coordonnées sont x, y, z, une normale en-dehors du liquide inférieur et une verticale en sens contraire de la pesanteur : le dénominateur devra être positif ou négatif, selon que ces deux droites feront un angle aigu ou obtus. En

substituant cette valeur de $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}$ dans l'équation précédente, on aura l'équation de la surface de séparation des deux liquides, dans laquelle il restera encore à déterminer la constante c'.

(30). La surface libre du liquide supérieur, qui le sépare du fluide atmosphérique, est évidemment, à l'égard de ces deux fluides, ce qu'était la surface que nous venons de considérer, relativement aux deux liquides contenus dans le tube. De plus, en passant de ceux-ci aux deux autres, les pressions p et p' se changeront respectivement en p' et Π. Si donc on désigne par H ce que G devient par rapport au liquide supérieur et au fluide atmosphérique, par μ et μ' les rayons de courbure principaux en un point quelconque de leur surface de séparation, par z' l'ordonnée verticale de ce même point, et par δ la densité de l'air, il suffira de remplacer G, λ, λ', Π, c', ρ, ρ', z, dans l'équation (7), par H, μ, μ', c', Π, ρ', δ, z', pour avoir l'équation de la surface libre du liquide supérieur. Cette équation sera donc

$$c'-\Pi-(\rho'-\delta)gz'+\tfrac{1}{2}\mathrm{H}\left(\tfrac{1}{\mu}+\tfrac{1}{\mu'}\right)=0; \qquad (9)$$

et la valeur de $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}$ se déduira de celle de $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}$, en y changeant z en z'.

Le volume terminé par les surfaces qui répondent aux équations (7) et (9), et par la surface intérieure du tube, sera une certaine fonction de la constante c' qui entre dans ces deux équations. En égalant cette fonction, dans chaque exemple, au volume du liquide supérieur, dont la valeur numérique sera donnée, on obtiendra l'équation qui servira à déterminer la valeur de c'.

Dans le cas particulier où les deux liquides que le tube renferme seront de la même matière et n'en formeront plus qu'un seul, on aura $\rho'=\rho$, $q'=q$; il n'y aura plus de variation rapide de densité près de leur surface de séparation, et la quantité R_1, qui entre dans l'expression de q_1, pourra être remplacée par la quantité R, d'où dépend la valeur de q: en mettant l, s, s_1, au lieu de ε, γ, γ_1, dans l'équation (6), on en conclura

$$-\frac{1}{2}\pi\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l \mathrm{R}_1\frac{u^3}{r}\,du\,ds\,ds_1 = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \mathrm{R}r^4\,dr - \frac{\pi l}{3}\int_0^\infty \mathrm{R}r^3\,dr,$$

ou sensiblement $q_1 = -2q$, d'après les expressions de q et de q_1, des n°s 24 et 27. On aura donc $\mathrm{G} = 0$. De plus, la valeur de p du n° 25 devant alors convenir à tous les points des deux liquides, et coïncider, par conséquent, avec celle de p', il faudra qu'on ait $c' = c = \Pi$. Au moyen de ces valeurs de ρ', G et c', l'équation (7) s'évanouit; ce qui devait effectivement arriver, puisque, dans ce cas, il n'y a plus de condition particulière d'équilibre à la surface de séparation des deux liquides, qui sont les deux parties d'un même fluide. En même temps, l'équation (9) devient

$$(\rho - \delta)gz = \frac{1}{2}\mathrm{H}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right), \qquad (10)$$

en employant la lettre z, au lieu de z'. Ce sera l'équation de la surface libre du liquide unique contenu dans le tube.

On parvient au même résultat en faisant $\rho' = \delta$, $c' = \Pi$, $\mathrm{G} = \mathrm{H}$, dans l'équation (7); ce qui revient à supprimer le liquide supérieur, et à supposer que l'atmosphère presse directement sur le fluide inférieur. Si l'on supprime, au contraire, le liquide inférieur, et qu'on le remplace par le fluide atmosphérique, il faudra faire $\rho = \delta'$ et $\mathrm{G} = \mathrm{H}$ dans l'équation (7); on aura alors

$$\Pi - c' + (\rho' - \delta')gz - \frac{1}{2}\mathrm{H}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) = 0, \qquad (11)$$

où l'on a changé le signe du dernier terme, afin que chacun des rayons λ et λ' soit positif ou négatif, selon que la ligne de courbure à laquelle il appartient tournera sa concavité ou sa convexité en-dehors du liquide qui subsiste, et que la valeur de $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$ soit donnée par la formule (8), en suivant, pour le signe de son dénominateur, la règle du numéro précédent.

Les équations (9) et (11) seront celles des surfaces supérieure et inférieure d'un liquide pesant, pressé de part et d'autre par l'atmosphère, et suspendu en équilibre dans un tube de forme quelconque. La constante c' se déterminera, comme on l'a dit tout à l'heure;

d'après le volume du liquide ; le plan des x et y ne sera plus déterminé, et l'on pourra le choisir arbitrairement, pourvu qu'il soit toujours horizontal. Toutefois, si la surface supérieure est un plan horizontal indéfiniment prolongé, le volume du liquide ne sera plus donné ; mais, en prenant ce plan pour celui des x et y, on aura alors $c' = c = \Pi$ (n° 25). Ce cas aura lieu lorsque le tube, au lieu d'être immergé par sa partie inférieure, sera adapté, par son autre extrémité, au bas d'un vase d'une très grande largeur, où le liquide s'élève à une hauteur quelconque. En mettant ρ au lieu de ρ', l'équation de la surface inférieure du liquide contenu dans ce tube sera donc

$$g(\rho - \delta)z = \frac{1}{2}\mathrm{H}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) ;$$

et l'on voit qu'elle aura la même forme que l'équation (10), qui appartient à la surface supérieure du liquide dans le cas de l'immersion du tube.

(31). Quoique la considération de l'équilibre du filet fluide d'épaisseur variable, que nous avons appelé C (n° 26), soit le moyen le plus simple de former l'équation de la surface capillaire, il ne sera cependant pas inutile de montrer que l'on peut aussi la déduire de l'équilibre d'un filet cylindrique. Par là, nous ferons voir, d'une manière nouvelle, la nécessité d'avoir égard à la variation rapide de densité qui a lieu près de la surface d'un liquide, et nous mettrons en évidence la quantité que l'on néglige et l'erreur que l'on commet, lorsqu'on ne tient pas compte de cet élément essentiel de la question. Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il n'y ait qu'un seul liquide, que nous placerons dans le vide, afin de n'avoir pas à considérer l'action mutuelle des molécules de l'air atmosphérique et de ce liquide. L'analyse suivante s'appliquerait également au cas de la surface de séparation de deux fluides quelconques.

Soit toujours O (fig. 9) un point de la surface libre AOB du liquide, situé à une distance sensible des parois du tube. Soit OE un filet normal et cylindrique ayant pour base un élément ω de cette surface. Par un point F appartenant à ce filet, et situé à une distance insensible de la surface, menons un plan CFD' parallèle au plan

COD tangent en O. Supposons, néanmoins, cette distance assez grande pour que l'action du liquide indéfini, terminé par le plan C'FD', sur le filet FO, ne s'étende pas jusqu'aux points où la densité varie très rapidement. La composante de cette force, perpendiculaire au plan C'FD' et dirigée du point F vers le point O, sera égale à $p\varpi$; et, à cause que l'on suppose nulle la pression extérieure Π, on aura, d'après le n° 25,

$$p = -\rho g z;$$

z étant l'ordonnée verticale du point F, ou, si l'on veut, du point O. Appelons $\varpi\omega$ l'action exercée, suivant cette même direction, sur FO, par le liquide compris entre le plan C'FD' et la surface AOB. En négligeant le poids de FO, il faudra qu'on ait

$$p + \varpi = 0,$$

pour l'équilibre de cette petite partie du liquide. Lors donc qu'on aura déterminé convenablement la valeur de ϖ, cette équation devra coïncider avec l'équation (10), en faisant dans celle-ci $\delta = 0$, et réduisant à $q + q_1$ le coefficient $\frac{1}{2}H$.

(32). Pour obtenir cette valeur, soit M un point quelconque de FO, et M' un point du liquide environnant compris dans la sphère d'activité de M. Désignons par t et t' les perpendiculaires abaissées de ces deux points sur le plan COD. Soit r la distance MM', u sa projection sur ce plan, θ l'angle que fait cette projection avec une droite fixe, menée dans ce même plan par le point O; on aura

$$r^2 = u^2 + (t - t')^2.$$

Les élémens de volume qui répondent aux points M et M' seront ωdt et $u du dt' d\theta$, et l'on pourra représenter leur action mutuelle par

$$R' \omega u du dt dt' d\theta;$$

R' étant la mesure de l'action moléculaire, rapportée aux unités de volume et relative à la matière du liquide autour de ces deux points. Le cosinus de l'angle M'MO aura pour valeur $\frac{t - t'}{r}$. D'après cela, si l'on prolonge la perpendiculaire M'G, abaissée du point M' sur le

plan COD, jusqu'au point G′ où elle rencontre le plan C′FD′, et jusqu'au point K où elle coupe la surface AOB; si, de plus, on appelle l et ζ les longueurs des parties GG′ et GK de la droite G′K, on aura

$$\varpi = -\int_0^\infty \int_0^l \int_{-\zeta}^l \int_0^{2\pi} R' \frac{t-\kappa'}{r} u\,du\,dt\,dt'\,d\theta,$$

en regardant comme positive ou comme négative la force R′, selon qu'elle est répulsive ou attractive, et la quantité ζ, suivant que le point M′ tombe entre la surface AOB et le plan tangent COD, ou entre les deux plans parallèles COD et C′FD′.

La valeur de cette quantité ζ, qu'on a déjà plusieurs fois employée, sera

$$\zeta = Qu^2 \cos^2\theta + Q'u^2 \sin^2\theta + Q''u^2 \cos\theta \sin\theta;$$

Q, Q′, Q″, étant des coefficiens indépendans de u et θ, dont la somme des deux premiers est

$$Q + Q' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right),$$

en désignant par λ et λ' les mêmes quantités que dans l'équation (10).

La quantité R′ sera une fonction de r qui deviendra insensible pour toute valeur sensible de cette variable, ce qui a permis d'étendre jusqu'à l'infini l'intégrale relative à u; elle dépendra en outre de la position des points M et M′. A l'égard des coordonnées de M′ parallèles au plan COD, elle variera par degrés insensibles. En leur donnant le point O pour origine, on pourra la développer en série convergente, suivant leurs puissances et leurs produits; et si l'on s'arrête à leurs premières puissances inclusivement, les termes qui les contiendraient, disparaîtront par l'intégration relative à l'angle θ. Mais R′ variera très rapidement par rapport à la variable t; et si nous désignons par σ la perpendiculaire M′L abaissée du point M′ sur la surface AOB, R′ variera de même par rapport à σ, et sera une fonction symétrique de t et σ. D'ailleurs, on aura, au degré d'approximation où l'on s'est arrêté,

$$\sigma = t' + \zeta, \quad R' = R_1 + \zeta\left(\frac{dR_1}{dt}\right),$$

en désignant par R_1 ce que devient R' quand on y met t' au lieu de ω, et les parenthèses indiquant qu'on ne fait pas varier m dans la différentiation relative à t'. A ce même degré d'approximation, on aura en même temps

$$\int_{-\zeta}^{l} R' \frac{t-t'}{r}\,dt' = \int_0^l R_1 \frac{t-t'}{r}\,dt' + \int_0^l \left(\frac{dR_1}{dt}\right)\frac{t-t'}{r}\zeta\,dt' + P\frac{t\zeta}{\rho};$$

P et ρ étant les valeurs de R_1 et de r qui répondent à $t' = 0$.

L'expression de ϖ deviendra donc

$$\varpi = \int_0^\infty\int_0^l\int_0^l\int_0^{2\pi} R_1 \frac{t'-t}{r}\,u\,du\,dt\,dt'\,d\theta$$
$$- \int_0^\infty\int_0^l\int_0^{2\pi} P\frac{t\zeta}{\rho}\,u\,du\,dt\,d\theta$$
$$+ \int_0^\infty\int_0^l\int_0^l\int_0^{2\pi}\left(\frac{dR_1}{dt}\right)\frac{(t'-t)\zeta}{r}\,u\,du\,dt\,dt'\,d\theta.$$

A cause que R_1 est une fonction symétrique par rapport à t et t', l'intégration relative à ces deux variables fera disparaître le premier terme; et en ayant égard à la valeur de ζ, et effectuant les intégrations relatives à θ, on aura simplement

$$\varpi = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\int_0^\infty\int_0^l P\frac{tu^3}{\rho}\,du\,dt$$
$$+ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l\left(\frac{dR_1}{dt}\right)\frac{(t'-t)u^3}{r}\,du\,dt\,dt', \qquad (12)$$

où l'on peut remarquer que la quantité R_1 est la même que celle qui entre dans l'expression de q_1 (n° 27), en mettant dans celle-ci $l-t$ et $l-t'$ à la place de s et s_1.

Le premier terme de cette dernière formule exprime la partie de ϖ qui provient de l'action du ménisque compris entre la surface AOB et le plan tangent COD, sur le filet OE; le second est la partie provenant de l'action du liquide compris entre les deux plans COD et C'F'D', sur la portion OF de ce filet cylindrique. La fonction R_1, variant très rapidement, par hypothèse, avec la variable t' qu'elle renferme en-dehors de r, cette circonstance rend $\left(\frac{dR_1}{dt}\right)$ extrêmement grand par rapport à R_1, et le second terme de ϖ comparable au

premier. L'erreur de la méthode que nous avons rappelée au commencement du chapitre précédent, consiste donc en ce qu'on y néglige le dernier terme de ϖ, ou, autrement dit, en ce qu'on y considère comme nulle l'action du liquide compris entre les deux plans parallèles COD et C'FD', sur le filet OF qui en fait partie. Il reste à faire voir qu'en ayant égard à ce dernier terme, l'équation $p + \varpi = 0$ coïncide avec l'équation (10), qu'on a formée d'une tout autre manière.

(33). Soient v et v' les volumes de deux parties très petites du liquide, comprenant respectivement les points M et M', qui en seront, par exemple, les centres de gravité. Supposons leurs dimensions insensibles par rapport au rayon d'activité moléculaire; leur action mutuelle sera le produit $vv'R'$, et l'action totale du liquide sur v, décomposée suivant la droite MF, aura pour expression,

$$v\Sigma R' \frac{t'-t}{r} v',$$

en étendant la somme Σ à toutes les parties v' du liquide qui sont comprises dans la sphère d'activité de M. Désignons par δ la densité du liquide qui a lieu en ce point, et par g' la composante de la pesanteur suivant la direction MF; pour l'équilibre de la partie insensible du liquide dont le volume est v, il faudra donc qu'on ait

$$g'\delta + \Sigma R' \frac{t'-t}{r} v' = 0;$$

équation qui détermine implicitement δ en fonction de t', mais dont on ne pourrait pas déduire la valeur de cette densité sans connaître l'expression de R', qui dépend elle-même de cette inconnue.

Je rétablis le facteur v, et je multiplie par t le premier membre de cette équation, puis je prends la somme de ses valeurs relatives à toutes les parties v du liquide qui ont leurs centres sur le filet OF; il en résulte

$$\Sigma g'\delta tv + \Sigma \left(\Sigma R' \frac{t'-t}{r} v' \right) tv = 0.$$

Le premier terme est le poids de la portion du liquide à laquelle se rapporte cette nouvelle sommation, décomposé suivant la direction MF et multiplié par la distance de son centre de gravité au

point Q. A cause que la longueur de OF est insensible, on peut négliger ce produit par rapport au second terme; de plus, d'après ce qu'on a dit dans le n° 13, on peut aussi remplacer dans celui-ci, ν et ν' par les élémens de volume infiniment petits ωdt et $ududt'$, et changer ensuite les sommes Σ en intégrales définies. De cette manière, on aura donc

$$\omega \int_0^\infty \int_0^l \int_{-\zeta}^\infty \int_0^{2\pi} R' \frac{(t'-t)t}{r} ududtdt'd\theta = 0;$$

la seconde limite de l'intégrale relative à t' étant l'infini, parce que le liquide s'étend indéfiniment, ou du moins à une distance sensible, au-delà du plan CFD', et les autres limites étant les mêmes que dans la première expression de ϖ. En négligeant les quantités du même ordre que dans les calculs précédens, on pourra mettre R_1 au lieu de R', et remplacer par zéro la première limite $-\zeta$ de l'intégrale relative à t'; effectuant ensuite l'intégration relative à θ, et supprimant le facteur ω, nous aurons

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_0^\infty R_1 \frac{(t'-t)t}{r} ududtdt' = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l R_1 \frac{(t'-t)t}{r} ududtdt' + 2\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_l^\infty R_1 \frac{(t'-t)t}{r} ududtdt' = 0. \quad (13)$$

Je fais dans cette dernière intégrale

$$t = l - s, \quad t' = l + s', \quad dt = -ds, \quad dt' = ds';$$

la fonction R_1 qu'elle renferme se changera alors dans la fonction R relative à l'intérieur du liquide; et nous aurons

$$\int_0^\infty \int_0^l \int_l^\infty R_1 \frac{(t'-t)tu}{r} dudtdt' = l \int_0^\infty \int_0^l \int_0^\infty R \frac{(s'+s)u}{r} dudsds' - \int_0^\infty \int_0^l \int_0^\infty R \frac{(s'+s)su}{r} dudsds',$$

$$r^2 = u^2 + (s+s')^2.$$

On peut négliger le terme qui renferme le facteur l en-dehors des

signes $\int$, et étendre, dans l'autre terme, l'intégrale relative à s jusqu'à l'infini; mettant ensuite us', us, uds', uds, au lieu de s', s, ds', ds, il en résultera

$$2\pi\int_0^\infty\int_0^l\int_l^\infty R_1\frac{(t'-t)tu}{r}\,dudtdt' = -2\pi\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty R\frac{(s'+s)su^2}{r}\,dudsds',$$

$$r^2 = u^2[1+(s+s')^2]^2,$$

ou bien, en vertu de cette valeur de r^2,

$$2\pi\int_0^\infty\int_0^l\int_l^\infty R_1\frac{(t'-t)tu}{r}\,dudtdt' = -2\pi\int_0^\infty Rr^4dr\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(s'+s)sdsds'}{[1+(s+s')^2]^3} = 2q,$$

en effectuant les intégrations relatives à s' et à s, et ayant égard à l'expression de q du n° 24.

On a identiquement

$$2\int_0^l\int_0^l R_1\frac{(t'-t)t}{r}\,dtdt' = \int_0^l\int_0^l R_1\frac{(t'^2-t^2)}{r}\,dtdt' - \int_0^l\int_0^l R_1\frac{(t'-t)^2}{r}\,dtdt'.$$

La symétrie de la fonction R_1, par rapport à t et t', rend nulle la première intégrale qui renferme le facteur t'^2-t^2 sous les signes $\int$; on aura donc

$$2\pi\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l R_1\frac{(t'-t)t}{r}\,ududtdt' = -\pi\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l R_1\frac{(t'-t)^2}{r}\,ududtdt';$$

et, d'après ces transformations des deux termes de l'équation (13), elle deviendra

$$\pi\int_0^\infty\int_0^l\int_0^l R_1\frac{(t'-t)^2}{r}\,ududtdt' = 2q. \qquad (14)$$

Cette équation, déduite, comme on voit, de la condition d'équilibre d'une petite partie quelconque du filet OF, exprime que l'action totale du liquide sur ce filet, de longueur insensible, serait la même, soit que son épaisseur fût variable, ou qu'elle fût constante: elle nous était nécessaire pour la transformation de la formule (12), que nous devons effectuer.

(34). En vertu de l'équation

$$r^2 = u^2 + (t'-t)^2,$$

nous avons

$$\left(\frac{dR_1}{dt'}\right) = \frac{dR_1}{dt} - \frac{dR_1}{dr}\,\frac{t'-t}{r}, \qquad \frac{dR_1}{du} = \frac{dR_1}{dr}\,\frac{u}{r},$$

en faisant varier t' et r dans $\frac{dR}{dt'}$, et seulement t' dans $\left(\frac{dR_1}{dt'}\right)$. On conclut de là

$$\int_0^l \left(\frac{dR_1}{dt'}\right)\frac{(t'-t)u}{r}\,dt' = u\int_0^l \frac{dR_1}{dt'}\,\frac{t'-t}{r}\,dt' - \int_0^l \frac{dR_1}{du}\,\frac{(t'-t)^2}{r}\,dt'.$$

A la limite $t'=0$, on a $R_1 = P$, $r=\rho$, et à l'autre limite $t'=l$; cette fonction R_1 se change en R, si l'on y fait

$$l-t=s, \qquad r^2 = u^2+s^2.$$

En intégrant par partie, on aura donc

$$\int_0^l \frac{dR_1}{dt'}\,\frac{t'-t}{r}\,dt' = R\,\frac{s}{r} + P\,\frac{t}{\rho} - \int_0^l R_1\,\frac{u^2}{r^3}\,dt',$$

et, par conséquent,

$$\int_0^l \left(\frac{dR_1}{dt'}\right)\frac{(t'-t)u}{r}\,dt' = R\,\frac{su}{r} + P\,\frac{tu}{\rho} - \int_0^l R_1\,\frac{u^3}{r^3}\,dt' - \int_0^l \frac{dR_1}{du}\,\frac{(t'-t)^2}{r}\,dt';$$

ce qui change d'abord l'équation (12) en celle-ci :

$$\varpi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)\left[\int_0^\infty\int_0^l R\,\frac{su^3}{r}\,du\,ds - \int_0^\infty\int_0^l\int_0^l \left(\frac{dR_1}{du}\,\frac{(t'-t)^2u^2}{r^3} + R_1\,\frac{u^3}{r^3}\right)du\,dt\,dt'\right].$$

D'après la valeur de r qu'on doit employer dans l'intégrale double, on pourra étendre jusqu'à l'infini l'intégrale relative à s; en y mettant ensuite us et uds, au lieu de s et ds, on aura

$$\int_0^l R\,\frac{su^3}{r}\,ds = \int_0^\infty R\,\frac{su^5}{r}\,ds, \qquad r^2 = u^2(1+s^2);$$

d'où l'on conclura

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\int_0^l R\,\frac{su^3}{r}\,du\,ds = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty Rr^4\,dr\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s^2)^3} = -q.$$

En intégrant par partie relativement à u, et observant que dans l'intégrale triple on a $r^2 = u^2 + (t' - t)^2$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{dR_1}{du} \frac{(t'-t)^2 u^2}{r}\, du = -2\int_0^\infty R_1 \frac{(t'-t)^2 u}{r}\, du + \int_0^\infty R_1 \frac{(t'-t)^2 u^3}{r^3}\, du ;$$

on aura donc

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \int_0^l \int_0^l \left(\frac{dR_1}{du}\frac{(t'-t)^2 u^2}{r} + R_1 \frac{u^3}{r^3}\right) du\,dt\,dt'$$
$$= -\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l R_1 \frac{(t'-t)^2 u}{r}\, du\,dt\,dt' + \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty R_1 \frac{u^3}{r}\, du\,dt\,dt' ;$$

quantité qui est la même chose que $-2q - q_1$, en vertu de l'équation (14) et de l'expression de q_1 du n° 27. Or, au moyen de ces valeurs de l'intégrale double et de l'intégrale triple, contenues dans l'expression précédente de ϖ, elle se réduit à

$$\varpi = (q + q_1)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) ;$$

et l'équation $p + \varpi = 0$ devient enfin

$$gf z = (q + q_1)\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) ;$$

ce qu'il s'agissait de trouver.

(35). Sans intégrer l'équation (10), on en peut déduire une expression du volume d'un cylindre vertical, tronqué par la surface capillaire, qui nous sera utile dans la suite de cet ouvrage.

Par un point O appartenant à l'intersection de la surface capillaire et de la surface cylindrique, menons en-dehors du liquide des normales à ces deux surfaces. Soient α, $\mathcal{C}$, γ, les angles compris entre la normale à la surface capillaire et des droites menées par le point O, suivant les directions des x, y, z, positives. Désignons par α', $\mathcal{C}'$, γ', les angles que fait la normale à la surface cylindrique avec les mêmes droites, et par ω l'angle des deux normales; nous aurons

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\mathcal{C}\cos\mathcal{C}' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Soit u une quantité positive, telle qu'on ait

$$u^2 = 1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2} ;$$

d'après les formules connues, on aura

$$\cos\alpha = -\frac{1}{u}\frac{dz}{dx}, \quad \cos\mathcal{C} = -\frac{1}{u}\frac{dz}{dy}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{u}.$$

D'ailleurs, l'axe des z étant vertical, ainsi que le cylindre, $\cos\gamma'$ sera zéro, et les valeurs de $\cos\alpha'$ et $\cos\mathcal{C}'$ dépendront du contour de la base horizontale du cylindre. Nous supposerons que cette base soit située sur le plan des x et y, qui est celui du niveau du liquide en-dehors du tube; en désignant alors par V le volume du cylindre tronqué, on aura

$$V = \iint z\,dx\,dy;$$

l'intégrale s'étendant à tous les points de sa base, et la valeur de z, en fonction de x et y, étant donnée par l'équation de la surface capillaire. En vertu de l'équation (10), on aura donc

$$g(\rho - \delta)V = \frac{1}{2}H\iint\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)dx\,dy;$$

et comme, d'après les valeurs précédentes de $\cos\alpha$ et $\cos\mathcal{C}$, l'équation (8) peut s'écrire ainsi:

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = -\frac{d.\cos\alpha}{dx} - \frac{d.\cos\mathcal{C}}{dy},$$

il en résultera

$$g(\rho - \delta)V = -\frac{1}{2}H\iint\frac{d.\cos\alpha}{dx}dx\,dy - \frac{1}{2}H\iint\frac{d.\cos\mathcal{C}}{dy}dy\,dx.$$

Pour fixer les idées, supposons que la base entière du cylindre soit située d'un même côté de chacun des axes des x et des y, et que son contour ne soit rencontré qu'en deux points par chaque parallèle à l'un de ces axes. Menons à cette courbe deux tangentes parallèles à l'axe des y, dont les points de contact diviseront sa circonférence en deux parties, et deux tangentes parallèles à l'axe des x, dont les points de contact diviseront de même cette circonférence en deux autres parties. Si l'on effectue l'une des deux intégrations indiquées, on aura

$$g(\rho - \delta)V = \frac{1}{2}H\left[\int\cos\alpha\,dy\right] - \frac{1}{2}H\left(\int\cos\alpha\,dy\right)$$
$$+ \frac{1}{2}H\left[\int\cos\mathcal{C}\,dx\right] - \frac{1}{2}H\left(\int\cos\mathcal{C}\,dx\right); \quad (15)$$

et les intégrales relatives à x ou à y, renfermées entre des parenthèses, se rapporteront aux parties de la courbe les plus éloignées des axes des y ou des x, et celles qui sont contenues entre des crochets, aux parties les plus rapprochées. Dans ces intégrations, dx et dy devront être positifs; or, l'angle $\mathcal{C}'$ est aigu dans la partie de la courbe la plus éloignée de l'axe des y, et obtus dans la partie la plus rapprochée; si donc on appelle ds l'élément différentiel de la courbe, regardé comme positif, on aura

$$dx = \pm \cos \mathcal{C}' ds,$$

selon qu'il s'agira d'un point de la première ou de la seconde partie : on aura de même

$$dy = \pm \cos \alpha' ds,$$

selon qu'il s'agira de la partie de la courbe la plus éloignée ou la plus rapprochée de l'axe des x. Cela posé, on pourra réduire l'équation (15) à celle-ci,

$$g(\rho - \delta) V = -\tfrac{1}{2} H \int \cos \alpha \cos \alpha' ds - \tfrac{1}{2} H \int \cos \mathcal{C} \cos \mathcal{C}' ds,$$

dans laquelle les intégrales s'étendront au contour entier de la base du cylindre. A cause de $\cos \gamma' = 0$, on en conclura

$$g(\rho - \delta) V = -\tfrac{1}{2} H \int \cos \omega ds;$$

équation qui aurait encore lieu, lors même que ce contour ne serait pas coupé seulement en deux points par chaque ligne droite, ainsi qu'on l'a supposé, et qui fera connaître la valeur de V, quand celle de $\cos \omega$ sera donnée en fonction de s. On peut remarquer que son premier membre est le poids dans l'air, du liquide homogène contenu dans le cylindre que l'on considère.

(36). On verra, par la suite, que l'angle ω est constant pour tous les points de la surface capillaire dont les distances à la paroi du tube sont insensibles, et cependant plus grandes que les rayons d'activité des molécules du tube et du liquide. Si donc on suppose que l'intersection de cette surface et de celle du cylindre vertical, dont le volume est V, soit partout à une distance insensible de la paroi du tube, et

que l'on désigne par c la longueur entière de son contour, l'équation précédente deviendra

$$g(\rho - \delta)V = -\tfrac{1}{2}Hc\cos\omega,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Delta = -\tfrac{1}{2}Hc\cos\omega, \qquad (16)$$

en appelant Δ le poids dans l'air d'un volume V du liquide.

Si la surface intérieure du tube est celle d'un cylindre vertical, c ne différera pas sensiblement du contour d'une section horizontale de cette surface, et Δ pourra être pris pour le poids du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire, selon que sa valeur sera positive ou négative. Si l'on incline le tube de manière que la génératrice de sa surface et la verticale fassent un angle aigu i, ce poids Δ variera en raison inverse de $\cos i$.

En effet, appelons C le centre de gravité de la section intérieure du tube par le plan du niveau du liquide; par ce point, menons trois plans, le premier perpendiculaire à la génératrice du tube, le second parallèle à cette droite et passant par l'intersection du premier et du niveau du liquide, et le troisième perpendiculaire à cette même intersection. Prenons ces trois plans rectangulaires pour ceux des coordonnées; et soient z', x', y', celles d'un point quelconque de la surface capillaire, respectivement perpendiculaires à ces trois plans. L'ordonnée verticale z du même point, qui entre dans l'équation (10) aura pour valeur

$$z = z'\cos i - x'\sin i;$$

et cette équation deviendra

$$g(\rho - \delta)(z'\cos i - x'\sin i) = \tfrac{1}{2}H\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Or, en désignant par V' le volume du liquide contenu entre le plan des x' et y' et la surface capillaire, nous aurons

$$V' = \int z'dx'dy',$$

et nous conclurons de l'équation précédente

$$g(\rho - \delta)(V'\cos i - \sin i\int x'dx'dy') = -\tfrac{1}{2}Hc\cos\omega,$$

en représentant par c et ω les mêmes quantités que dans l'équation (16). D'ailleurs, l'intégrale $\int x'dx'dy'$, étendue à l'aire entière de la section

du tube, sera nulle par la nature du point C; par la même raison, le volume du liquide compris entre cette section passant par le point C et le plan des x' et y', se composera de deux parties égales et de signes contraires; par conséquent, V sera équivalent au volume du liquide compris entre son niveau et la surface capillaire; et, en vertu de l'équation qu'on vient de former, ce volume et le poids correspondant suivront la raison inverse du cosinus de l'inclinaison du tube.

Dans le cas de deux liquides superposés, si l'on désigne toujours par V le volume d'un cylindre vertical quelconque tronqué par la surface libre du liquide supérieur, et par ω le même angle que précédemment; si, de plus, on appelle b l'aire de la base de ce cylindre, située dans le plan du niveau extérieur, l'équation (9) donnera

$$g(\rho' - \delta)\,V = (c' - \Pi)\,b - \tfrac{1}{2}H\int \cos\omega\, ds,$$

par un calcul semblable à celui du numéro précédent.

Dans le même cas, si l'on appelle V_1 le volume de la partie du même cylindre, terminée par la surface de séparation des deux liquides, et φ ce que devient l'angle ω, relativement à cette surface, on aura, d'après l'équation (7),

$$g(\rho - \rho')\,V_1 = (\Pi - c')\,b - \tfrac{1}{2}G\int \cos\varphi\, ds.$$

En ajoutant ces deux équations, il vient

$$g(\rho' - \delta)(V - V_1) + g(\rho - \delta)\,V_1 = -\tfrac{1}{2}H\int \cos\omega\, ds - \tfrac{1}{2}G\int \cos\varphi\, ds.$$

Or, si la surface intérieure du tube est cylindrique et verticale, et que celle du cylindre que l'on considère ne s'en écarte pas sensiblement, comme dans le cas auquel répond l'équation (16), $V - V_1$ sera le volume du liquide supérieur, et $g(\rho' - \delta)(V - V_1)$, son poids qui devra être donné et que nous représenterons par P. En même temps, $g(\rho - \delta)V_1$ sera le poids inconnu du liquide inférieur, soulevé ou abaissé par l'action capillaire, et que nous désignerons par Γ. L'angle φ sera constant, aussi bien que ω; par conséquent, l'équation précédente deviendra, dans ce cas,

$$P + \Gamma = -\tfrac{1}{2}Hc\cos\omega - \tfrac{1}{2}Gc\cos\varphi. \qquad (17)$$

L'angle ω dépendra, comme le coefficient H, de la matière du tube et de celle du liquide supérieur; l'angle φ, comme le coefficient G, de la matière du tube et de la matière des deux liquides.

CHAPITRE III.

Équation relative au contour de la surface capillaire.

(37). En général, dans une question de Mécanique ou de Physique, relative à un corps, à une surface ou une ligne, il existe, outre l'équation commune à tous les points du système, d'autres équations qui n'ont lieu que pour la superficie, le contour ou les points extrêmes. Ainsi, dans la question présente, indépendamment de l'équation commune à tous les points de la surface capillaire dont les distances aux parois du tube surpassent, toutefois, le rayon d'activité moléculaire, il y a une autre équation qui n'appartient qu'à ceux de ces points qui sont situés à des distances insensibles de la surface du tube. C'est cette équation particulière qu'il s'agit maintenant de former, soit dans le cas de la surface libre d'un liquide, soit relativement à la surface commune à deux liquides superposés.

Soit M (fig. 10) un point du liquide supérieur situé à des distances insensibles de la surface libre et de celle du tube. Par ce point, abaissons des perpendiculaires MN et MK sur ces deux surfaces; supposons que le plan de la figure soit celui de ces deux droites, et que les courbes ANB et DKE représentent les sections de la surface du liquide et de la surface du tube, par ce même plan. Faisons passer par le point M deux autres surfaces, dont l'une coupe à angle droit toutes les normales à la surface du liquide, et soit représentée, dans la figure, par la courbe A'MB', et dont l'autre coupe aussi à angle droit toutes les normales à la surface du tube, et soit représentée par la courbe OMC, qui rencontre la courbe ANB au point O. De tous les points de l'intersection de ces deux surfaces, abaissons des perpendiculaires, telles que MN, sur la surface du liquide, lesquelles formeront, en général, une surface gauche. En-

fin, par un point F appartenant à la courbe OMC, et situé à une distance insensible au-dessous du point M, menons un plan perpendiculaire à cette courbe, qui coupe le plan de la figure, suivant la droite GFL, laquelle rencontre en G la courbe DKE.

Nous supposerons la longueur de MF assez grande pour que l'action du liquide situé au-dessous de ce plan, représenté par GFL, ne s'étende pas jusqu'à la surface représentée par A'MB'. Nous ferons

$$MK = h, \quad MN = l;$$

et nous supposerons aussi ces distances assez grandes pour que, d'une part, l'action du tube ne s'étende pas jusqu'à la surface représentée par OMC, et celle du liquide situé au-delà de cette surface, jusqu'aux points où la densité varie très rapidement dans le voisinage du tube, et que, d'un autre côté, l'action du liquide situé au-dessous de A'MB' ne s'étende pas non plus jusqu'aux points où la densité varie très rapidement près de la surface supérieure.

Cela posé, pour obtenir les équations qu'il s'agit de trouver, nous allons chercher les conditions d'équilibre de la partie du liquide comprise entre le plan de la figure et un plan parallèle mené à une distance infiniment petite, qui aura pour base le pentagone curviligne ANMFG, et sera terminée latéralement par la surface gauche dont la droite MN est une génératrice, par la surface du liquide, par le plan projeté suivant la droite GF, par la surface du tube et par celle qui coupe toutes ses normales à angle droit. Nous appellerons C cette petite portion du liquide, et nous désignerons par ε son épaisseur constante et infiniment petite. La forme que nous lui supposons est la plus propre à l'objet que nous avons en vue.

(38). Si l'on décompose d'abord chacune des forces qui agissent sur C en deux autres, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de la figure, les composantes perpendiculaires auront des directions opposées; elles se détruiront en grande partie, et se réduiront à des forces insensibles par rapport aux composantes parallèles. L'équation d'équilibre des composantes perpendiculaires déterminerait implicitement la petite variation de densité du liquide qui a lieu parallèlement à la surface du tube, en vertu de la pesanteur; ce qui n'est pas l'objet que nous nous proposons. Nous ne nous

occuperons donc que des forces parallèles au plan de la figure, et nous décomposerons encore chacune d'elles en deux autres, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la droite KM. Si l'on divise C en filets parallèles à KM, l'action du tube, supposé homogène, sur le filet qui répond au point K sera normale à sa surface, et l'on pourra la représenter par $N\varepsilon\varepsilon'$, en désignant par $\varepsilon\varepsilon'$ la base de ce filet; mais il n'en sera pas tout-à-fait de même à l'égard des autres filets, qui ne seront pas rigoureusement perpendiculaires à la surface du tube. En désignant par σ la longueur insensible de AG, il est aisé de voir que la somme des actions du tube sur tous ces filets sera sensiblement égale à $N\varepsilon\sigma$, parallèlement à KM, et pourra se représenter par $\frac{N\varepsilon\sigma^2}{k}$, suivant la direction perpendiculaire à KM; k étant une ligne d'une grandeur sensible, qui dépendra de la courbure du tube au point K. Cela posé, l'équation d'équilibre des forces parallèles à KM servirait à déterminer la valeur de N, laquelle est une inconnue qui ne peut pas s'exprimer par une intégrale définie, d'après ce qu'on a expliqué dans le n° 12. Mais cette force nous étant inutile à connaître, nous n'aurons pas besoin de l'équation dont elle dépend, et il nous restera seulement à considérer l'équilibre des autres composantes.

En désignant, pour abréger, les différentes parties du liquide par celles de la figure auxquelles elles répondent, je représenterai par $S\varepsilon$ l'action exercée par la couche ANMFG sur C qui en fait partie, par $\varpi\varepsilon$ l'action de EGFC, et par P celle de LFC; je désignerai de même par $Q\varepsilon$ l'action de BNMFL, c'est-à-dire l'action de la couche superficielle BNMB′ ajoutée à B′MFL, sur la partie de C qui répond à A′MFG, et par $T\varepsilon$ et $V\varepsilon$ les actions de BNMB′ et de B′MFL sur l'autre partie de C, correspondante à A′MNA; et toutes ces composantes, parallèles au plan de la figure et perpendiculaires à KM, seront supposées dirigées de bas en haut ou vers la surface supérieure du liquide. Relativement à chacune de ces forces, on pourra négliger la composante $\frac{N\varepsilon\sigma^2}{k}$, qui proviendrait de l'action du tube, ainsi que le poids de C; si, de plus, nous supposons le liquide placé dans le vide, ou que nous fassions abstraction de l'action des molécules de l'air atmosphérique

sur celles de C, il faudra, pour l'équilibre de cette petite partie du liquide, que l'on ait

$$S + \varpi + P + Q + T + V = 0. \quad (1)$$

Il s'agira donc de calculer successivement les valeurs des six quantités contenues dans cette équation ; mais, auparavant, je ferai remarquer que chacune d'elles dépendra d'une intégrale quintuple, relative à des variables qui n'auront que des grandeurs insensibles, tandis que les forces qu'on a considérées dans le chapitre précédent étaient exprimées par des intégrales quadruples, relatives à de pareilles variables. On conclut de là que si l'on s'arrête au même degré d'approximation que dans ce chapitre, il sera permis de négliger, sous le signe de l'intégration quintuple, les quantités de l'ordre de celles que l'on a conservées sous le signe de l'intégration quadruple ; il en résulte qu'on pourra, dans le calcul des valeurs de ϖ, P, Q, T, V, faire abstraction de la courbure du liquide, et remplacer la surface supérieure par son plan tangent, et la courbe A'MB' par la tangente au point M. Par la même raison, et à cause que la longueur de AKG est supposée insensible, on pourra aussi négliger la courbure du tube, et considérer les courbes AKG et OMF comme des droites perpendiculaires à KM. Enfin, on négligera encore la petite variation de densité du liquide dans son intérieur, à laquelle, précédemment, on a dû avoir égard ; mais, dans le calcul de la force $\varpi\varepsilon$, il faudra tenir compte de la compression du liquide produite par l'action du tube ; et dans le calcul de $T\varepsilon$, on devra avoir égard à la variation de sa densité près de sa surface supérieure : la partie de AA'MN, dans laquelle cette densité varie à la fois dans le sens normal à cette surface et suivant la perpendiculaire à celle du tube, n'influera pas sur les valeurs de ϖ et T, non plus que sur celles de P et V, à cause des longueurs qu'on a supposées aux distances MB, MN, MK, quoiqu'elles soient toutes trois insensibles.

(39). S'il fallait calculer la valeur de S, il serait nécessaire d'avoir égard à cette double variation de densité, aussi bien qu'à la courbure de AN ; car cette courbure et l'inclinaison de la tangente peuvent varier très rapidement dans la longueur insensible de cette ligne, et être très différentes au point N et plus près du tube ; on

pourrait seulement négliger la variation de densité et la courbure du liquide, parallèlement à la surface du tube. Mais je vais démontrer, sans aucun calcul, que l'on a $S = o$.

En effet, j'appelle C' la couche liquide dont C fait partie, et à laquelle répond la force S. Je décompose C et C' en filets tels que MNO (fig. 11), dont chacun soit composé d'une partie cylindrique NO parallèle à la surface du tube, c'est-à-dire à la direction de la force S, et d'une autre partie NM, d'épaisseur variable, perpendiculaire à la surface AB du liquide, où ils viendront aboutir par en haut. J'appelle f le filet MNO appartenant à C, et f' un autre filet PQR appartenant à C'. Si leurs extrémités M et P sont également éloignées de la surface du tube, les deux filets seront identiquement composés, et il en résultera que si l'on mène au-dessus du liquide un plan GH perpendiculaire à la direction de S, l'action, suivant cette direction, d'un élément de f' situé à une distance s du plan GH, sur un élément de f situé à une distance s', sera égale et contraire à l'action de l'élément de f' situé à la distance s', sur l'élément de f situé à la distance s; par conséquent, l'action totale de f' sur f sera nulle dans le sens que nous considérons. Si, au contraire, les points M et P sont inégalement éloignés de la paroi du tube, je supposerai qu'un autre filet F de C et le filet f' de C' ont leurs extrémités supérieures à la même distance de cette paroi, qu'il en est de même à l'égard du filet f de C et d'un second filet F' de C', et que, de plus, f' et F' appartiennent à un segment de C' parallèle à C. Alors, il est évident que l'action, parallèle à S, exercée par f' sur f sera la même que celle qui serait exercée, dans le même sens, par F sur F', laquelle serait égale et contraire à la réaction de F' sur F; donc les actions, parallèles à S, de f' sur f et de F' sur F sont égales et contraires; et, en joignant cette conclusion à la précédente, on voit que les actions de tous les filets de C' sur tous ceux de C, parallèlement à la surface du tube, se détruisent deux à deux, en sorte qu'on a $S = o$; ce qu'il s'agissait de prouver.

(40). Pour former l'expression de ϖ, j'élève par le point G (fig. 10) une droite perpendiculaire au plan de la figure. Je désigne par x, y, z, les trois coordonnées d'un point quelconque du liquide inférieur, ayant pour origine le point G, et respectivement parallèles

à cette perpendiculaire et aux lignes GL et GE ; relativement à un point quelconque de C, on aura $x = 0$, et l'on pourra représenter ses deux autres coordonnées par y' et $-z'$. En appelant r la distance de ce point à l'autre, on aura

$$r^2 = x^2 + (z + z')^2 + (y - y')^2.$$

Les élémens de volume qui leur correspondent seront $\omega dy'dz'$ et $dxdyds$: j'exprimerai par le produit

$$\varphi(r, y, y')\, \omega dy'dz'dxdyds,$$

leur action mutuelle ; φ étant une fonction dont la valeur sera insensible pour toute valeur sensible de r, symétrique par rapport à y et y', et qui variera aussi très rapidement avec chacune de ces quantités, à raison de la compression du liquide près de la surface du tube. A mesure que y et y' approcheront de GF, qui est la même chose que h, cette fonction approchera d'être indépendante de ces variables, et de se confondre avec la fonction R relative à l'intérieur du liquide, en sorte que si l'on y met $h + u$ et $h - u'$ à la place de y et y', et qu'on suppose u et u' moindres que le rayon d'activité moléculaire, on aura

$$\varphi(r, h + u, h - u') = R.$$

Cela posé, nous aurons

$$\varpi = \iiiint \varphi(r, y, y') \frac{z + z'}{r} dxdydy'dzdz',$$

en considérant la fonction φ comme positive ou comme négative, selon que la force qu'elle représente sera répulsive ou attractive. Par la nature de cette fonction, on pourra étendre les intégrales relatives à z et z' depuis zéro jusqu'à l'infini, et, en même temps, celle qui répond à x sera prise depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; mais les limites relatives à y et y' seront $y = 0$ et $y' = 0$, $y = h$ et $y' = h$.

Soit $\Phi(r, y, y')$ une fonction de la même nature que $\varphi(r, y, y')$, et faisons, pour un moment,

$$\varphi(r, y, y') = \frac{d\Phi(r, y, y')}{dr};$$

nous aurons

$$\varphi(r, y, y') \frac{z + z'}{r} = \frac{d\Phi(r, y, y')}{dz'},$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\infty \varphi(r, y, y')\frac{z+z'}{r}dz' = \Phi(r', y, y'),$$

en désignant par r' la valeur de r qui répond à $z' = 0$, de sorte qu'on ait

$$r'^2 = x^2 + z^2 + (y - y')^2.$$

En intégrant par partie, et observant que Φ s'évanouit à la seconde limite, on aura

$$\int_0^\infty \Phi(r', y, y')dz = \int_0^\infty \varphi(r', y, y')\frac{z^2}{r}dz;$$

et au moyen de ces équations, la valeur de ϖ deviendra

$$\varpi = \iiiint \varphi(r', y, y')\frac{z^2}{r}dxdzdydy'.$$

Soit encore

$$z = \nu\cos\theta, \qquad x = \nu\sin\theta,$$

et, par conséquent,

$$r'^2 = \nu^2 + (y - y')^2.$$

Si l'on substitue ν et θ aux variables x et z, il faudra prendre

$$dxdz = \nu d\nu d\theta;$$

et les limites relatives à x et z étant $x = -\infty$ et $x = \infty$, $z = 0$ et $z = \infty$, celles qui répondent à θ et ν devront être $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\nu = 0$ et $\nu = \infty$. L'intégration relative à θ s'effectuera immédiatement, et il en résultera

$$\varpi = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\infty\int_0^h\int_0^h \varphi(r', y, y')\frac{\nu^3}{r}d\nu dydy'. \qquad (2)$$

Cette intégrale triple ne peut pas se réduire davantage; elle dépendra de la compression du liquide dans la couche adjacente au tube, et, par suite, de la matière du tube et de celle du liquide. Nous conserverons la lettre ϖ à la place de cette expression, et nous regarderons ϖ comme une quantité dont le signe et la valeur devront être donnés dans chaque cas particulier. La limite h peut

être prise arbitrairement, pourvu qu'elle soit insensible et qu'elle surpasse néanmoins les rayons d'activité des molécules du tube et du liquide; mais, d'après ce qu'on a déjà vu dans un cas pareil (n° 28), la valeur de l'intégrale précédente ne changera pas avec celle de h.

(41). L'expression de P se déduira évidemment de celle de ϖ, en transportant l'axe des x au point F, faisant

$$y = h + u, \quad y = h - u', \quad dy = du, \quad dy' = -du',$$

et changeant la fonction φ dans la fonction R relative à l'intérieur du liquide. D'après la formule (2), on aura donc

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\infty \int_0^h \int_0^h \mathrm{R}\, \frac{v^3}{r'}\, dv du du',$$
$$r'^2 = v^2 + (u + u')^2.$$

Cette valeur de r'^2 permettra de remplacer les limites h par l'infini, dans les intégrations relatives à u et u'; et comme la quantité R est la même que celle qui entre dans l'expression de q du n° 23, on en conclura

$$\mathrm{P} = -q.$$

Pour calculer T, j'observe que la densité du liquide étant la même parallèlement à sa surface, dans toute l'étendue de l'action de B'MNB sur la partie de C qui répond à A'MNA, et ne variant que dans le sens de la normale MN, il s'ensuit que la composante de cette force sera nulle suivant cette droite, aussi bien que suivant la perpendiculaire au plan de la figure. Cette force elle-même sera dirigée dans ce plan et suivant la perpendiculaire à MN; je la désignerai par $\mathrm{U}\epsilon$, en supposant qu'elle agisse de dehors en dedans de la partie de C. En appelant ω l'angle KMN compris entre les perpendiculaires MK et MN à la surface du tube et à celle du liquide, la composante de cette force, parallèle à MO et dirigée par en haut, aura pour valeur $-\mathrm{U}\epsilon \cos\omega$. Or, cette composante est la force qu'on vient de représenter par $\mathrm{T}\epsilon$; on aura donc

$$\mathrm{T} = -\mathrm{U}\cos\omega.$$

Quant à la valeur de U, elle se déduira, sans nouveaux calculs, de

celle de ϖ, en y remplaçant h par l, et la fonction $\varphi(r', y, y')$ par une autre fonction $\downarrow(r', y, y')$, dépendante de la variation de densité du liquide suivant l'épaisseur de sa couche superficielle. Nous aurons, par conséquent,

$$U = \frac{1}{2}\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l \downarrow(r', y, y') \frac{v^2}{r} dv dy dy'.$$

D'ailleurs, en mettant $l - s$, $l - s_1$, u, au lieu de y, y', v, dans cette fonction $\downarrow$, elle sera précisément celle qui est représentée par R_1 dans l'expression de q_1 du n° 27, lorsqu'il s'agit, comme ici, d'un seul liquide placé dans le vide. On conclut de là $U = -q_1$, et par suite

$$T = q_1 \cos\omega.$$

D'après ces valeurs de P et T, et à cause de $S = 0$, l'équation (1) devient

$$\varpi - q + q_1 \cos\omega + Q + V = 0; \quad (3)$$

et il ne restera plus que Q et V à déterminer.

(42). Pour plus de généralité, considérons deux prismes liquides qui ont une arête commune d'une longueur indéfinie, et dont les faces adjacentes à cette arête se prolongent aussi indéfiniment. Soient ACB et B'CA' (fig. 12) les sections de ces deux corps, par un plan perpendiculaire à cette arête. Par le point C appartenant à cette arête, menons dans ce plan une droite DCE, et faisons

$$ECA = a, \quad ECB = b, \quad DCA' = a', \quad DCB' = b';$$

chacun de ces angles étant supposé positif ou négatif, selon qu'il tombe à droite ou à gauche de la droite DE. Appelons $Z\varepsilon$ l'action exercée parallèlement à DE et dirigée de bas en haut, par le prisme dont la section est ACB sur un segment de l'autre prisme, compris entre le plan de la figure et un plan parallèle, mené à une distance infiniment petite et égale à ε. Les valeurs de Q et V se déduiront de celle de Z, en déterminant convenablement a, b, a', b'. Il s'agit donc de trouver l'expression de Z en fonction de ces angles.

Pour cela, soient M et M' des points appartenant respectivement à ACB et à A'CB', et compris dans la sphère d'activité l'un de l'autre.

Si nous faisons

$$\text{ACM} = v, \quad \text{A'CM'} = v', \quad \text{CM} = u, \quad \text{CM'} = u',$$

le carré de la distance MM' aura pour valeur

$$u^2 + u'^2 + 2uu' \cos(v + v');$$

et si l'on désigne par r la distance M'm au point M', d'un autre point m dont M soit la projection sur le plan de la figure, et dont la distance à M soit représentée par x, on aura

$$r^2 = x^2 + u^2 + u'^2 + 2uu' \cos(v + v').$$

Les élémens de volume correspondans à ces points M' et m auront pour expressions $\epsilon u'du'dv'$ et $\epsilon dudxdv$; et si le liquide dont sont formés les deux prismes est le liquide intérieur auquel répond la force Q, leur action mutuelle, dirigée suivant la droite M'm, devra être représentée par le produit

$$\mathrm{R}\epsilon uu'dxdudu'dvdv';$$

R étant la même fonction de r que dans le numéro précédent.

La somme des projections de u et u' sur la droite DE, ou la partie NN' de cette droite interceptée entre les perpendiculaires MN et M'N', sera égale à $u\cos v + u'\cos v'$; en la divisant par r, on aura le cosinus de l'angle que fait la droite M'm avec la direction de CD; par conséquent, on aura

$$\mathrm{Z} = 2\iiiint \mathrm{R}\frac{u\cos v + u'\cos v'}{r}\, uu'dxdudu'dvdv'.$$

L'intégrale relative à x s'étendra seulement depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, parce que l'on a doublé le résultat; les intégrales relatives à u et u' seront aussi prises depuis $u = 0$ et $u' = 0$ jusqu'à $u = \infty$ et $u' = \infty$. Quant aux intégrales qui répondent à v et v', elles auront pour limites les angles a, b; a', b'; et comme les élémens de volume dont on a fait usage supposent les différentielles dv et dv' positives, et, par conséquent, les angles v et v' croissant dans ces intégrations, il faudra toujours prendre pour la première limite relative à v, le plus petit des deux angles a et b, en ayant égard à leurs signes, et pour la limite relative à v', le moindre des deux angles a' et b'.

Cela posé, l'intégrale quintuple se réduira à une intégrale simple, par l'analyse suivante.

(43). Je mets xu, xu', xdu, xdu', à la place de u, u', du, du'; ce qui ne change rien aux limites zéro et l'infini des intégrales relatives à u et u'. Il en résulte

$$Z = 2\iiiint R \frac{u\cos\nu + u'\cos\nu'}{r} x^5 uu' dx du du' d\nu d\nu',$$

$$r^2 = x^2[1 + u^2 + u'^2 + 2uu'\cos(\nu+\nu')].$$

Cette dernière équation donne

$$x^5 dx = \frac{r^5 dr}{[1+u^2+u'^2+2uu'\cos(\nu+\nu')]^3},$$

les limites relatives à r seront aussi $r = 0$ et $r = \infty$, et la valeur de Z deviendra

$$Z = 2k\int_0^\infty R r^4 dr = -\frac{16}{\pi} qk,$$

en faisant, pour abréger,

$$k = \iiiint \frac{(u\cos\nu + u'\cos\nu')\,uu'}{[1+u^2+u'^2+2uu'\cos(\nu+\nu')]^3} du du' d\nu d\nu',$$

et ayant égard à la valeur de q du n° 24.

Si nous faisons maintenant

$$u = \rho\cos\theta, \quad u' = \rho\sin\theta, \quad du du' = \rho d\rho\, d\theta,$$

les limites relatives à ρ et θ seront $\rho = 0$ et $\rho = \infty$, $\theta = 0$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi$, et nous aurons

$$k = \iiiint \frac{\rho^4(\cos\theta\cos\nu + \sin\theta\cos\nu')\cos\theta\sin\theta}{\{1+\rho^2[1+2\cos\theta\sin\theta\cos(\nu+\nu')]\}^3} d\rho d\theta d\nu d\nu',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$k = \int_0^\infty \frac{\rho^4 d\rho}{(1+\rho^2)^3} \iiint \frac{(\cos\theta\cos\nu + \sin\theta\cos\nu')\cos\theta\sin\theta}{[1+2\cos\theta\sin\theta\cos(\nu+\nu')]^{\frac{5}{2}}} d\theta d\nu d\nu',$$

en mettant ρ divisé par $\sqrt{1+2\cos\theta\sin\theta\cos(\nu+\nu')}$ à la place de ρ, ce qui ne change rien aux limites.

Par les règles ordinaires, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\rho^4 d\rho}{(1+\rho^2)^3} = \frac{3\pi}{16}.$$

L'intégrale relative à θ s'obtient aussi, mais moins simplement. Je fais d'abord

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi + \theta';$$

il en résulte

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta' - \sin\theta'), \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta' + \sin\theta');$$

et si l'on appelle g l'intégrale qu'il s'agit d'obtenir, on aura

$$g = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\cos\theta\cos\nu + \sin\theta\cos\nu')\cos\theta\sin\theta}{[1+2\cos\theta\sin\theta\cos(\nu+\nu')]^{\frac{5}{2}}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{(\cos\nu + \cos\nu')\cos\theta' - (\cos\nu - \cos\nu')\sin\theta'}{[1+\cos 2\theta'\cos(\nu+\nu')]^{\frac{5}{2}}} \cos 2\theta' d\theta'.$$

On peut supprimer la partie de cette dernière intégrale qui renferme le facteur $\sin\theta'$ sous le signe $\int$, et qui se composerait d'élémens deux à deux égaux et de signes contraires; on peut aussi, en doublant le résultat, prendre $\theta' = 0$ et $\theta' = \frac{1}{4}\pi$ pour limites de l'autre partie; et si l'on y fait, en outre,

$$\sin\theta' = y, \quad \cos\theta' d\theta' = dy, \quad \cos 2\theta' = 1 - 2y^2,$$

on aura simplement

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(\cos\nu + \cos\nu')(1-2y^2)\, dy}{[1+\cos(\nu+\nu') - 2y^2\cos(\nu+\nu')]^{\frac{5}{2}}}.$$

En effectuant cette intégration par les règles ordinaires, il vient

$$g = \frac{\cos\nu + \cos\nu'}{3[1+\cos(\nu+\nu')]^2}.$$

Au moyen de ces valeurs des intégrales relatives à ρ et à θ, la valeur de k devient

$$k = \frac{\pi}{16}\int_a^b\int_{a'}^{b'} \frac{(\cos\nu + \cos\nu')\,d\nu d\nu'}{[1+\cos(\nu+\nu')]^2}.$$

(44). On a identiquement

$$\frac{\cos\nu+\cos\nu'}{1+\cos(\nu+\nu')} = \cos\nu' + \frac{\sin(\nu+\nu')\sin\nu'}{1+\cos(\nu+\nu')},$$

et, par conséquent,

$$\int_{a'}^{b'} \frac{(\cos\nu+\cos\nu')\,d\nu'}{[1+\cos(\nu+\nu')]^2} = \int_{a'}^{b'} \frac{\cos\nu'\,d\nu'}{1+\cos(\nu+\nu')} + \int_{a'}^{b'} \frac{\sin(\nu+\nu')\sin\nu'\,d\nu'}{[1+\cos(\nu+\nu')]^2}.$$

En intégrant par partie, on a aussi

$$\int_{a'}^{b'} \frac{\sin(\nu+\nu')\sin\nu'\,d\nu'}{[1+\cos(\nu+\nu')]^2} = \frac{\sin b'}{1+\cos(\nu+b')} - \frac{\sin a'}{1+\cos(\nu+a')} - \int_{a'}^{b'} \frac{\cos\nu'\,d\nu'}{1+\cos(\nu+\nu')};$$

et si l'on ajoute cette équation à la précédente, il en résulte

$$\int_{a'}^{b'} \frac{(\cos\nu+\cos\nu')\,d\nu'}{[1+\cos(\nu+\nu')]^2} = \frac{\sin b'}{1+\cos(\nu+b')} - \frac{\sin a'}{1+\cos(\nu+a')};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{16k}{\pi} = \sin b' \int_a^b \frac{d\nu}{1+\cos(\nu+b')} - \sin a' \int_a^b \frac{d\nu}{1+\cos(\nu+a')}.$$

J'effectue ces intégrations par les règles ordinaires, puis je substitue la valeur de k qui en résulte dans celle de Z; il vient finalement

$$Z = q\left\{\sin b'\left[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b') - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+b')\right] - \sin a'\left[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+a') - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+b)\right]\right\}. \quad (4)$$

Si l'on eût intégré d'abord par rapport à ν, et ensuite par rapport à ν', on aurait trouvé cette autre formule :

$$Z = q\left\{\sin b\left[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+b) - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+b')\right] - \sin a\left[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+a') - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b')\right]\right\}, \quad (5)$$

qui doit être équivalente à la précédente.

Dans les applications qu'on fera de ces deux formules, on se souviendra que les différences $b - a$ et $b' - a'$ sont supposées toutes deux positives.

Relativement à la quantité V du n° 38, il faudra prendre les lignes MF, MB', MA', MN, de la figure 10, au lieu des droites CA, CB, CA', CB', de la figure 12, et la ligne FMO à la place de l'axe ECD, à partir duquel sont comptés les angles a, a', b, b'. On aura alors

$$a = 0, \quad b = \text{FMB}' = \pi - \omega,$$
$$a' = \text{A}'\text{MO} = \omega - \pi, \quad b' = \text{OMN} = \omega - \tfrac{1}{2}\pi;$$

ω étant, comme dans le n° 41, l'angle KMN, obtus ou aigu, mais toujours compris entre zéro et π, ce qui rend positives les différences $b - a$ et $b' - a'$. Il en résultera immédiatement

$$\text{V} = -q \sin \omega,$$

quand on fait usage de la formule (5). Lorsqu'on emploie la formule (4), on trouve

$$\text{V} = q \left[\cos \omega \operatorname{tang} \left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\omega \right) + \cos \omega - \sin \omega \cot \tfrac{1}{2}\omega \right];$$

quantité qu'on peut effectivement réduire à $-q \sin \omega$. Dans le cas particulier de $\omega = \frac{1}{2}\pi$, la figure 10 montre que la force V est égale à la force P du n° 38, dont la valeur est, en effet, $\text{P} = -q$.

(45). La quantité Z devient, en général, infinie, lorsque l'une des sommes $a + a'$, $b + b'$, $a + b'$, $a' + b$, est égale à $\pm\pi$; ce qui tient à ce que les deux prismes ont alors une face commune, et qu'on a supposé leurs faces infinies. Mais si, en même temps, l'un des angles a, b, a', b', est zéro ou $\pm\pi$, le terme qui rendrait la valeur de Z infinie se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et est réellement indéterminé; circonstance qui exige une attention particulière.

Supposons, par exemple, que les droites CA et CA' se confondent avec CE (fig. 13), en sorte que $Z\epsilon$ exprime l'action exercée, suivant la direction CD, par le prisme dont la section est BCE, sur la

couche liquide située à gauche de DCE et augmentée ou diminuée d'une partie correspondante à l'angle DCB′, selon que la droite CB′ tombe à droite ou à gauche de CD, c'est-à-dire selon que l'angle b' est positif ou négatif. On aura alors

$$a = 0, \quad a' = -\pi, \quad b = \text{ECB}, \quad b' = \text{DCB}';$$

et en faisant

$$\sin a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + a') = x, \qquad \sin a' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a + a') = x',$$

les formules (4) et (5) deviendront

$$Z = q\left[\sin b' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b' - \sin b' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(b + b') - x'\right],$$

$$Z = -q\left[\sin b \cot \tfrac{1}{2} b + \sin b \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(b + b') + x\right].$$

Or, x et x' dépendant de deux quantités a et a' indépendantes entre elles, on ne saurait déterminer, *à priori*, les véritables valeurs de x et x', qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ pour les valeurs particulières $a = 0$ et $a' = -\pi$; mais il y a un cas dans lequel on a évidemment $Z = 0$, ce qui suffit pour la détermination des inconnues x et x'. Ce cas a lieu quand on fait coïncider CB et CB′ avec les deux parties CG et CG′ de la perpendiculaire à DCE menée par le point C; car il est évident que l'action de GCE sur G′CE est nulle suivant la direction CD. Si l'on fait

$$b = \text{ECG} = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad b' = \text{DCG}' = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

il faudra donc qu'on ait $Z = 0$; d'où l'on conclut $x = -1$, $x' = 1$. Par conséquent, on aura

$$Z = q\left[\sin b' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b' - \sin b' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(b + b') - 1\right],$$

$$Z = -q\left[\sin b \cot \tfrac{1}{2} b + \sin b \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(b + b') - 1\right].$$

On vérifie sans peine l'égalité de ces deux valeurs; nous prendrons leur demi-somme pour l'expression de Z, que l'on pourra

écrire ainsi :

$$Z = -\tfrac{1}{2}q(\cos b + \cos b') - \tfrac{1}{2}q(\sin b + \sin b')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+b'). \quad (6)$$

On vérifie aussi, non pas chacune des valeurs de x et x', mais leur différence; car, à cause de

$$\sin a' - \sin a = 2\sin\tfrac{1}{2}(a'-a)\cos\tfrac{1}{2}(a+a'),$$

cette différence est

$$x' - x = 2\sin\tfrac{1}{2}(a'-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+a'),$$

et, par conséquent, $x' - x = 2$, dans le cas de $a = 0$, $a' = -\pi$.

Si l'on fait coïncider la droite CB′ avec le prolongement CF de la droite CB, on aura $b' = -b$; ce qui réduira la formule (6) à

$$Z = -q\cos b;$$

$Z\epsilon$ étant alors l'action exercée, suivant la direction CD, par le prisme qui répond à BCE sur la couche liquide correspondante à FCE. En prenant pour b le supplément $\pi - \omega$ de l'angle qui a été désigné par ω dans le n° 18, la force Q, dont on a calculé la valeur dans ce numéro, sera l'intégrale de $-Zds$ étendue à tous les élémens ds du contour de la couche liquide, sur laquelle cette force s'exerce. Or, à cause que la constante q est ici la même que dans le n° 18, on voit que cette valeur

$$Q = -\int Zds = -q\int\cos\omega ds,$$

coïncide avec la formule (10), que l'on a obtenue d'une autre manière.

La formule (6), ainsi que chacune des équations (4) et (5), suppose que les faces des prismes s'étendent à l'infini; ce qui n'a pas lieu dans le cas de la force $Q\epsilon$ du n° 38. Mais si l'on prolonge indéfiniment les lignes OF et AG au-dessous de la droite GL (fig. 10), on n'altérera pas la valeur de $Q\epsilon$; car, par là, on y ajoutera l'action de CFL sur le prolongement de C, qui est nulle suivant FO, et les actions de LFMB′ sur ce prolongement et de LFC sur C, qui sont égales et contraires. Nous pouvons donc appliquer la for-

mule (6) à la quantité Q; et, pour cela, il y faudra faire

$$b' = \mathrm{OMA}' = \omega - \pi, \qquad b = \mathrm{FMN} = \frac{3}{2}\pi - \omega;$$

ω étant le même angle KMN que dans la valeur de V du numéro précédent. De cette manière, on trouve

$$Q = q(\sin\omega + \cos\omega);$$

on aura, par conséquent,

$$V + Q = q\cos\omega; \qquad (7)$$

et l'équation (3) deviendra finalement

$$q - \varpi = (q + q_1)\cos\omega. \qquad (8)$$

(46). Les normales à la surface du tube et à celle du liquide, menées par le point O, étant sensiblement parallèles aux droites MK et MN, on peut rapporter cette dernière équation à ce point même de la surface du liquide. Ainsi, en un point quelconque O de la surface capillaire, dont la distance à la paroi du tube est insensible, mais plus grande que les rayons d'activité des molécules du tube et du liquide, l'angle ω compris entre la partie extérieure de la normale au liquide et la perpendiculaire abaissée du même point sur la paroi voisine du tube, est indépendant de la courbure du tube et donné par l'équation (8).

Dans ce qui précède, nous avons supposé qu'il s'agissait de la surface libre d'un liquide placé dans le vide; mais on parviendra à un résultat semblable, si l'on suppose que le point O appartienne à la surface de séparation de deux fluides quelconques, pourvu qu'il soit toujours situé à une distance insensible de la paroi du tube: il sera facile, en effet, de voir comment l'équation (8) devra être modifiée.

Nous supposerons, dans ce cas général, que les quantités q et ϖ appartiennent au liquide inférieur; nous désignerons par q' et ϖ' ce que ces quantités deviennent relativement au liquide supérieur, en sorte que ϖ' soit une force provenant de l'action du tube sur la couche adjacente de ce liquide, et dirigée en sens contraire de la

force ϖ du n° 38, nous étendrons, comme dans le n° 27, l'intégrale représentée par q, aux couches adjacentes des deux liquides; enfin, nous désignerons par φ l'angle compris entre la partie de la normale à cette surface, contenue dans le liquide supérieur, et la perpendiculaire à la paroi du tube, menées l'une et l'autre par le point O. On verra, sans peine, que l'équation (8) devra être remplacée par celle-ci :

$$q - \varpi - q' + \varpi' = (q + q' + q_1)\cos\varphi,$$

c'est-à-dire

$$K = G\cos\varphi, \qquad (9)$$

en faisant

$$q - \varpi - q' + \varpi' = \tfrac{1}{2}K, \quad q + q' + q_1 = \tfrac{1}{2}G. \qquad (10)$$

Le coefficient G entre déjà dans l'équation (7) de la surface capillaire (n° 29); le coefficient K est une autre constante qui dépendra de la matière des deux liquides et de celle du tube, à raison des quantités ϖ et ϖ'. Si l'on appelle F et F' les valeurs de K qui auraient lieu relativement au liquide inférieur et au liquide supérieur, considérés isolément, on aura

$$K = F - F';$$

en sorte que la valeur générale de K peut se conclure de ses deux valeurs particulières, ce qui n'a pas lieu à l'égard du coefficient G.

L'angle φ sera constant pour tous les points du contour de la surface capillaire, si toutefois le tube est homogène. Si la matière du tube variait par degrés insensibles, l'angle φ varierait de même, et serait toujours déterminé, en chaque point, par l'équation (9). Réciproquement, quand cet angle sera donné par l'observation, il fera connaître la valeur correspondante et le signe du rapport de K à G.

(47). L'équation relative au contour de chaque surface capillaire servira à déterminer les fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale de l'équation de cette surface; mais cette dernière équation étant du second ordre, son intégrale complète renfermera deux fonctions, et il faudra deux conditions particulières pour les détermi-

ner. Or, la projection du contour sur le plan des x et y sera toujours une courbe fermée. Il y aura donc deux valeurs de y en fonctions de x, qui répondront à cette courbe, et l'équation du contour devant subsister pour chacune de ces deux valeurs, sera réellement double, et fournira les deux équations nécessaires. Dans ces calculs, on pourra prendre, sans erreur sensible, pour la projection du contour de la surface capillaire, celle de son intersection avec la paroi du tube.

Si l'on a placé dans l'intérieur du tube un autre corps solide, un cylindre, par exemple, qui traverse le tube suivant sa longueur, l'équation du contour aura lieu relativement à la surface extérieure de ce cylindre et à la surface intérieure du tube. Toutefois, pour qu'elle s'applique à la surface du cylindre, il faudra que son diamètre ait une grandeur sensible; car cette équation suppose que les rayons de courbure de la surface du corps solide, contre laquelle le liquide s'appuie, soient extrêmement grands et comme infinis par rapport au rayon d'activité moléculaire; condition sans laquelle il n'aurait pas été permis de considérer, dans l'analyse précédente, la surface de ce corps comme un plan, dans toute l'étendue d'activité de ses molécules et de celles du liquide. En supprimant le tube, on aura le cas d'un liquide qui s'élève ou s'abaisse autour d'un corps solide.

En substituant aux variables x et y, les coordonnées polaires du point auquel elles appartiennent, c'est-à-dire son rayon vecteur r et l'angle θ, qu'il fait avec un axe fixe, l'ordonnée z sera une fonction de r et θ qui ne devra pas devenir infinie pour $r = 0$, lorsque l'origine de ce rayon sera la projection horizontale de l'un des points de la surface capillaire, et qui devra être nulle pour $r = \infty$, quand il s'agira d'un liquide indéfiniment prolongé, dans lequel on aura plongé l'une des extrémités d'un corps solide. Ces conditions pourront remplacer, en partie, celles qui résulteraient de l'équation relative au contour de chaque surface capillaire.

On conclut de là que les équations des surfaces capillaires qu'on a données dans les n°s 29 et 30, celles qui appartiennent à leurs contours, l'équation indiquée dans le n° 30 et relative au volume du liquide supérieur, quand il y a deux liquides superposés, et, si l'on veut, les conditions particulières à $r = 0$ et $r = \infty$, seront, dans tous les cas,

en nombre suffisant pour la détermination complète de la surface d'un ou de plusieurs liquides, dans l'intérieur ou autour d'un corps solide. Ces diverses équations renferment donc la solution complète du problème, qui ne peut plus présenter maintenant que des difficultés d'analyse : on peut les regarder comme insurmontables dans le cas d'une solution rigoureuse et d'un corps de figure quelconque, à cause de la forme compliquée de l'intégrale générale dont il faudrait partir, qui comprend, comme cas particulier, celle de l'équation relative à la surface de l'aire *minima*, et qui s'obtient, sous forme finie, par le même procédé ; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse déduire de ce système d'équations différentielles, comme on le verra dans les deux chapitres suivans, des formules applicables aux nombreux et très divers phénomènes de capillarité, que les physiciens ont observés.

(48). Si l'on suppose que la surface intérieure du tube soit celle d'un cylindre vertical, la ligne OMFC sera droite et verticale dans toute sa longueur ; et il ne sera plus nécessaire, pour l'exactitude de l'analyse précédente, de prendre le point F, comme nous l'avons fait, à une distance insensible du point M. Supposons donc que le plan représenté par GFL, qui sera, dans ce cas, un plan horizontal, soit mené à une distance quelconque au-dessous de la surface AOB du liquide, et représentons par α sa distance au plan du niveau extérieur. Considérons le volume du liquide qui répond à LFMNB, lequel sera sensiblement le même que celui du cylindre vertical, tronqué par la surface capillaire, qui répond à LFOB. Soit $gp\alpha\mathfrak{C} + \Delta$ son poids ; $\mathfrak{C}$ étant la base de ce cylindre, g la gravité, ρ la densité du liquide, et Δ la partie de ce poids soulevé ou abaissé par l'action capillaire, selon que cette quantité Δ sera positive ou négative. L'autre partie $gp\alpha\mathfrak{C}$ du poids dont il s'agit sera tenue en équilibre par la pression exercée en sens contraire sur la base $\mathfrak{C}$, et qui représentera l'action du liquide situé au-dessous du plan GFL, sur la portion de liquide que nous considérons ; il faudra donc que le poids Δ soit soutenu par l'action verticale de la couche environnante et qui correspond à GFMNA, sur cette même portion de liquide. Or, l'action de chaque segment C de cette couche est égale et contraire à la somme des forces qu'on a représentées précédemment par T_ϵ, V_ϵ et Q_ϵ (n° 38);

si donc on appelle c le contour de la base $\mathfrak{C}$, ou, sensiblement, celui d'une section horizontale de la paroi du tube, et si l'on observe que les forces $T\varepsilon$, $V\varepsilon$ et $Q\varepsilon$ sont constantes pour tous les segmens C de la couche liquide, il faudra qu'on ait

$$\Delta + (V + Q + T)c = 0,$$

ou bien, en vertu de l'équation (8) et de la valeur de T du n° 41,

$$\Delta + (q + q_1)c\cos\omega = 0;$$

résultat qui coïncide avec l'équation (16) du n° 36, en observant que le liquide étant placé dans le vide, $q + q_1$ est la valeur du coefficient $\frac{1}{2}$H.

Cet accord remarquable entre deux moyens aussi différens de déterminer le poids du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire, dans le cas d'un tube cylindrique et vertical, peut servir de vérification à notre analyse; mais il faut remarquer que la méthode qui nous a conduit à l'équation (16) est la plus directe, et qu'elle est aussi la plus générale, en ce qu'elle ne suppose au tube aucune forme particulière.

CHAPITRE IV.

Équilibre d'un ou de plusieurs liquides dans un tube capillaire.

(49). Je supposerai d'abord qu'il n'y ait qu'un seul liquide homogène et partout à la même température, ainsi que le tube de forme quelconque que l'on y a plongé par son extrémité inférieure, et je vais réunir, dans ce numéro, les formules relatives à l'équilibre de ce liquide, que l'on a obtenues en différens endroits des deux chapitres précédens.

L'équation commune à tous les points de la surface libre du liquide, qui sont à une distance des parois du tube plus grande que le rayon d'activité moléculaire, est

$$g\rho z = \tfrac{1}{2} H \left(\tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{\lambda'}\right); \quad (1)$$

le plan des x et y est celui du niveau du liquide en-dehors du tube; l'ordonnée verticale z est positive ou négative, selon que le point quelconque M auquel elle répond se trouve au-dessus ou au-dessous du niveau; λ et λ' sont les rayons de courbure principaux de la surface au point M, et ils sont regardés comme positifs ou comme négatifs, selon que les lignes de courbure tournent leur concavité ou leur convexité en-dehors du liquide; ρ est la densité du liquide, ou, plus exactement, cette densité diminuée de celle de l'air, quand le liquide n'est pas placé dans le vide; on suppose alors que la pression atmosphérique est la même en-dehors et en-dedans du tube; enfin, g représente la pesanteur, et H un coefficient constant donné par l'expérience, et qui dépend de la matière et de la température du liquide.

Les formules relatives à la courbure des surfaces donnent

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}=\frac{\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy}+\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dy^2}}{\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad (2)$$

et, pour que cette valeur de $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}$ ait le signe convenable, il faudra regarder son dénominateur, dont le signe est ambigu, comme positif ou comme négatif, selon que la normale menée par le point M, en-dehors du liquide, et la verticale menée par le même point, en sens contraire de la pesanteur ou dans le sens des z positives, feront un angle aigu ou obtus.

Relativement à un point quelconque O du contour de la surface du liquide, c'est-à-dire relativement à tous les points de cette surface qui sont à une distance insensible de celle du tube, mais toujours plus grande que les rayons d'activité des molécules du tube et du liquide, on a cette équation

$$F = H \cos \omega, \quad (3)$$

dans laquelle ω sera l'angle aigu ou obtus, compris entre la partie extérieure de la normale au liquide menée par le point O, et la perpendiculaire abaissée du même point sur la paroi du tube la plus voisine de O : H est le même coefficient que dans l'équation (1), et F une autre constante, aussi donnée par l'expérience et dépendante de la nature du liquide et de celle du tube.

Si l'on abaisse de tous les points de ce contour, des perpendiculaires sur le plan des x et y, qui formeront la surface d'un cylindre vertical; que l'on appelle c le contour de sa base, c'est-à-dire la projection horizontale du contour de la surface capillaire, et que l'on appelle Δ le poids dans l'air d'un volume du liquide égal à la partie de ce cylindre comprise entre sa base et la surface capillaire, on aura

$$\Delta = -\frac{1}{2} Hc \cos \omega,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Delta = -\frac{1}{2} cF; \quad (4)$$

Δ étant regardé comme positif ou comme négatif, selon que la sur-

face du liquide sera située au-dessus ou au-dessous du plan des x et y. Quand elle sera coupée par ce plan, Δ sera composé de deux parties, l'une positive et l'autre négative, et pourra, conséquemment, être nul, positif ou négatif.

Quoique les deux constantes F et H ne puissent être données, comme nous l'avons dit, que par l'observation, il ne sera cependant pas inutile de rappeler les formules qui serviraient à les déterminer, *à priori*, si les lois des actions moléculaires étaient connues en fonctions des distances. En faisant

$$\frac{1}{2}\mathrm{H} = q + q_1, \qquad \frac{1}{2}\mathrm{F} = q - \varpi,$$

et regardant r comme une quantité positive donnée par l'équation

$$r^2 = u^2 + (s - s')^2,$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{1}{8}\pi \int_0^\infty \mathrm{R} r^4 dr, \\ q_1 &= -\frac{1}{2}\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l \mathrm{R}_1 \frac{u^3}{r}\, du ds ds', \\ \varpi &= \frac{1}{2}\pi \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l \mathrm{R}' \frac{u^3}{r}\, du ds ds'. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dans ces formules, R, R', R_1, sont des fonctions de r insensibles pour toute valeur sensible de cette variable, qui expriment l'action mutuelle des molécules liquides à la distance r et rapportée aux unités de volume, et qu'on regarde comme positives ou comme négatives, selon que cette force est répulsive ou attractive : R se rapporte à l'intérieur du liquide, R_1 à sa couche superficielle, et R' à sa couche adjacente à la paroi du tube. Ces deux quantités R_1 et R' sont, en outre, des fonctions symétriques de s et s', qui varient très rapidement avec ces variables, et se confondent avec la fonction R, dès que s et s' surpassent le rayon d'activité moléculaire. La limite l des intégrales relatives à s et s' doit être de grandeur insensible, mais plus grande que ce rayon, et l'on peut supposer qu'elle soit la même pour q_1 et pour ϖ. On démontre que ces quantités ne changent pas sensiblement avec la grandeur de l; et l'on fait aussi voir qu'on aurait

$$q_1 = -2q, \qquad \varpi = 2q,$$

si l'on faisait abstraction de la variation de densité dans l'épaisseur de la couche liquide à laquelle répond chacune de ces quantités, et que l'on regardât, en conséquence, chacune des fonctions R, et R′ comme indépendante de s et s' en-dehors de r.

A la rigueur, si le liquide n'est pas placé dans le vide, l'intégrale représentée par q, devrait s'étendre à la couche atmosphérique adjacente à sa surface, et l'expression de H devrait contenir un troisième terme, relatif à l'action mutuelle des molécules d'air dont cette couche est formée. Mais l'observation ayant prouvé que les phénomènes capillaires sont les mêmes dans le vide et dans l'air, il paraît que ce troisième terme n'a aucun effet sensible, non plus que la partie de q, qui proviendrait de l'action mutuelle des molécules de l'air et du liquide; et, pour cette raison, nous n'y aurons point égard.

(50). Voici actuellement les conséquences les plus générales qui résultent des formules précédentes.

L'équation (1) montre que la surface du liquide ne pourra rester plane, à moins qu'elle ne soit horizontale et qu'elle ne coïncide avec le plan du niveau extérieur. En vertu de l'équation (3), il faudra, pour cela, qu'on ait $F = 0$; réciproquement, quand cette condition aura lieu, on satisfera aux équations (1) et (3), en prenant $z = 0$, et il n'y aura ni élévation ni abaissement du liquide, dont la surface demeurera horizontale. Mais j'ai déjà remarqué (n° 20) qu'on ne peut pas déterminer, *à priori*, la proportion des actions moléculaires du tube et du liquide que ce cas particulier suppose.

Quel que soit le signe de H, il résulte de l'équation (4) qu'il y aura, en général, élévation ou abaissement du liquide, selon que F sera négatif ou positif, à moins que la surface du liquide dans l'intérieur du tube ne soit coupée par le plan du niveau extérieur, auquel cas il y aura à la fois élévation d'une partie du liquide et abaissement dans une autre partie.

Si la surface intérieure du tube est celle d'un cylindre vertical, Δ exprimera le poids du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire; il ne changera pas lorsqu'on inclinera le tube (n° 36); et, pour un même liquide et différens tubes de même matière, il sera proportionnel, en vertu de l'équation (4), au contour c d'une section horizontale de la surface intérieure de chaque tube. Si l'on appelle b

l'aire de cette section, et k l'ordonnée moyenne de la surface du liquide, on aura

$$\Delta = gpbk,$$

et, par conséquent,

$$k = -\frac{F}{2g\rho}\frac{c}{b}.$$

Or, pour des cylindres ou des prismes semblables, l'aire b est proportionnelle au carré de c; l'élévation moyenne k du liquide au-dessus de son niveau extérieur, sera donc de même signe que F, en raison inverse du contour c, ou, plus généralement, en raison inverse des lignes homologues des sections horizontales, qu'on suppose être des figures semblables.

(51). Maintenant, considérons, en particulier, le cas le plus ordinaire, celui d'un tube capillaire dont la surface intérieure est celle d'un cylindre vertical à base circulaire, et qui a son extrémité inférieure plongée dans un liquide homogène.

La surface capillaire sera alors une surface de révolution ayant pour axe celui du tube; au point où elle coupera cette droite, et que j'appellerai C, ses deux rayons de courbure seront égaux et de même signe. En appelant γ leur valeur commune, on aura donc $\lambda = \lambda' = \gamma$; et l'on devra considérer γ comme positif ou comme négatif, selon qu'au point C le liquide sera concave ou convexe. Si l'on désigne par h l'ordonnée verticale de ce point C, positive ou négative, selon qu'il sera situé au-dessus ou au-dessous du niveau du liquide en-dehors du tube, on aura, d'après l'équation (1),

$$h = \frac{H}{g\rho\gamma}. \quad (6)$$

A cause qu'il est indispensable d'avoir égard, en même temps, à l'attraction mutuelle des molécules fluides et à leur répulsion calorifique, ainsi que nous l'avons prouvé dans le chapitre premier de cet ouvrage, il s'ensuit qu'on ne saurait déterminer, *à priori*, le signe de H; car la force, d'où dépendent les deux parties q et q_1 de cette quantité, change alors de signe dans l'étendue de ses valeurs sensibles, selon que l'attraction à la distance r est plus grande ou moindre que la répulsion. Mais l'expérience ayant constamment prouvé que

l'élévation du point C est toujours accompagnée de la concavité du liquide, et que son abaissement n'a jamais lieu sans que le liquide ne soit convexe, il faut que h ait, dans tous les cas, le même signe que γ, ce qui exige que H soit toujours une quantité positive. Cela nous montre que, dans l'intégration d'où dépend la valeur de q, qu'on peut considérer comme la partie principale de H, c'est la force attractive qui est prépondérante; tandis qu'au contraire la force répulsive l'emporte, en général, dans la sommation relative à la pression sur une surface plane (n° 7); mais ces indications ne suffisent pas pour qu'on en puisse tirer quelques conséquences précises sur les lois de décroissement de ces deux forces, et sur l'étendue relative de leurs rayons d'activité. Quoi qu'il en soit, nous regarderons dorénavant H comme un coefficient positif, dont la valeur absolue variera seule avec la matière et la température du liquide.

(52). Je représenterai par α le rayon d'une section horizontale, faite dans la surface intérieure du tube, que l'on prendra, sans erreur sensible, pour celui du contour de la surface capillaire, tracé sur cette surface à distance insensible de celle du tube, et auquel contour l'équation (3) appartient. Si le rayon α est extrêmement petit, on pourra supposer, du moins dans une première approximation, que la surface capillaire coïncide avec celle de sa sphère osculatrice au point C. On aura alors

$$\cos\omega = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

en observant que, d'après le signe qu'on attribue à γ, cette quantité est positive ou négative, selon que l'angle ω est obtus ou aigu. En vertu de l'équation (3) et de la formule (6), nous aurons donc

$$\gamma = -\frac{\alpha H}{F}, \qquad h = -\frac{F}{g\rho\alpha};$$

ce qui montre que le point C s'abaissera ou s'élèvera suivant que la quantité F, dépendante de la matière du liquide et de celle du tube, sera positive ou négative; et, d'après la seconde formule, l'abaissement ou l'élévation de C, pour un même liquide et différens tubes d'une même matière, serait en raison inverse de leurs dia-

mètres; mais cette loi est un peu modifiée dans la seconde approximation.

Le degré et le sens de la convexité de la surface capillaire dépendant du rapport de F à H et du signe de F, il est bon de chercher à se rendre raison des diverses valeurs de ce rapport pour différens liquides. Voici ce que l'on peut dire à ce sujet.

1°. Lorsque la matière du tube n'exerce aucune attraction sur celle du liquide qui s'appuie contre sa paroi intérieure, la couche du liquide adjacente à cette paroi doit être dans le même état que la couche superficielle en contact avec l'atmosphère. Ces deux couches liquides, d'une épaisseur insensible, transmettent la pression intérieure, l'une à la surface de l'air, et l'autre à la surface du tube; et cette pression est détruite par celle qui est exercée en sens contraire sur ces mêmes couches, et qui est due à l'action du calorique propre, soit des molécules du tube, soit des molécules de l'air, sur celui des molécules du liquide. Cela étant, les forces R_1 et R' seront les mêmes; on aura donc $\varpi = -q_1$; d'où il résultera $F = H$, $\cos\omega = 1$, $\gamma = -\alpha$; et la surface du liquide sera celle d'une demi-sphère convexe par en haut. Ce premier cas est celui de l'eau contenue dans un tube dont la surface intérieure est enduite d'un corps gras.

2°. Si l'attraction du tube n'est pas nulle, la variation de densité du liquide ne sera plus la même près de la surface libre et près de la paroi du tube, et l'on n'aura plus $\varpi = -q_1$. Lorsque l'action moléculaire du tube sera la même que celle du liquide, celui-ci se trouvera dans le même état que s'il était contenu dans un tube formé de sa propre matière; il n'éprouvera donc plus aucune variation de densité près de la paroi du tube; par conséquent, on aura $\varpi = 2q$ (n° 49); ce qui donne $\frac{1}{2}F = -q$, et d'où il résulte

$$\cos\omega = -\frac{q}{q+q_1}, \quad \gamma = \frac{\alpha(q+q_1)}{q}.$$

Vu l'état de dilatation du liquide dans l'épaisseur de sa couche superficielle, à laquelle répond l'intégrale que q_1 représente, il est naturel de penser que cette quantité q_1 est peu considérable relativement à q. Dans ce second cas, le rayon γ doit donc peu différer de celui du

tube, et la forme du liquide doit être à peu près un hémisphère concave.

5°. D'après l'examen de ces deux premiers cas, nous pouvons admettre que si la force attractive du tube passe graduellement de zéro à une intensité égale à celle de l'attraction du liquide sur lui-même, la quantité ϖ passera en même temps de $-q_1$ à $2q$; la quantité F, de H à une valeur peu différente de $-H$, et la forme du liquide, d'un hémisphère convexe à une surface concave, à peu près hémisphérique, sans qu'on puisse assurer néanmoins que la figure du liquide et la valeur moyenne $F = 0$ répondent à une attraction du tube égale à la moitié de celle du liquide (n° 20).

4°. L'attraction du tube continuant d'augmenter et devenant supérieure à celle du liquide, on peut aussi admettre que F continuera de varier dans le même sens qu'auparavant, et finira par surpasser $-H$, abstraction faite du signe. Alors, l'équation (3) ne sera plus possible; et comme elle est nécessaire à l'équilibre du liquide, cet état sera également impossible. On en doit donc conclure que quand l'attraction du tube sur le liquide l'emporte sur l'attraction propre du liquide, une couche de ce fluide, d'une épaisseur aussi petite que l'on voudra, s'élève au-dessus de la surface capillaire, le long de la paroi du tube et jusqu'à son extrémité supérieure. Dans ce cas, on pourra remplacer la paroi du tube par une surface cylindrique, tracée dans l'intérieur du liquide et indéfiniment prolongée au-dessus et au-dessous de la surface capillaire. On supposera que l'action du tube ne s'étend pas jusqu'à cette paroi fictive, et que la distance de cette paroi à la surface extérieure de la couche mince du liquide, élevée au-dessus de la surface capillaire, soit insensible, mais plus grande que le rayon d'activité des molécules du liquide. De cette manière, on aura $\varpi = 2q$; et pour tenir compte, dans le n° 38, de l'action exercée sur le segment qu'on a appelé C, par la couche verticale du liquide supérieure à C, il faudra diminuer cette force ϖ, de celle qu'on a désignée par U (n° 41) et qu'on a trouvée égale à $-q_1$. On aura donc, dans le cas dont il s'agit,

$$\frac{1}{2}F = q - \varpi - q_1 = -q - q_1 = -\frac{1}{2}H,$$

et, par conséquent, $\gamma = \alpha$; c'est-à-dire que le liquide sera con-

cave et hémisphérique. C'est ce que l'on observe, en effet, toutes les fois que le tube est susceptible d'être mouillé par le liquide, et qu'il a été préalablement humecté dans toute sa longueur. Lorsque l'on n'a pas pris cette précaution, le frottement du liquide contre le tube s'oppose à l'élévation de la couche mince du fluide au-dessus de la surface capillaire ; ce qui donne lieu, comme nous l'expliquerons plus bas, à différens états d'équilibre, dans lesquels la courbure de cette surface et sa hauteur au-dessus du niveau intérieur n'atteignent pas leur *maximum*.

(53). Dans le cas de $F = -H$, qui a lieu le plus communément, on aura

$$h = \frac{\pi}{4g\rho\alpha}\int_0^\infty Rr^4dr,$$

en ne considérant, pour abréger, que la partie principale q de H, et substituant sa valeur en intégrale définie.

Supposons que la température change, et que h, ρ, R, deviennent h', ρ', R' ; on aura de même

$$h' = \frac{\pi}{4g\rho'\alpha}\int_0^\infty R'r^4dr,$$

en négligeant la petite variation de α qui pourra avoir lieu. Or, quand la densité augmente ou diminue, le nombre des molécules que renferme chaque unité de volume, varie suivant le même rapport ; par cette raison, la quantité R, qui représente l'action mutuelle de deux unités de volume du liquide, devra varier dans le rapport du carré de la densité. D'ailleurs, la force attractive de deux molécules ne change pas avec leur température, mais seulement leur répulsion mutuelle, qui dépend de la quantité de chaleur qu'elles contiennent. La première de ces deux forces étant prépondérante dans la valeur de $\int_0^\infty Rr^4dr$, si l'on fait abstraction de la variation de la seconde, il suffira donc de faire

$$R' = \frac{R\rho'^2}{\rho^2};$$

et en comparant l'une à l'autre les valeurs précédentes de h et h', on aura

$$k' = \frac{h'}{\rho'}.$$

L'expérience montre, en effet, que pour un même liquide à différentes températures, l'élévation du point C croît proportionnellement à la densité; ce qui donne lieu de croire que la force répulsive de la chaleur, ou du moins sa variation, que nous avons négligée, n'a qu'une influence insensible sur l'intégrale $\int_0^\infty Rr^4dr$.

Si l'on désigne par u et u' deux fractions positives dont la somme soit l'unité, et qu'on mêle ensemble deux liquides dans la proportion de u à u', il est aisé de voir que la valeur de cette intégrale, relative au mélange, sera de la forme :

$$Uu^2 + U_1uu' + U'u'^2,$$

en désignant par U, U_1, U', des coefficiens indépendans de u et u', supposant que les températures des deux liquides sont égales entre elles et les mêmes avant et après le mélange, et négligeant toujours le changement d'intensité de la force répulsive qui peut résulter de l'absorption de chaleur dont le mélange est accompagné. Cela étant, si l'on désigne par v la valeur du produit $h\rho$ qui répond au liquide mélangé, on aura

$$v = u^2f + uu'f_1 + u'^2f';$$

f, f_1, f', étant aussi des quantités indépendantes de u et u', dont la première et la dernière sont les valeurs de $h\rho$ relatives aux deux liquides séparés. Il serait intéressant de vérifier cette formule, par l'expérience, pour différentes proportions de ces deux liquides, en supposant f et f' connus, et après avoir déterminé f_1 d'après la valeur de v qui répond, par exemple, à $u = u' = \frac{1}{2}$. Si elle s'accordait avec l'observation, l'hypothèse de la non-influence sensible de la chaleur sur la valeur de $\int_0^\infty Rr^4dr$, autrement que par la dilatation du liquide, se trouverait tout-à-fait confirmée.

(54). Les réflexions précédentes se rapportent à la partie physique de la question. Revenons actuellement à la partie mathématique, et

considérons de nouveau la surface de révolution qui termine un liquide contenu dans un tube cylindrique, vertical et à base circulaire.

Si l'on prend l'axe de ce tube pour celui des z, et qu'on appelle t la distance du point quelconque M de cette surface à cette droite, on aura

$$t = \sqrt{x^2 + y^2};$$

l'ordonnée z du même point sera une fonction de t; et, cela étant, on trouvera que l'équation (2) devient

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt}\left(1 + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}{\left(1 + \frac{dz^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'};$$

ce qu'on peut aussi voir en observant que les deux rayons de courbure principaux d'une surface de révolution sont le rayon de courbure de sa courbe génératrice, et la normale à cette courbe, dont la longueur est $t\frac{\sqrt{dt^2 + dz^2}}{dz}$. En faisant

$$H = g\rho a^2,$$

l'équation (1) deviendra donc

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt}\left(1 + \frac{dz^2}{dt^2}\right)}{\left(1 + \frac{dz^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2z}{a^2};$$

et l'on pourra la remplacer par celle-ci :

$$\frac{t\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}}} = \frac{2}{a^2}\int ztdt, \qquad (7)$$

qui s'en déduit en la multipliant par tdt et intégrant, et dans laquelle l'intégrale $\int ztdt$ commencera avec la variable t. On aura, en même temps,

$$\cos\omega = -\frac{dz}{\sqrt{dt^2 + dz^2}};$$

le signe du dénominateur étant le même que dans le premier membre de l'équation précédente, où il se détermine comme il a été dit plus haut (n° 49). Si donc on fait aussi

$$F = bH, \quad \cos\omega = b,$$

l'équation (3) deviendra

$$\frac{dz}{dt} + b\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}} = 0; \quad (8)$$

elle n'aura lieu que pour $t = a$; et la constante b qu'elle renferme ne surpassera pas ± 1.

Cela posé, l'approximation à laquelle on s'est arrêté, dans le n° 52, revient à prendre

$$z = h + \gamma - \sqrt{\gamma^2 + t^2},$$

en regardant le radical comme une quantité de même signe que γ. Elle suppose que le rayon a du tube soit très petit par rapport au produit ab. Pour la pousser plus loin, je ferai

$$z = h + \gamma' - \sqrt{\gamma'^2 - t^2} + u;$$

u étant une variable très petite et telle que l'on ait $u = 0$ et $\frac{du}{dt} = 0$, quand $t = 0$, afin que h soit toujours l'ordonnée du point C où le plan tangent est horizontal; et γ' désignant une constante peu différente du rayon de courbure γ, relatif au même point. En vertu de l'équation (6), on aura, comme précédemment,

$$h = \frac{a^2}{\gamma}.$$

En substituant la dernière valeur de z dans le second membre de l'équation (7), on y pourra, dans cette seconde approximation, négliger le terme $\frac{2}{a^2}\int u t dt$. De cette manière, on aura

$$\frac{t\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = \left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma'}{a^2}\right)t^2 - \frac{2\gamma'^3}{3a^2} + \frac{2(\gamma'^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}. \quad (9)$$

Je substitue la même valeur de z dans le premier membre, et je néglige le carré de $\frac{du}{dt}$; tirant ensuite la valeur de $\frac{du}{dt}$, il vient

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma'}{3a^2}-\frac{1}{\gamma'}\right)\frac{\gamma'^3 t}{(\gamma'^2-t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\gamma'^3(\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-t^2})}{3a^2 t\sqrt{\gamma'^2-t^2}}.$$

Or, pour que la valeur de z qui en résultera ne devienne très grande pour aucune valeur de t, il faudra que le terme divisé par $(\gamma'^2-t^2)^{\frac{3}{2}}$, disparaisse de cette expression; on fera donc

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma'}{3a^2}-\frac{1}{\gamma'}=0;$$

d'où l'on tire, à très peu près,

$$\gamma' = \gamma - \frac{\gamma^2}{3a^2};$$

à cause que l'on a supposé γ' très peu différent de γ, ce qui exigera que la fraction $\frac{\gamma}{a}$ soit très petite, et résultera effectivement de la supposition de a très petit par rapport à ab. On aura maintenant

$$u = \frac{2\gamma'^3}{3a^2}\log\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-t^2}}{2\gamma'},$$

et, par conséquent,

$$z = h+\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-t^2}+\frac{2\gamma'^3}{3a^2}\log\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-t^2}}{2\gamma'}. \quad (10)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer h et γ'. Or, les équations (7) et (8) donnent

$$-ba = \frac{a^2}{\gamma}+\frac{2}{a^2}\int_0^a z_1 t\,dt,$$

en faisant $z = h+z_1$, et observant que $h = \frac{a^2}{\gamma}$. On en déduit

$$h = -ba - \frac{2}{a^2}\int_0^a z_1 t\,dt.$$

A la place de z_1, je mets dans ces équations la formule (10), moins son premier terme. En négligeant les termes divisés par a^4, il vient d'abord

$$-ba = \frac{a^2}{\gamma} + \frac{\gamma a^2}{a^2} + \frac{2(\gamma^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} = \frac{2\gamma^3}{3a^2};$$

d'où l'on tire la valeur de γ, et ensuite

$$\gamma' = -\frac{a}{b} + \frac{2a^3}{3a^2b^3}(1-b^2)(1-\sqrt{1-b^2}).$$

On aura, en outre,

$$h = -\frac{ba^2}{a} - \gamma' + \frac{2\gamma'^3}{3a^2} - \frac{2(\gamma'^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$$

$$-\frac{2\gamma'^3}{3a^2a^2}\left(\gamma'^2 - \gamma'\sqrt{\gamma'^2-a^2} - \frac{a^2}{2} + a^2\log\frac{\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-a^2}}{2\gamma'}\right), \quad (11)$$

où l'on substituera pour γ' sa valeur précédente.

On ne pourra plus faire usage de ces formules, lorsque b sera une fraction peu considérable. Si elle est très petite, la courbure du liquide le sera aussi; γ sera donc très grand par rapport à a; et l'on satisfera, par approximation, aux équations (7) et (8), en prenant

$$z = h + \frac{t^2}{2\gamma}, \quad h = \frac{a^2}{\gamma}, \quad \gamma = -\frac{a}{b}.$$

(55). Toutes choses d'ailleurs égales, si le tube, au lieu d'être plongé dans le liquide par son extrémité inférieure, est adapté par son autre bout à un orifice pratiqué au bas du vase qui contient le liquide, les équations (7) et (8) auront encore lieu (n° 30); mais le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ y sera de signe contraire à celui qu'il avait dans le cas précédent; et, dans la première approximation, il faudra prendre

$$z = h - \gamma + \sqrt{\gamma^2 - t^2};$$

le radical $\sqrt{\gamma^2-t^2}$ étant, comme précédemment, de même signe que le rayon γ. Or, pour avoir égard à ces différences, il suffira de compter les z positives en sens contraire de la pesanteur, et de changer le signe de cette force, et, par conséquent, a^2 en $-a^2$ dans les

formules précédentes. Il en résulte que l'abaissement du liquide au-dessous de son niveau, dans ce vase, sera un peu différent, selon que le tube y sera plongé par son extrémité inférieure, ou qu'il y sera adapté par son extrémité supérieure. Si l'on a, par exemple, $b = 1$, on aura $\gamma' = -\alpha$; et, en vertu de l'équation (11), cet abaissement sera

$$\frac{a^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{3a^2}(\log 4 - 1),$$

dans le premier cas, et, dans le second,

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{3a^2}(\log 4 - 1),$$

ce qui excède de $\frac{2\alpha}{3}$ la première valeur. Il faut évidemment que b soit positif, pour que l'équilibre soit possible dans le second cas.

(56). Dans le cas le plus ordinaire, où le tube a été préalablement mouillé par le liquide dans toute sa longueur, on a $b = -1$, $\gamma' = \alpha$, et l'équation (11) donne

$$h = \frac{a^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{3a^2}(\log 4 - 1).$$

Les seules expériences exactes qui aient été faites sur l'élévation des liquides dans les tubes capillaires sont celles de M. Gay-Lussac. Elles se rapportent à la formule précédente, et sont assez précises pour en rendre sensible la partie qui n'est pas en raison inverse de α. Relativement à un liquide dont la matière et la température sont données, on déduira la valeur de a^2, de la valeur observée de h pour un rayon donné α. La formule fera ensuite connaître la hauteur h qui répond à un autre rayon α, avec d'autant plus d'exactitude que la fraction $\frac{\alpha^3}{a^2}$ sera moins considérable.

Ainsi, par exemple, dans un tube mouillé d'eau à la température de 8°,5, pour lequel on avait

$$\alpha = 0^{mm},6472,$$

M. Gay-Lussac a trouvé

$$h = 23^{mm},1634.$$

On en conclut

$$a^2 = (15{,}1299) \text{ millimètres carrés};$$

il en résulte que pour

$$\alpha = 9^{mm},9519,$$

on devra avoir

$$h = 15^{mm},5829.$$

Suivant M. Gay-Lussac, on a $15^{mm},5861$; ce qui ne diffère que de $0^{mm},0032$. On peut remarquer que la différence serait beaucoup plus grande, si l'on n'avait point égard au deuxième et même au troisième terme de la formule.

Si la surface capillaire n'était pas tangente à la paroi du tube, et qu'on n'eût pas $b = \mp 1$, il faudrait, pour déterminer la valeur de b, mesurer la flèche du ménisque qui termine le liquide, dans le cas d'une valeur particulière de α, et l'égaler à l'excès de la valeur de z relative à $t = \alpha$, sur l'ordonnée h du centre C. Cette équation, jointe à celle qui résulterait de la valeur de h, mesurée pour la même valeur de α, suffirait pour déterminer la valeur de b, en même temps que celle de a; mais la mesure directe de la flèche du ménisque est peu susceptible de précision; et nous verrons, par la suite, qu'il y a d'autres moyens d'obtenir les valeurs de a et b dans le cas où la surface du liquide fait un angle avec celle du tube.

(57). Supposons que l'on place dans l'intérieur d'un tube, comme celui que nous venons de considérer, un autre cylindre semblable, ayant le même axe vertical; le liquide compris entre ce cylindre intérieur et la paroi du tube sera encore terminé par une surface de révolution. Si les angles ω relatifs à la matière du tube et à celle du cylindre sont tous les deux obtus, la génératrice de cette surface sera concave par en haut; elle sera convexe s'ils sont tous les deux aigus; et si l'un est aigu et l'autre obtus, elle présentera un point d'inflexion. Dans les deux premiers cas, il y aura sur cette surface une ligne circulaire et horizontale, pour laquelle toutes les normales à cette surface seront verticales, et qui en sera une ligne de courbure. En prenant λ pour son rayon de courbure, on aura $\lambda = \infty$; et si l'on appelle ζ celui de la génératrice en un point C, où elle coupe

la ligne horizontale, et que l'on regarde $\mathcal{C}$ comme positif ou comme négatif, selon que la génératrice sera concave ou convexe par en haut, on aura $\lambda' = \mathcal{C}$. En désignant donc par l l'ordonnée z de ce point C, nous aurons, d'après l'équation (1),

$$l = \frac{H}{2g\rho\mathcal{C}};$$

et en comparant cette valeur à la formule (6), on en conclura

$$l = \frac{h\gamma}{2\mathcal{C}}.$$

Si la distance comprise entre le cylindre et la paroi du tube est très petite, par rapport à la constante a relative à la matière du liquide, la génératrice de la surface de révolution se confondra sensiblement avec son cercle osculateur au point C. En appelant alors α la distance de ce point à la paroi du tube, on aura $\alpha = -\mathcal{C}\cos\omega$, et, par conséquent, $\mathcal{C} = \gamma$ (n° 52), si l'angle ω est le même que précédemment; il en résultera donc $l = \frac{1}{2}h$. Lorsque l'angle ω sera aussi le même à la paroi du tube et à la surface du cylindre intérieur, le point C se trouvera également éloigné de ces deux surfaces, et α sera égal à la moitié de la distance qui les sépare; d'où l'on voit que l'élévation ou l'abaissement du liquide entre ces deux corps de même matière n'est que la moitié de son élévation ou de son abaissement dans un tube capillaire dont le diamètre est égal à leur distance mutuelle. Quand la matière du cylindre intérieur différera de celle du tube, le point C ne se trouvera plus à égale distance des deux surfaces. Si l'on désigne par α' et ω' ce que deviennent α et ω relativement à la surface du cylindre, on aura $\alpha' = -\mathcal{C}\cos\omega'$, et l'on pourra aussi prendre $l = \frac{1}{2}h'$, en appelant h' la valeur de h dans un tube capillaire de la même matière que le cylindre et d'un diamètre égal à α'. La somme $\alpha + \alpha'$ sera donnée, et l'on déterminera le rapport de ses deux parties, au moyen de l'équation $\alpha\cos\omega' = \alpha'\cos\omega$.

Comme ces résultats sont indépendans de la courbure du tube et de celle du cylindre intérieur, et qu'ils supposent seulement leurs surfaces très rapprochées et partout également distantes l'une de

l'autre, il s'ensuit qu'on peut remplacer le tube et le cylindre par deux corps terminés par des plans parallèles et verticaux dont la distance mutuelle soit très petite. Ainsi, par exemple, dans le cas de la même matière, l'élévation ou l'abaissement d'un liquide entre ces deux plans, ou la valeur de l, sera moitié de celle de h qui a lieu dans un tube capillaire dont le diamètre est égal à leur distance mutuelle; ce qui est conforme à l'expérience. Dans ce cas, et dans celui d'un tube et d'un cylindre, on pourra, si l'on veut, calculer la valeur de l avec plus d'exactitude par l'analyse du n° 54; mais si la constante a n'est pas très grande par rapport à l'épaisseur du liquide, ou bien, si les deux corps sont de matière différente, et que la surface du liquide subisse une inflexion, il faudra recourir à d'autres méthodes, ainsi qu'on le verra dans le chapitre VI, auquel ce problème appartient plus spécialement.

(58). L'analyse du n° 54 s'étendra facilement au cas où la surface intérieure du tube, au lieu d'être cylindrique, sera une surface quelconque de révolution, ayant toujours son axe vertical, et un diamètre très petit dans toute sa longueur.

Dans ce cas général, soient OCA et DOE (fig. 14) les surfaces du liquide et du tube, et FB leur axe commun. Par un point quelconque O, appartenant au contour de la surface du liquide, menons des perpendiculaires ON, OK, OH, à cette surface, à celle du tube et à la verticale FB. Supposons la normale OK comprise dans la matière du tube, et la normale ON extérieure par rapport au liquide, ce qui déterminera le sens de cette droite, en observant que le point O s'écarte un tant soit peu de la paroi du tube. L'angle KON sera celui que nous avons désigné par ω, et dont le cosinus est b, en continuant de faire $F = bH$. Appelons i l'angle GOK, aigu ou obtus, que fait la normale OK avec le prolongement OG de OH, et ζ le cosinus de l'angle GON compris entre le même prolongement et la normale ON. Nous aurons

$$\zeta = b \cos i \pm \sqrt{1 - b^2} \sin i,$$

selon que la droite OK tombera en-dehors ou en-dedans de l'angle GON; et si nous désignons par a le rayon OH du tube, qui répond à la surface du liquide, nous aurons ensuite

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{C}\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}} = 0, \qquad (12)$$

en faisant $t = \alpha$ après les différentiations. Dans cette équation, le radical aura le même signe que dans les équations (7) et (8). En la joignant à l'équation (7), on aura les deux équations qu'il s'agira de résoudre.

Il faudra, pour cela, distinguer deux cas : le premier aura lieu quand la verticale menée par le point O ne rencontrera pas de nouveau la surface du liquide, comme dans la double figure 14; le second, lorsque cette verticale rencontrera la surface en un second point O′, comme dans la double figure 15. Dans le premier cas, il suffira de mettre $\mathcal{C}$ à la place de b dans les formules du n° 54, pour qu'elles s'appliquent aux équations (7) et (12); le second cas exigera une attention particulière.

Il y aura alors un certain point T, compris entre O et O′, pour lequel la tangente à la courbe OO′C sera verticale. Dans la partie TC de cette courbe, le radical $\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}}$ sera une quantité positive, et dans la partie TO, une quantité négative, d'après ce qu'on a dit précédemment (n° 49). Il s'ensuit que, quel que soit la constante γ, on satisfera à l'équation (7), ou, par approximation, à l'équation (9), depuis le point C jusqu'au point T, au moyen de l'équation (10), dans laquelle on fera toujours

$$h = \frac{a^2}{\gamma}, \qquad \gamma' = \gamma - \frac{\gamma^3}{3a^2}.$$

Pour satisfaire à l'équation (7), depuis le point T jusqu'au point O, on prendra

$$z = h + \gamma' + \sqrt{\gamma'^2 - t^2} + \nu;$$

le radical ayant le même signe que γ', et ν étant une variable très petite qui devra être telle que cette valeur de z coïncide au point T avec la formule (10). Ce point répondra à $t = \gamma'$; il faudra donc qu'on ait

$$\nu = \frac{2\gamma'^3}{3a^2} \log \frac{1}{2},$$

pour cette valeur particulière de t.

Comme le point C n'appartient pas à la partie TO de la surface, il ne sera pas nécessaire que l'intégrale $\int ztdt$, contenue dans le second membre de l'équation (7), s'évanouisse avec t, quand on y substituera la valeur précédente de z. Je pourrai donc supposer qu'en négligeant le terme $\frac{2}{a^2}\int vtdt$, et mettant $\frac{a^2}{2\gamma}$ au lieu de h, l'équation (7) devienne, par la substitution dont il s'agit,

$$\frac{t\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = \left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma'}{a^2}\right)t^2 - \frac{2\gamma'^3}{3a^2} - \frac{2(\gamma'^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}; \quad (13)$$

en sorte qu'elle ne différera de l'équation (9) que par le signe du dernier terme de son second membre; ce qui est nécessaire pour que γ' soit le même que dans la formule (10). Je substitue la même valeur de z dans le premier membre de cette équation (13); je néglige le carré de $\frac{dv}{dt}$; et en ayant égard à la valeur de γ', et observant que le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ est maintenant une quantité négative, il vient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\gamma'^3(\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-t^2})}{3a^2t\sqrt{\gamma'^2-t^2}};$$

ce qui donne

$$v = \frac{2\gamma'^3}{3a^2}\log\frac{\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-t^2}}{2\gamma'},$$

en intégrant et en déterminant la constante arbitraire au moyen de la valeur de v qui répond à $t=\gamma'$. La valeur correspondante de z sera donc

$$z = h+\gamma'+\sqrt{\gamma'^2-t^2}+\frac{2\gamma'^3}{3a^2}\log\frac{\gamma'-\sqrt{\gamma'^2-t^2}}{2\gamma'};$$

ce qui ne diffère de la formule (10) que par le signe du radical $\sqrt{\gamma'^2-t^2}$.

Ainsi, lorsque la surface capillaire est rencontrée en deux points par chaque verticale, dans sa partie voisine de la paroi du tube, l'équation (10) appartient à la surface entière; en y prenant ce radical avec le même signe que γ', depuis le centre de cette surface jusqu'à

la courbe pour laquelle le plan tangent est vertical, et avec un signe contraire, depuis cette courbe jusqu'au contour de la surface.

Quant à la valeur de γ qu'il y faudra employer, on la déterminera en faisant $z = \alpha$ dans l'équation (13); ce qui donne, en mettant γ au lieu de γ' dans les termes divisés par a^2, et ayant égard à l'équation (12),

$$-\mathfrak{C}\alpha = \frac{\alpha^2}{\gamma} + \frac{\alpha^2\gamma}{a^2} - \frac{2\gamma^3}{3a^2} - \frac{2(\gamma^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2};$$

d'où l'on tire

$$\gamma = -\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\left[1 + \frac{\alpha^2}{a^2\mathfrak{C}^2} - \frac{2\alpha^2}{3a^2\mathfrak{C}^4} - \frac{2\alpha^2(1-\mathfrak{C}^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2\mathfrak{C}^4}\right];$$

en négligeant les termes divisés par a^4. On aura, en même temps, en négligeant ceux qui ont a^2 pour diviseur,

$$h = -\frac{a^2\mathfrak{C}}{\alpha}\left[1 - \frac{\alpha^2}{a^2\mathfrak{C}^2} + \frac{2\alpha^2}{3a^2\mathfrak{C}^4} + \frac{2\alpha^2(1-\mathfrak{C}^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2\mathfrak{C}^4}\right];$$

et si l'on compare ces formules à celles du n° 54, on voit que l'ordonnée du centre de la surface et sa courbure en ce point ne diffèrent que par le signe du radical $\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}$ de celles qui ont lieu lorsque la surface n'est rencontrée qu'en un seul point par chaque verticale.

D'après la remarque du n° 55, pour appliquer ces différentes formules au cas où le tube sera adapté par son extrémité supérieure au bas du vase qui contient le liquide, il suffira d'y changer a^2 en $-a^2$, et de compter les z positives dans le sens de la pesanteur.

On peut observer que dans le cas de $\mathfrak{C} = \pm 1$, on a $\gamma' = \mp\alpha$; ce qui doit être, en effet, puisqu'alors le contour de la surface capillaire coïncide avec la courbe pour laquelle son plan tangent est vertical.

(59). Les différentes formules du numéro précédent supposent connu le rayon α de la section du tube à laquelle le liquide s'arrêtera. Or, on formera l'équation dont sa valeur dépend, en égalant entre elles les deux expressions de z qui répondent au contour de la surface du liquide, et dont l'une sera donnée par l'équation de cette surface, et l'autre par celle de la surface intérieure du tube, qui fera aussi connaître l'angle i en fonction de α. S'il s'agit, par

exemple, d'un cône droit à base circulaire, i sera l'angle donné et constant que fait la génératrice avec son axe vertical, et l'on aura

$$z = (a - e)\tang i,$$

pour la valeur de z fournie par l'équation de la surface du tube; e étant le rayon de la section faite par le plan du niveau extérieur. On égalera donc cette valeur à celle qui résulte de l'équation (10), en y faisant $t = \alpha$, mettant $\mathcal{C}$ au lieu de b, et donnant le signe convenable au radical $\sqrt{\gamma'^2 - \alpha^2}$.

(60). L'influence de l'inclinaison i sur l'élévation et la courbure du liquide, explique ce qui arrive quand il atteint l'une des deux extrémités du tube.

Supposons, pour fixer les idées, que la surface intérieure du tube soit celle d'un cylindre vertical, et que ses extrémités soient terminées par deux autres surfaces de révolution, ayant le même axe que ce cylindre. Soit FB cet axe (fig. 16), DD' la génératrice de la surface intérieure, DPQ et D'P'Q' celles des deux surfaces extrêmes, OCA ou OCA' celle de la surface du liquide, selon qu'il s'élèvera ou s'abaissera par rapport à son niveau extérieur, représenté par GH. Par un point quelconque O du contour de la surface capillaire, menons en-dehors du liquide les normales ON et OK à sa surface et à celle du liquide, de sorte que NOK soit l'angle qu'on a désigné par ω, lequel angle est donné et invariable, quelque part que soit le point O. A mesure que l'on enfoncera le tube dans le liquide, le point O se rapprochera du point D, s'il y a élévation au-dessus de GH. Tant qu'il n'aura pas atteint le point D, la surface du liquide ne changera pas, non plus que l'ordonnée CH du point C où elle coupe l'axe FB; l'une et l'autre se détermineront par les formules du n° 54. Quand le point O aura dépassé le point D, la normale KO s'écartera de la direction horizontale; la figure du liquide variera et se déterminera, ainsi que l'ordonnée CH, en remplaçant, d'après ce qu'on a vu dans le n° 58, la constante b par une quantité $\mathcal{C}$ dépendante de l'inclinaison de KO et de l'angle constant KON. Si, par exemple, on a $b = -1$, les droites KO et ON seront constamment dans le prolongement l'une de l'autre; la concavité du liquide diminuera de plus en plus, à me-

sure que O s'élèvera au-dessus de D, et sa surface sera plane et de niveau avec le liquide extérieur, lorsque O aura atteint le sommet P du bord supérieur du tube, c'est-à-dire le point où le plan tangent est horizontal, et où, par conséquent, la ligne KON sera verticale. Des effets semblables auront lieu quand on élèvera le tube jusqu'à ce que le point Θ ait atteint et ensuite dépassé le point D'.

Cela posé, si l'on mène par le point D un plan horizontal qui coupe au point L la courbe DPQ, et si l'on retranche la partie du tube située au-dessus de ce plan, de sorte que le tube soit maintenant terminé par une portion de surface plane et horizontale, il y aura une arête vive à l'intersection de ce plan et de la surface intérieure du tube, dont le point D fera partie. Mais, dans la réalité, cette arête sera toujours un tant soit peu arrondie; et, quelque petite que soit son épaisseur, elle sera néanmoins extrêmement grande, eu égard au rayon d'activité moléculaire, qui est tout-à-fait insensible. Or, cela suffit pour que ce qui précède soit encore applicable, lorsqu'on enfoncera le tube dans le liquide. Quand le point O aura atteint l'extrémité supérieure de la partie cylindrique de sa surface, la ligne KON tournera autour de l'arête de jonction de cette partie et de la partie plane; la normale OK à la surface de cette arête, passera graduellement de la direction horizontale à la direction verticale, sans que l'angle KON éprouve aucune variation. Pendant ce changement, le point O se déplacera extrêmement peu; mais il n'en sera pas de même à l'égard du point C. La distance CH au niveau extérieur et la courbure du liquide dépendront à chaque instant de la direction de OK. La surface de l'arête n'étant pas connue, l'angle i que fait cette normale avec le prolongement de la perpendiculaire abaissée du point O sur l'axe FB, ne sera pas donné, comme dans le n° 58, en fonction de la distance α de ce même point à cet axe; mais on pourra prendre pour α le rayon de la partie cylindrique du tube; et cette quantité étant donc connue, ainsi que l'ordonnée verticale du point O, pour laquelle on prendra celle du point fixe D, on emploiera, pour trouver la valeur de i, l'équation qui aurait servi, d'après le numéro précédent, à déterminer celle de α. On pourra donc considérer l'angle i, et, par conséquent, la quantité $\mathfrak{C}$, comme déterminés en

fonctions du rayon α et de la distance du point D au niveau extérieur du liquide; et, cela étant, on achèvera, comme dans le n° 58, de calculer les valeurs de l'ordonnée k et du rayon de courbure γ relatifs au point C, et de déterminer la surface du liquide.

Le même raisonnement s'appliquera au cas où le tube est terminé inférieurement par une portion de surface plane, jointe à sa partie cylindrique par une arête vive, et où on le soulève jusqu'à ce que cette arête inférieure soit atteinte par le point O.

(61). Les lois de l'équilibre dans un tube capillaire seront évidemment les mêmes, soit que le tube ait été en partie immergé, ou soit qu'il communique avec le liquide contenu dans un vase, par un canal latéral. Mais, dans ce dernier cas, on pourra élever le niveau extérieur au-dessus de l'extrémité supérieure du tube; et l'équilibre sera possible jusqu'à une certaine limite, au-delà de laquelle le liquide jaillira hors du tube, ou s'écoulera sur sa surface extérieure. Si l'angle KON ou ω est obtus, le point O, après être monté jusqu'au point P, descendra le long de la courbe PQ, jusqu'en un certain point pour lequel la droite ON sera horizontale et coïncidera avec le prolongement de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe FB. Cette position du point O répondra à la limite dont il s'agit. L'angle i sera alors le même que ω; on aura donc $\cos i = b$, et par suite $\mathfrak{C} = 1$. L'angle i étant connu, l'équation de la courbe PQ fera connaître les distances du point O à l'axe FB et à un plan horizontal menés arbitrairement; ce qui suffira pour la détermination complète de la figure du liquide, qui sera convexe par en haut, et de l'élévation du niveau extérieur au-dessus de ce plan. Les mêmes choses auront encore lieu, lorsque le tube sera terminé par une portion de surface plane, qui se joindra à ses surfaces intérieure et extérieure, en D et L, par des arêtes vives; seulement, il arrivera alors qu'abstraction faite du frottement du liquide contre le tube, le point O ne pourra plus s'arrêter entre ces points D et L. Par conséquent, si l'on désigne par α' la distance de L à l'axe FB, ou le rayon de la surface extérieure du tube, on déterminera la figure du liquide correspondante à la plus grande élévation du niveau extérieur et à cette élévation *maxima*, en employant, dans les formules du n° 54, α' et $\mathfrak{C}$ au lieu de α et b, et y faisant $\mathfrak{C} = 1$.

De cette manière, on aura $\gamma' = -\alpha'$; et l'on en conclura, par exemple,

$$l = \frac{a^2}{\alpha'} + \frac{2\alpha'}{3},$$

en négligeant le carré de la fraction $\frac{\alpha'}{a}$, et désignant par l la hauteur du niveau extérieur au-dessus du plan horizontal qui termine le tube, à l'instant où l'équilibre va se rompre; en sorte que si l'on élevait encore un peu le niveau du liquide dans le vase avec lequel le tube communique, il commencerait à jaillir hors du tube, ou à s'écouler sur sa surface extérieure.

Lorsque l'angle KON sera aigu, le point O ne pourra pas s'élever jusqu'au sommet P de la courbe DPQ; la quantité $\mathfrak{C}$ atteindra l'unité, qui est sa plus grande valeur, en un point de la partie DP de cette courbe; l'angle correspondant i se déduira de l'équation $\mathfrak{C} = 1$; les coordonnées horizontale et verticale de ce point seront ensuite connues par l'équation de la courbe, et l'on pourra déterminer complètement la figure du liquide. S'il y a une arête vive au point D, le point O s'y arrêtera; ses coordonnées seront alors celles de D, et l'angle i se conclura de l'élévation donnée du niveau extérieur au-dessus de cette arête. Réciproquement, l'élévation *maxima* se déterminera d'après l'angle i conclu de l'équation $\mathfrak{C} = 1$, et sa valeur sera celle de l, en y mettant le rayon intérieur α du tube à la place de α'.

Par des considérations semblables, on déterminera, dans tous les cas, la figure du liquide à l'extrémité inférieure du tube, lorsque sa branche verticale sera descendante, ou qu'il aura été adapté à un petit orifice pratiqué au fond du vase qui contient le liquide.

(62). J'ai insisté sur ce qui arrive quand le liquide atteint l'une des deux extrémités du tube, parce que je me trouve, sur ce point, en opposition avec un passage de la *Mécanique céleste* (*), où il est dit qu'alors l'angle sous lequel les parois du tube sont coupées par la surface du liquide, c'est-à-dire l'angle que j'ai appelé ω, devient variable et n'est plus le même qu'à une distance quelconque des deux

(*) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire*, page 25.

extrémités. Cette assertion est échappée à l'illustre auteur, faute d'avoir considéré que cet angle KON est compté à partir de la normale KO à la surface du tube, dont l'inclinaison sur un plan horizontal varie lorsque le point O appartient à l'arête supérieure ou inférieure du tube; ce qui suffit pour expliquer, sans que l'angle ω éprouve aucune variation, le changement de courbure de la surface du liquide, et pour déterminer la courbure correspondante à une distance donnée du niveau extérieur du liquide à l'extrémité du tube.

L'influence de l'angle i sur l'élévation du centre de la surface capillaire, fournit aussi l'explication des différentes valeurs de cette élévation que les physiciens ont obtenues, pour un même liquide, et dans un même tube cylindrique vertical, qui n'était pas mouillé préalablement par ce liquide. En effet, quel que soit le degré de poli de la paroi intérieure du tube, il s'y trouve toujours des sinuosités dont les hauteurs sont incomparablement plus grandes que le rayon d'activité moléculaire, et dont les normales peuvent faire des angles quelconques, différens de l'angle droit, avec la verticale. L'angle i, et par suite la quantité ζ, varient donc d'un point à un autre de la surface du tube que l'on regarde comme cylindrique. Les différentes valeurs de ζ peuvent être moindres que ± 1, sans que l'angle ω éprouve aucun changement; et il en résulte différens états d'équilibre, dans lesquels le liquide est plus ou moins élevé, et la courbure de sa surface plus ou moins considérable. Cette sorte d'indétermination disparaît, lorsque la surface du liquide, concave ou convexe, est tangente à celle du tube, et que l'élévation ou l'abaissement de son niveau atteint le *maximum*; ce qui a lieu, comme on l'a vu précédemment (n° 52), quand le tube a été mouillé dans toute sa longueur par le liquide, ou bien, quand il n'exerce aucune attraction sur la couche qui s'appuie contre sa paroi intérieure, en vertu du poids du liquide et de la pression atmosphérique. C'est également à ces sinuosités, comme aussi à celles qui ont toujours lieu sur les surfaces regardées comme planes, que l'on doit attribuer l'adhésion de la couche liquide, d'une épaisseur sensible, qui mouille ces surfaces, quand b ou $\cos\omega$ est négatif, et qui se maintient sans perdre sa fluidité, quelle que soit leur direction, verticale, horizontale ou inclinée.

(63). Dans le dernier cas du n° 61, il sera bon de calculer le poids de la goutte qui se forme à l'extrémité inférieure du tube, à l'instant où l'équilibre va se rompre, et en supposant le tube terminé par un plan horizontal, qui coupe ses deux surfaces intérieure et extérieure, en D′ et L′ où il y aura des arêtes vives dont les rayons seront a et a'.

Si l'angle KON est obtus, la goutte se terminera à l'arête extérieure, et, s'il est aigu, à l'arête intérieure. Dans les deux cas, on aura $6 = 1$, à l'instant que l'on considère; le liquide sera convexe; chaque verticale ne rencontrera sa surface qu'une seule fois, et la normale extérieure fera, en chaque point, un angle obtus avec la verticale tirée par le même point en sens contraire de la pesanteur.

Pour fixer les idées, supposons l'angle KON obtus. A cause de $6 = 1$ et $\gamma' = -a'$, et d'après la remarque du n° 55, nous aurons

$$z = h - a' + \sqrt{a'^2 - t^2} + \frac{2a'^3}{3a^2} \log \frac{a' + \sqrt{a'^2 - t^2}}{2a'},$$

pour l'équation de la surface du liquide, en regardant le radical $\sqrt{a'^2 - t^2}$ comme positif, et comptant les z positives à partir du niveau du liquide et dans le sens de la pesanteur. Si l'on appelle z_1 l'ordonnée d'un point quelconque, comptée dans le même sens, mais à partir du plan horizontal qui termine le tube inférieurement, on aura donc

$$z_1 = \sqrt{a'^2 - t^2} + \frac{2a'^3}{3a^2} \log \frac{a' + \sqrt{a'^2 - t^2}}{2a'}.$$

Le volume de la goutte située au-dessous de ce plan sera $2\pi \int_0^{a'} z_1 t\,dt$; et en désignant son poids par m et effectuant l'intégration, nous aurons

$$m = \frac{2\pi g \rho a'^3}{3} \left(1 + \frac{a'^2}{2a^2}\right).$$

En appelant l' la hauteur correspondante du liquide au-dessus de l'extrémité inférieure du tube, c'est-à-dire la valeur de z qui répond à $t = a'$, on aura, à très peu près,

$$l' = \frac{a^2}{a'} - \frac{2}{3} a'.$$

Le poids *maximum* m ne dépendra pas de la matière du tube, ou de la grandeur de la constante b; seulement, quand b sera né-

gatif, comme nous l'avons supposé, le contour du liquide situé au-dessous du tube, sera l'arète extérieure de son extrémité ; et dans le cas de b négatif, ce contour sera l'arète intérieure, de sorte qu'il faudra alors remplacer α' par α dans l'expression de m. Comme on a supposé α' très petit par rapport à a, ce poids, pour différens liquides, sera à très peu près proportionnel à leurs densités.

Dès que l'élévation du liquide dans le vase auquel le tube est adapté, surpassera l', l'équilibre ne sera plus possible. Le liquide se mettra donc en mouvement : le déplacement de ses différens points sera très lent, si l'excès de pression est peu considérable ; mais, quelque lent qu'il soit, la figure du liquide ne pourra plus se déterminer par l'analyse précédente, qui se rapporte exclusivement au cas de l'équilibre. L'observation montre que la goutte suspendue à l'extrémité du tube s'allonge graduellement jusqu'à ce qu'une partie se détache. M. Gay-Lussac a trouvé que pour un même liquide et un même diamètre extérieur du tube, le poids des gouttes tombantes est constant, et que pour différens liquides, il n'est pas proportionnel aux densités. Le rayon extérieur du tube dont il a fait usage était

$$\alpha' = 3^{mm},09.$$

A la température de 15°, il a trouvé $8^{g},9875$ pour le poids de 100 gouttes d'eau. En calculant la valeur de m, d'après cette valeur de α' et de celle de a^2 du n° 56, on trouve, à très peu près,

$$m = 0^{s},08;$$

en sorte que, dans ce cas, le poids de chaque goutte qui se détache surpasse très peu celui de la goutte suspendue en-dehors du tube, à l'instant où l'équibre commence à se rompre. Mais il faut remarquer que le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ étant environ $\frac{3}{4}$, cette valeur de m, déduite de la formule précédente, peut ne pas être suffisamment approchée. A la même température, M. Gay-Lussac a trouvé $3^{g},0375$ pour le poids de 100 gouttes d'un alcohol dont la densité était 0,8453, en prenant celle de l'eau pour unité ; d'où il résulte que le poids de chaque goutte tombante d'alcohol est à peine le tiers

de celui d'une goutte d'eau, quoique la densité du premier liquide ne diffère pas d'un cinquième de celle du second. Le rapport $\frac{a'}{a}$ étant plus grand que l'unité dans le cas de l'alcohol et du tube que M. Gay-Lussac a employés, on ne pourrait pas calculer la valeur de m par la formule précédente.

(64). Considérons maintenant l'équilibre d'un liquide homogène, suspendu dans un tube capillaire et soumis à la pression atmosphérique, qu'on suppose la même sur ses deux surfaces, auxquelles appartiendront les équations (9) et (11) du n° 30.

Nous supposerons que la surface intérieure du tube soit une surface de révolution qui ait son axe vertical; il en sera de même à l'égard des deux surfaces du liquide, dont l'axe commun sera celui du tube; et si l'on appelle t la distance d'un point quelconque M de l'une ou l'autre surface à cet axe, et ρ la densité du liquide diminuée de celle de l'air, et qu'on fasse

$$\Pi = g\rho a^2, \quad c' - \Pi = g\rho c,$$

les équations (9) et (11) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2z'}{dt} + \frac{1}{t}\frac{dz'}{dt} &= \frac{2(z'-c)}{a^2}\left(1+\frac{dz'^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} &= \frac{2(z-c)}{a^2}\left(1+\frac{dz^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right. \qquad (14)$$

La première appartiendra à la surface supérieure, et la seconde à la surface inférieure. Les ordonnées positives z et z' seront portées au-dessus d'un plan horizontal qu'on choisira arbitrairement; la constante c se déterminera d'après le volume donné du liquide. Pour chaque point M, on regardera le radical contenu dans le second membre de l'une ou l'autre équation, comme une quantité positive ou négative, selon que la normale en ce point fera un angle aigu ou obtus, avec la verticale tirée par le même point en sens contraire de la pesanteur.

Soit en outre $\Gamma = b\Pi$. Appelons x la distance à l'axe du tube, d'un point quelconque O appartenant au contour de la surface inférieure, i l'angle qui a été défini dans le n° 58, et θ la même

quantité que dans ce numéro. Désignons par x', i', $\mathfrak{C}'$, ce que deviennent x, i, $\mathfrak{C}$, relativement à un point O′ du contour de la surface supérieure. Nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} + \mathfrak{C}'\sqrt{1+\frac{dz'^2}{dt^2}} &= 0, \\ \frac{dx}{dt} + \mathfrak{C}\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

la première équation ayant lieu pour $t = x'$, et la seconde pour $t = x$, et les signes des radicaux se déterminant d'après les directions des normales en O et O′, par la même règle que dans les équations (14).

Appelons encore C et C′ les centres des surfaces inférieure et supérieure, c'est-à-dire les points où elles coupent leur axe commun, et en chacun desquels les deux courbures sont égales et de même sens. Soient γ et γ' leurs rayons de courbure en ces mêmes points, dont chacun sera regardé comme positif ou comme négatif, selon que la surface correspondante tournera sa concavité ou sa convexité en-dehors du liquide (n° 30). Désignons aussi par h et h' les ordonnées verticales de C et C′. D'après les équations (14), on aura

$$h - c = \frac{a^2}{\gamma}, \quad h' - c = \frac{a^2}{\gamma'}.$$

Cela posé, les premières et les secondes équations (14) et (15) formeront deux systèmes, qu'on résoudra séparément par l'analyse des n°s 54 et 58, lorsque les rapports $\frac{x}{a\mathfrak{C}}$ et $\frac{x'}{a\mathfrak{C}'}$ seront supposés très petits, et en ayant égard aux signes que doivent avoir les radicaux contenus dans ces équations, soit au centre de chaque surface, soit à son contour. Les valeurs de z et z' qui en résulteront seront de la forme :

$$z = c + \mathrm{T}, \quad z' = c + \mathrm{T}';$$

T et T′ étant respectivement des fonctions de t, x, $\mathfrak{C}$, et de t, x', $\mathfrak{C}'$, qui ne contiendront pas la constante c. Il ne restera donc plus qu'à déterminer cette quantité et les valeurs de x et x', d'où dépendront celles de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$.

Pour cela, désignons par X et X′ ce que deviennent T et T′,

quand on fait $t = x$ dans T et $t = x'$ dans T'. En appelant y et y' les ordonnées des points O et O', on aura

$$y = c + X, \quad y' = c + X'. \qquad (16)$$

Soit de plus v le volume compris entre la surface inférieure du liquide et le plan horizontal passant par son contour, et v' le volume analogue, relativement à la surface supérieure. En considérant chacune de ces quantités comme positive ou comme négative, selon que le liquide sera convexe ou concave, nous aurons

$$v = 2\pi \int_0^x (X - T)\, t\, dt, \quad v' = 2\pi \int_0^{x'} (T' - X')\, t\, dt.$$

Soit enfin ε^3 le volume du liquide qui doit être donné; en en retranchant v et v', on aura le volume terminé par la surface intérieure du tube et par les plans horizontaux des contours des deux surfaces du liquide, que je représenterai par V; on aura donc

$$\varepsilon^3 - v - v' = V. \qquad (17)$$

Or, le point O appartenant à la surface du tube, son ordonnée y sera donnée dans chaque cas en fonction de x, ainsi que l'angle i, et par suite la valeur de $\mathcal{C}$. Les quantités y', i', $\mathcal{C}'$, seront données de même en fonctions de x'; la valeur de V en fonction de x et x' s'obtiendra par les règles connues; et, de cette manière, les équations (16) et (17) suffiront pour la détermination complète des trois inconnues x, x', c.

(65). Cette solution du problème conviendra également au cas où le tube sera composé, comme un siphon, d'une partie courbe et de deux branches verticales, dont les surfaces intérieures seront des surfaces de révolution, et dans chacune desquelles le liquide s'élèvera à une certaine hauteur. On prendra alors pour ε^3 le volume du liquide contenu dans ces deux branches, au-dessus d'un plan horizontal supérieur à la partie courbe du tube, lequel volume se déduira du volume total du liquide, en en retranchant celui du liquide contenu au-dessous de ce plan, qui sera aussi connu; on prendra, en même temps, pour V la somme des capacités intérieures des deux branches, comprises entre ce plan horizontal et les plans des contours des deux surfaces du liquide.

Supposons, par exemple, que les surfaces intérieures des deux branches verticales soient des surfaces cylindriques, dont x et x' sont les rayons donnés; nous aurons alors $i=0$, $i'=0$, $\mathcal{C}=\mathcal{C}'=b$. En déterminant les valeurs de T et T' par les formules du n° 54, et négligeant les termes divisés par a^2, on aura

$$z = c - \frac{ba^2}{x} - \frac{2x}{3b^3} + \frac{2x(1-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^3} + \frac{x}{b}\sqrt{1-\frac{b^2t^2}{x^2}},$$

$$z' = c - \frac{ba^2}{x'} - \frac{2x'}{3b^3} + \frac{2x'(1-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^3} + \frac{x'}{b}\sqrt{1-\frac{b^2t^2}{x'^2}},$$

pour les équations des deux surfaces du liquide, dans lesquelles on regardera les radicaux comme des quantités positives. On pourra remplacer l'équation (17) par celle-ci :

$$\varepsilon^3 = 2\pi\int_0^x ztdt + 2\pi\int_0^{x'} z'tdt;$$

d'où l'on tire, en effectuant les intégrations,

$$\pi(x^2+x'^2)c = \varepsilon^3 + \pi ba^2(x+x');$$

ce qui fait connaître la constante c, de sorte qu'il ne reste plus rien d'inconnu dans les expressions de z et z'.

On peut remarquer que la différence de niveau des deux points C et C' ne dépendra pas du volume du liquide. Généralement, cette différence sera

$$h'-h = \frac{a^2}{\gamma'} - \frac{a^2}{\gamma},$$

et ne dépendra, par conséquent, pour un même liquide, que des courbures de ses deux surfaces.

(66). Si le tube est cylindrique dans toute sa longueur, et terminé inférieurement par une portion de plan horizontal, qui se joint à ses deux surfaces intérieure et extérieure par deux arêtes vives, comme dans le n° 63, le liquide descendra jusqu'à cette extrémité du tube, pour s'arrêter à l'une ou à l'autre de ces deux arêtes, lorsque l'équilibre sera possible. Le rayon x' sera donné; on aura $i'=0$, $\mathcal{C}'=b$, et l'expression de z' sera la même que dans le numéro précédent. Si le liquide est convexe par en haut, c'est-à-

dire, si la quantité b est positive, il faudra qu'il le soit aussi par en bas, et le liquide ne pourra s'arrêter qu'à l'arête intérieure du tube. Si, au contraire, cette quantité est négative, le liquide pourra d'abord être concave par en bas, et s'arrêter à l'arête intérieure. Sa concavité, moindre qu'à son extrémité supérieure, diminuera de plus en plus, à mesure qu'on augmentera la hauteur du liquide; elle disparaîtra entièrement, et la surface inférieure du liquide sera plane, lorsque cette hauteur égalera celle du même liquide au-déssus du niveau extérieur, dans le cas où le tube est immergé par son extrémité inférieure : au-delà, le liquide deviendra convexe, et ne pourra plus s'arrêter qu'à l'arête extérieure du tube. En prenant alors pour x le rayon de cette arête, et supposant très petit le rapport $\frac{x}{a\epsilon}$, nous aurons

$$z = c - \frac{\epsilon a^2}{x} + \frac{2x}{3\epsilon^3} - \frac{2x(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{3\epsilon^3} - \frac{x}{\epsilon}\sqrt{1-\frac{\epsilon^2 t^2}{x^2}},$$

pour l'équation de la surface inférieure du liquide, dans laquelle on regardera les radicaux comme des quantités positives. En effet, d'après la remarque du n° 55, la valeur de $z-c$ se déduirait de celle de z du n° 54, en y changeant le sens des z positives et le signe des termes qui renferment une puissance impaire de a^2; ce qui est la même chose que de changer le signe des autres termes, comme nous le faisons ici, en conservant à l'axe des z sa direction en sens contraire de la pesanteur.

Le plan horizontal au-dessus duquel seront portées les z positives étant arbitraire, nous pouvons prendre pour ce plan celui qui termine le tube. Nous aurons donc $z = 0$, quand $t = x$; ce qui donne

$$c = \frac{\epsilon a^2}{x} - \frac{2x}{3\epsilon^3} + \frac{2x(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{3\epsilon^3} + \frac{x}{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon^2}.$$

L'équation (17) sera la même chose que celle-ci :

$$\epsilon^3 = 2\pi\int_0^{x'} z'tdt - 2\pi\int_0^{x} ztdt;$$

et en y substituant la valeur de z' du numéro précédent, et celle de z

qu'on vient d'écrire, il en résultera

$$\varepsilon^3 + \pi c\,(x^3 - x'^3) = \pi a^3\,(\mathcal{C}x - bx');$$

ce qui fait connaître la valeur de $\mathcal{C}$. Les quantités c et $\mathcal{C}$ étant ainsi déterminées, les expressions de z et de z' ne renferment plus rien d'inconnu. Nous avons supposé b négatif; mais s'il était positif, il suffirait de mettre au lieu de x, dans ces différentes formules, le rayon x' de l'arête intérieure à laquelle le liquide s'arrêterait alors.

Comme la plus grande valeur de $\mathcal{C}$ est l'unité, il s'ensuit qu'on aura le plus grand volume du liquide que le tube puisse soutenir, en faisant $\mathcal{C} = 1$ dans la valeur de ε^3. Si l'on appelle μ le poids de ce liquide, et qu'on substitue pour c sa valeur, il vient

$$\mu = \pi g\rho\left[\frac{a^2x'}{x}\,(x' - bx) + \frac{2x}{3}\,(x^3 - x'^3)\right],$$

dans le cas de b négatif, et

$$\mu = \pi g\rho a^2 x'\,(1 - b),$$

dans le cas de b positif.

Si le liquide est le mercure non oxidé, et que le tube soit de verre, on sait, par la figure que ce fluide affecte dans un tube capillaire, que la quantité b est positive et moindre que l'unité: le poids μ ne serait donc pas nul, et l'observation de ce poids pourrait servir à déterminer la valeur de b, en supposant connue celle de a.

Quand le tube est mouillé du liquide que l'on considère, on a $b = -1$, et

$$\mu = \pi g\rho\,(x + x')\left[\frac{a^2x'}{x} + \frac{2x}{3}\,(x - x')\right].$$

S'il s'agit de l'eau, par exemple, on prendra pour a^2 dans cette formule, sa valeur numérique trouvée dans le n° 56.

(67). Pour donner une dernière application des formules du n° 64, supposons que le tube soit conique. La courbure de la surface du liquide la plus voisine du sommet sera la plus grande; le liquide sera donc poussé vers ce point ou en sens contraire, selon que ses deux

surfaces seront concaves ou convexes, c'est-à-dire selon que l'angle ω sera obtus ou aigu, ou son cosinus b négatif ou positif. Par conséquent, pour tenir le poids du liquide en équilibre, il faudra que le sommet du cône soit au-dessous dans le cas de la convexité, et au-dessus dans le cas de la concavité. Je supposerai que ce soit le premier cas qui ait lieu; le second se traiterait de la même manière.

On aura $i' = i$, et i sera l'angle donné que fait la génératrice du cône avec son axe vertical. Les deux quantités $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}'$ ne seront pas égales; elles différeront par le signe du second terme (n° 58), c'est-à-dire que l'on aura

$$\mathfrak{G} = b\cos i - \sqrt{1-b^2}\sin i, \qquad \mathfrak{G}' = b\cos i + \sqrt{1-b^2}\sin i.$$

Je compterai les z et z' positives à partir du plan horizontal, mené par le sommet du cône; il en résultera

$$y = \frac{x}{\operatorname{tang} i}, \qquad y' = \frac{x'}{\operatorname{tang} i};$$

et l'on aura, en même temps,

$$V = \frac{\pi\cos i}{3\sin i}(x^2 + xx' + x'^2)(x' - x).$$

La surface supérieure du liquide tournera sa concavité en-dehors; chaque verticale ne la rencontrera qu'en un seul point, et, en chacun de ses points, la normale extérieure et la verticale tirée en sens contraire de la pesanteur, feront un angle aigu. Par conséquent, l'expression de T' se déduira de la formule (10), en y mettant $\mathfrak{G}'$ et x' au lieu de b et α; ce qui donne

$$T' = -\frac{\mathfrak{G}'a^2}{x'} - \frac{2x'}{3\mathfrak{G}'^3} + \frac{2x'(1-\mathfrak{G}'^2)^{\frac{3}{2}}}{3\mathfrak{G}'^3} + \frac{x'}{\mathfrak{G}'}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{G}'^2 t^2}{x'^2}},$$

en négligeant les termes divisés par a^2, et considérant les radicaux comme des quantités positives. On en conclut

$$T' - X' = \frac{x'}{\mathfrak{G}'}\left(\sqrt{1-\frac{\mathfrak{G}'^2 t^2}{x'^2}} - \sqrt{1-\mathfrak{G}'^2}\right),$$

$$v' = \frac{\pi x'^3}{\mathfrak{G}'^3}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-\mathfrak{G}'^2)^{\frac{3}{2}} - \mathfrak{G}'^2\sqrt{1-\mathfrak{G}'^2}\right].$$

Quant à la surface inférieure du liquide, elle tournera aussi sa concavité en-dehors; mais dans une certaine étendue, près de la paroi du tube, elle sera rencontrée en deux points par chaque verticale; et, de plus, l'angle compris entre la normale extérieure et la verticale tirée de bas en haut, sera obtus depuis le centre jusqu'aux points où le plan tangent est vertical, et aigu depuis ces points jusqu'au contour. Cela étant, on aura

$$T = -\frac{6a^2}{x} + \frac{2x}{3c^2} + \frac{2x(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}{3c^3} - \frac{x}{c}\sqrt{1-\frac{c^2t^2}{x^2}},$$

où l'on regardera le radical $\sqrt{1-c^2}$ comme positif, et le radical $\sqrt{1-\frac{c^2t^2}{x^2}}$ aussi comme positif dans la première partie de la surface, qui s'étendra depuis $t=0$ jusqu'à $t=\frac{x}{c}$, mais comme négatif dans la seconde partie, c'est-à-dire depuis $t=\frac{x}{c}$ jusqu'à $t=x$. On aura donc

$$X - T = \frac{x}{c}\sqrt{1-c^2} + \frac{x}{c}\sqrt{1-\frac{c^2t^2}{x^2}};$$

et d'après le signe du second radical, on en conclura

$$v = \frac{\pi x^3}{c^3}\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1-c^2)^{\frac{3}{2}} + c^2\sqrt{1-c^2}\right].$$

Au moyen de ces différentes valeurs, les équations (16) et (17) deviennent

$$\frac{x}{\tang i} = c - \frac{6a^2}{x} + \frac{2x}{3c^2} + \frac{2x(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}{3c^3} + \frac{x}{c}\sqrt{1-c^2},$$

$$\frac{x'}{\tang i} = c - \frac{6'a^2}{x'} - \frac{2x'}{3c'^2} + \frac{2x'(1-c'^2)^{\frac{3}{2}}}{3c'^3} + \frac{x'}{c'}\sqrt{1-c'^2},$$

$$c^3 = \frac{\pi\cos i}{3\sin i}(x^2 + xx' + x'^2)(x'-x)$$
$$+ \frac{\pi x^3}{c^3}\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1-c^2)^{\frac{3}{2}} + c^2\sqrt{1-c^2}\right]$$
$$+ \frac{\pi x'^3}{c'^3}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-c'^2)^{\frac{3}{2}} - c'^2\sqrt{1-c'^2}\right].$$

La dernière et celle qu'on obtiendra en retranchant la première de la seconde, serviront à déterminer x et x'; l'une ou l'autre des deux premières fera connaître ensuite la valeur de c, et ce sera la solution complète du problème.

Elle se simplifiera beaucoup, lorsque l'angle i sera très petit; ce qui permet de remplacer cos i par l'unité. La différence $x' - x$ sera aussi très petite; et en la négligeant et faisant $6' = 6 = b$, excepté dans les termes qui sont divisés par i ou multipliés par la constante a^2, ce qui peut les rendre considérables, nous aurons

$$\frac{x'-x}{\sin i} = \frac{ba^2}{x^2}(x'-x) - \frac{2a^2}{x}\sqrt{1-b^2}\sin i - \frac{4x}{3b^2},$$

$$\epsilon^3 = \frac{\pi x^2 (x'-x)}{\sin i} + \frac{4\pi x^3}{3b^3}.$$

En ajoutant ces deux équations après avoir multiplié la première par πx^2, on en déduit

$$x'-x = \frac{\epsilon^3}{\pi b a^2} + \frac{2x}{b}\sqrt{1-b^2}\sin i;$$

et la seconde devient ensuite

$$\epsilon^3 = \frac{\epsilon^3 x^2}{ba^2 \sin i} + \frac{2\pi x^3}{b}\sqrt{1-b^2} + \frac{4\pi x^3}{3b^3}; \qquad (18)$$

en sorte qu'on n'aura plus qu'à résoudre cette équation du troisième degré.

(68). Supposons qu'on incline l'axe du cône, et qu'il fasse un angle θ avec un plan horizontal, mené par son sommet. Par ce même point, menons un second plan, perpendiculaire à l'axe, et un troisième perpendiculaire à l'intersection des deux premiers. Prenons ces trois plans pour ceux des coordonnées, et désignons par ζ, n, n', les trois coordonnées d'un point quelconque M de la surface inférieure du liquide, respectivement parallèles à l'axe du cône, à l'intersection des deux derniers plans, et à celle des deux premiers. L'ordonnée z du même point aura pour valeur

$$z = \zeta \sin\theta - n\cos\theta.$$

Au lieu de la seconde équation (14), nous aurons donc

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}=\frac{2}{a^2}(\zeta\sin\theta-\eta\cos\theta-c),$$

pour l'équation de la surface inférieure; λ et λ' étant les deux rayons de courbure au point M, et la valeur de $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}$ étant donnée par la formule (2), dans laquelle on mettra η, η', ζ, à la place de x, y, z. Si l'on représente par t la distance du point M à l'axe du cône, l'équation du contour sera toujours la seconde équation (15), en y mettant ζ au lieu de z, et désignant par $\mathfrak{C}$ la même constante que précédemment.

Cela posé, on pourra regarder ζ comme une fonction de t et η, dont le développement, suivant les puissances de η, sera de la forme :

$$\zeta=Z+Z'\frac{\eta^3}{a^2}+Z''\frac{\eta^5}{a^4}+\text{etc.};$$

Z, Z', Z'', etc., étant des fonctions de t. En substituant cette série à la place de ζ dans l'équation précédente, et égalant ensuite les termes semblables dans ses deux membres, on formera, en effet, une suite d'équations dont la première ne contiendra que Z, la seconde Z et Z', la troisième Z, Z' et Z'', et ainsi de suite. On en pourra donc déduire successivement les valeurs de toutes ces inconnues; et l'on pourra aussi s'assurer de la convergence de la série. Or, si l'on néglige, comme précédemment, les termes de l'ordre du carré du rayon du cône, divisé par a^2, la valeur de ζ se trouvera réduite à son premier terme Z, dont l'expression se déduira, sans nouveaux calculs, de celle qu'on a trouvée pour z dans le cas de l'axe vertical, en y mettant $\frac{a^2}{\sin\theta}$ à la place de a^2. Le même raisonnement s'applique aussi à la surface supérieure du liquide; il s'ensuit qu'au degré d'approximation où nous nous arrêtons, l'inclinaison θ de l'axe du cône n'influe sur les équations d'équilibre du liquide, qu'en ce qu'il y faut remplacer a^2 par $\frac{a^2}{\sin\theta}$; et, à cause de $a^2=\frac{H}{g\ell}$, cela revient à changer la pesanteur g dans sa composante $g\sin\theta$, parallèle à l'axe du cône.

L'équation (18) donnera alors

$$\sin\theta = \frac{ba^2 \sin i}{x^2} - \frac{2\pi a^2 x \sin i}{\varepsilon^3}\left(\sqrt{1-b^2} + \frac{2}{3b^2}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sin\theta = \frac{ba^2}{k^2 \sin i} - \frac{2\pi a^3 k \sin^2 i}{\varepsilon^3}\left(\sqrt{1-b^2} + \frac{2}{3b^2}\right),$$

en désignant par k la distance $\frac{x}{\sin i}$ du liquide au sommet du cône. Si l'on a mesuré k directement, cette formule fera connaître l'angle θ correspondant, que l'on pourra comparer à l'inclinaison observée. La même équation aura lieu dans le cas de b négatif, en supposant l'axe incliné au-dessous du plan horizontal passant par le sommet du cône, et changeant, en conséquence, le signe de $\sin\theta$.

(69). D'après le titre de ce chapitre, il nous reste encore à considérer l'équilibre de plusieurs liquides superposés et contenus dans un tube capillaire. Je supposerai qu'il y en ait deux; les constantes spéciales H et F se rapporteront au liquide inférieur, dans lequel l'extrémité du tube est plongée, et qui s'étend indéfiniment en-dehors. Je désignerai par H′ et F′ les constantes relatives au liquide supérieur; en sorte que, si chacun de ces liquides était isolé, l'élévation et la courbure du premier dépendraient de H et F, et celles du second, de H′ et F′. Soit

$$F - F' = K;$$

et représentons par G une nouvelle constante, relative à la matière des deux fluides. Soit aussi ρ la densité du liquide inférieur, et ρ' celle du liquide supérieur, diminuées l'une et l'autre de la densité de l'air.

Les équations des surfaces supérieures du premier et du second liquide seront, d'après les n°s 29 et 30,

$$\left.\begin{aligned}(\rho-\rho')gz + c &= \tfrac{1}{2}G\left(\tfrac{1}{\lambda}+\tfrac{1}{\lambda'}\right),\\ \rho' g z' - c &= \tfrac{1}{2}H'\left(\tfrac{1}{\mu}+\tfrac{1}{\mu'}\right);\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

c désignant une constante arbitraire, et les ordonnées positives z et z' étant comptées en sens contraire de la pesanteur, à partir du niveau du premier liquide en-dehors du tube. La valeur de $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}$ sera donnée par la formule (2), dans laquelle on déterminera le signe du dénominateur, d'après l'angle que fait la normale extérieure à ce premier liquide avec la verticale tirée dans le sens des z positives, de sorte que ce dénominateur soit positif ou négatif, selon que l'angle dont il s'agit sera aigu ou obtus. La valeur de $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}$ se déduira de la même formule, en y mettant z' au lieu de z, et déterminant le signe du dénominateur, par la même règle appliquée au liquide supérieur.

Indépendamment des équations (a), dont chacune appartient à tous les points de l'une des deux surfaces, on aura, relativement à leurs contours (n° 46),

$$K = G\cos\varphi, \qquad F' = H'\cos\omega; \qquad (b)$$

φ étant l'angle que fait la normale à la surface de séparation des deux fluides, menée par un point quelconque de son contour en-dehors du liquide inférieur, avec la perpendiculaire abaissée du même point sur la paroi et dans la matière du tube ; et ω désignant l'angle analogue, relativement au contour de la surface libre du liquide supérieur.

(70). Lorsque la surface intérieure du tube est une surface de révolution, ayant son axe vertical, les deux surfaces capillaires seront aussi des surfaces de révolution qui auront le même axe que celle du tube; et les équations (a) et (b) prendront la même forme et se résoudront de la même manière que les équations (14) et (15). Nous prendrons, pour exemple, le cas le plus simple, celui d'un tube vertical dont la surface intérieure est celle d'un cylindre à base circulaire et d'un très petit diamètre.

En désignant par t la distance d'un point quelconque de l'une ou l'autre des deux surfaces capillaires à leur axe commun, multipliant les équations (a) par $2tdt$, et intégrant ensuite leurs deux membres, nous aurons

$$2(\rho-\rho')g\int ztdt+ct^2=\frac{G\frac{dz}{dt}t}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}},$$

$$2\rho'g\int z'tdt-ct^2=\frac{H'\frac{dz'}{dt}t}{\sqrt{1+\frac{dz'^2}{dt^2}}};$$

les intégrales $\int ztdt$ et $\int z'tdt$ étant nulles quand $t=0$. En même temps, les équations (b) prendront la forme :

$$G\frac{dz}{dt}+K\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}=0,$$

$$H'\frac{dz'}{dt}+F'\sqrt{1+\frac{dz'^2}{dt^2}}=0;$$

et elles auront lieu pour $t=\alpha$, en désignant par α le rayon du tube. Les signes des radicaux sont les mêmes ici que dans les équations précédentes. Si donc on fait $t=\alpha$ dans celles-ci, et qu'on élimine $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$ entre ces quatre équations, on aura

$$\left.\begin{aligned}2(\rho-\rho')g\int_0^\alpha ztdt+c\alpha^2+\alpha K&=0,\\ 2\rho'g\int_0^\alpha z'tdt-c\alpha^2+\alpha F'&=0.\end{aligned}\right\}\quad(c)$$

Appelons h et h' les ordonnées verticales des centres des deux surfaces capillaires, c'est-à-dire les valeurs de z et z' qui répondent à $t=0$. En ces points, les deux rayons de courbure de chaque surface sont égaux et de même signe. Soit donc aussi $\lambda=\lambda'=\gamma$ et $\mu=\mu'=\gamma'$ pour $t=0$. En vertu des équations (a), on aura

$$\left.\begin{aligned}(\rho-\rho')gh+c&=\frac{G}{\gamma},\\ \rho'gh'-c&=\frac{H'}{\gamma'}.\end{aligned}\right\}\quad(d)$$

Maintenant, dans une première approximation, à laquelle il suffira de nous arrêter, nous pouvons supposer que les surfaces capillaires

coïncident avec leurs sphères osculatrices, aux points où elles coupent leur axe de figure, et dont les ordonnées sont h et h'. Nous aurons alors

$$z = h + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - t^2}, \qquad z' = h' + \gamma' - \sqrt{\gamma'^2 - t^2};$$

les radicaux $\sqrt{\gamma^2 - t^2}$ et $\sqrt{\gamma'^2 - t^2}$ étant respectivement de même signe que γ et γ', c'est-à-dire positifs ou négatifs, suivant que chaque surface tourne sa concavité par en haut ou par en bas. Je substitue ces valeurs de z et z' dans les équations (c); il vient

$$(\rho - \rho')g\left[(h+\gamma)\alpha^2 + \frac{2}{3}(\gamma^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\gamma^3\right] + c\alpha^2 + \alpha K = 0,$$

$$\rho' g\left[(h'+\gamma')\alpha^2 + \frac{2}{3}(\gamma'^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\gamma'^3\right] - c\alpha^2 + \alpha F' = 0;$$

ou bien, en vertu des équations (d),

$$\frac{G\alpha^2}{\gamma} + \alpha K + g(\rho - \rho')\left[\gamma\alpha^2 + \frac{2}{3}(\gamma^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\gamma^3\right] = 0,$$

$$\frac{H'\alpha^2}{\gamma'} + \alpha F' + g\rho'\left[\gamma'\alpha^2 + \frac{2}{3}(\gamma'^2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\gamma'^3\right] = 0.$$

Le rayon α étant supposé très petit, et en supposant que K et F′ ne soient pas aussi très petits, on tirera de ces équations, à très peu près,

$$\gamma = -\frac{G\alpha}{K} - \frac{g(\rho - \rho')G\alpha^3}{K^5}\left[GK^2 + \frac{2}{3}(G^2 - K^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}G^3\right],$$

$$\gamma' = -\frac{H'\alpha}{F'} - \frac{g\rho' H'\alpha^3}{F'^5}\left[H'F'^2 + \frac{2}{3}(H'^2 - F'^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}H'^3\right],$$

où l'on regardera les radicaux comme des quantités positives. Les équations (d) donneront les valeurs correspondantes de h et h', quand on aura déterminé la constante c.

Or, si l'on désigne par $\pi\alpha^2\varepsilon$ le volume du liquide supérieur qui doit être donné, on aura

$$\alpha^2\varepsilon = 2\int_0^\alpha z'tdt - 2\int_0^\alpha ztdt,$$

ou, d'après les équations (c),

$$\alpha^2 6 = \frac{c\alpha^2}{g}\left(\frac{1}{\rho-\rho'}+\frac{1}{\rho'}\right)+\frac{\alpha}{g}\left(\frac{K}{\rho-\rho'}-\frac{F'}{\rho'}\right);$$

ce qui donne

$$c = \frac{g\rho'(\rho-\rho')^2}{\rho}+\frac{1}{\rho\alpha}[(\rho-\rho')F'-\rho'K].$$

En substituant cette valeur dans les équations (*d*), et observant que $K = F - F'$, on en conclut

$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{\rho'^2}{\rho}-\frac{F}{g\rho\alpha}+\frac{\alpha}{K^3}\left[GK^2+\frac{2}{3}(G^2-K^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}G^3\right], \\ h' &= \frac{(\rho-\rho')^2}{\rho}-\frac{F}{g\rho\alpha}+\frac{\alpha}{F'^3}\left[H'F'^2+\frac{2}{3}(H'^2-F'^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}H'^3\right]. \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Les valeurs de γ, γ', h, h', étant connues, celles de z et z', et, par conséquent, la forme et l'élévation des deux surfaces capillaires, le sont aussi ; ce qui est la solution complète du problème.

(71). Si l'on supprime le liquide supérieur, il faudra supposer

$$\rho' = 0, \quad F' = 0, \quad H' = 0, \quad K = F, \quad G = H,$$

au moyen de quoi la première équation (*e*) devient

$$h = -\frac{F}{g\rho\alpha}+\frac{\alpha}{F^3}\left[HF^2+\frac{2}{3}(H^2-F^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}H^3\right];$$

et si l'on fait $H = g\rho a^2$, $F = Hb$, comme dans le n° 54, cette valeur de h coïncidera avec celle de ce numéro, en négligeant les termes divisés par a^2, dont nous n'avons pas tenu compte dans le calcul précédent. Il en sera de même en faisant

$$\rho' = \rho, \quad F' = F, \quad H' = H,$$

dans l'expression de h'.

Je désigne par x l'excès de la valeur de h' donnée par la seconde équation (*e*), sur cette dernière valeur de h. On aura

$$\begin{aligned} x = \frac{(\rho-\rho')^2}{\rho} &- \frac{\alpha}{F^3}\left[HF^2+\frac{2}{3}(H^2-F^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}H^3\right] \\ &+\frac{\alpha}{F'^3}\left[H'F'^2+\frac{2}{3}(H'^2-F'^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}H'^3\right]. \end{aligned}$$

Il en résulte donc que si le liquide auquel répondent les constantes ρ, H, F, est d'abord seul dans le tube, et que l'on verse au-dessus un volume $\pi\alpha^2\varepsilon$ d'un autre liquide, pour lequel les constantes analogues soient ρ', H', F', le centre de la surface supérieure s'élèvera ou s'abaissera, selon que cette valeur de x sera positive ou négative. Lorsque cette surface tournera sa concavité dans le même sens, et coupera la surface du tube sous le même angle, avant et après l'introduction du second liquide, on aura

$$\frac{F'}{H'} = \frac{F}{H};$$

ce qui réduira la valeur de x à son premier terme, lequel est positif à cause de $\rho > \rho'$. Dans ce cas, il y aura donc toujours élévation du centre de la surface supérieure ; mais ce point pourra s'abaisser, quand la courbure de cette surface aura augmenté ou diminué par l'introduction du second liquide, selon qu'elle était auparavant concave ou convexe par en haut.

Supposons, par exemple, qu'après cette introduction la surface supérieure soit concave par en haut et tangente à la paroi du tube, et qu'elle faisait primitivement avec cette paroi un angle de 120°, dont le cosinus est $-\frac{1}{2}$. On aura

$$F' = -H', \quad F = -\frac{1}{2}H;$$

et il en résultera, à très peu près,

$$x = \frac{(\rho-\rho')\varepsilon}{\rho} - \frac{\alpha}{5};$$

en sorte que si la densité ρ' du liquide supérieur est les neuf-dixièmes de la densité ρ du liquide inférieur, il suffira que ε soit moindre que le diamètre 2α du tube, pour que x ait une valeur négative, et qu'on observe, en conséquence, un abaissement du centre de la surface supérieure.

Cette remarque peut servir à expliquer un phénomène observé par Th. Young. L'eau étant le liquide contenu d'abord dans un tube, dont il ne dit pas le diamètre, ce physicien a versé au-dessus du liquide une petite goutte d'huile, et il a vu la surface supé-

rieure de cette huile s'abaisser au-dessous de la hauteur primitive de l'eau ; abaissement qu'il faut sans doute rapporter au centre de la surface, c'est-à-dire au point où elle coupe l'axe du tube. Or, l'huile ayant été introduite par le haut du tube, il y a lieu de croire que la paroi du tube en était humectée, au-dessus de la surface de ce liquide, et qu'on avait, par conséquent, $F' = -H'$, comme je l'ai supposé dans le numéro précédent. On peut aussi supposer que l'eau ne mouillait pas primitivement le tube dans toute sa longueur, sans quoi l'huile aurait difficilement descendu le long de ses parois. On peut donc admettre que la surface de l'eau n'était pas tangente à la paroi du tube, et qu'on avait $F < -H$, comme je l'ai aussi supposé ; et ces données suffisent, ainsi qu'on vient de le voir, pour que la valeur de x puisse être négative, conformément à l'observation de Th. Young.

Il avait présenté cette observation singulière, comme une difficulté qu'il élevait contre la théorie de Laplace, et que j'ai indiquée au commencement de cet ouvrage. Mais, sur ce point, les formules de la *Mécanique céleste* sont les mêmes que celles dont je viens de me servir pour montrer la possibilité d'un abaissement du centre de la surface supérieure ; et l'on est fondé à croire que l'expérience de Th. Young, au lieu d'être contraire à la théorie, en deviendrait une vérification intéressante, si elle était répétée et accompagnée de mesures suffisamment exactes.

(72). Au reste, l'abaissement dont il s'agit ne peut avoir lieu qu'à l'égard de la partie centrale de la surface supérieure. Lorsque plusieurs liquides sont contenus dans un tube cylindrique et vertical, plongé dans le liquide inférieur, leur poids total au-dessus d'un plan horizontal choisi arbitrairement est le même que si le tube ne renfermait que le liquide inférieur ; et, comme la densité de celui-ci doit être plus grande, il faut que le volume total de ces liquides, et, par conséquent, l'ordonnée moyenne de la surface supérieure du liquide le plus élevé, soient plus considérables que si le liquide inférieur existait seul. Cette invariabilité du poids total aurait encore lieu, lors même que les liquides seraient mélangés, pourvu que le mélange n'atteignît pas l'extrémité inférieure du tube.

En effet, prenons un plan horizontal à une distance sensible au-dessus de son extrémité inférieure et au-dessous des liquides superposés ou mélangés; en supposant la surface intérieure du tube parfaitement cylindrique, et faisant abstraction des sinuosités qui peuvent donner lieu à différens états d'équilibre (n° 62), il est évident que l'action verticale du tube sera nulle sur chacune des molécules fluides situées au-dessus du plan horizontal. Cela étant, soit R l'action exercée en sens contraire de la pesanteur, par le liquide situé au-dessous de ce plan sur le liquide situé au-dessus, et U le poids de celui-ci; pour son équilibre, il faudra qu'on ait

$$R = U + \Pi k^2;$$

Π désignant la pression atmosphérique rapportée à l'unité de surface, k^2 l'aire de la base du tube, qui peut n'être pas un cercle, et, par conséquent, Πk^2 la composante verticale de cette pression. La force R se composera de deux parties : l'une relative à l'action du liquide situé au-dessous du plan horizontal, sur la couche du liquide supérieur adjacente à la paroi du tube et d'une épaisseur insensible; et l'autre relative à l'action du premier fluide sur tous les points du second qui s'éloignent sensiblement de la surface du tube. Je représenterai par V la première partie de R; la seconde sera la pression qui a lieu à l'intérieur du liquide dans lequel le tube est plongé, et qui répond à la distance du plan horizontal au niveau extérieur de ce liquide; et comme cette pression intérieure, rapportée à l'unité de surface, est égale à $\Pi + \rho g \delta$, en appelant g la gravité, ρ la densité du liquide, et δ la distance dont il s'agit, la seconde partie de R sera $\Pi k^2 + \rho g \delta k^2$. En substituant sa valeur totale dans l'équation précédente, on aura donc

$$U = V + \rho g \delta k^2.$$

Or, la quantité V ne dépendra que de la matière du liquide inférieur et de son degré de compression près de la paroi du tube, c'est-à-dire de la matière de ce liquide et de celle du tube. Il en sera donc de même à l'égard du poids U; par conséqnent, ce poids ne changera pas avec la matière et le nombre des autres liquides; ce qu'il s'agissait de prouver.

Quand il n'y a que deux liquides, et qu'ils ne sont point mélangés, on parvient à la même conclusion au moyen de l'équation (17) du n° 36. Cette équation est

$$P + \Gamma = -\frac{1}{2}H'c\cos\omega - \frac{1}{2}Gc\cos\varphi;$$

P étant le poids du liquide supérieur, $P+\Gamma$ le poids du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire, c le contour de la base du tube, ω et φ les mêmes angles, et H′ et G les mêmes quantités que dans les équations (b). On aura donc, d'après ces équations,

$$P + \Gamma = -\frac{1}{2}cF' - \frac{1}{2}cK = -\frac{1}{2}cF,$$

à cause de $K = F - F'$. Or, cette valeur de $P+\Gamma$ est, comme on voit, indépendante de la matière du liquide supérieur.

Dans ce cas particulier, le poids U diminué de $g\rho\delta k^2$ est la même chose que $P+\Gamma$; on doit donc avoir

$$V = -\frac{1}{2}cF;$$

et, en effet, V est la somme des forces P et ϖ du n° 38, multipliée par c; quantité égale à $-\frac{1}{2}cF$, d'après le n° 46.

(73). Quelle que soit l'action mutuelle des deux liquides superposés, si la paroi intérieure du tube est recouverte, dans toute sa longueur, d'une couche très mince de l'un de ces liquides, mais dont l'épaisseur ne soit point insensible, leur surface de séparation sera tangente à la paroi du tube, et elle tournera par en haut sa convexité ou sa concavité, selon que la couche mince appartiendra au liquide supérieur ou au liquide inférieur.

En effet, supposons que ce soit le premier cas qui ait lieu. Si l'on applique au liquide inférieur la formule (2) du n° 40, on en conclura $\varpi = -q$; car, dans la supposition que nous faisons, la fonction φ contenue dans cette formule, sera évidemment la même que la fonction R_1 renfermée dans l'expression de q_1 du n° 27. De plus, le liquide supérieur n'éprouvera aucune variation rapide de densité près de la couche mince, adjacente au tube; on aura alors $\varpi' = 2q'$ (n° 49);

et, d'après ces valeurs de ϖ et ϖ', les équations (10) du n° 46 donneront $K = G$; d'où il résultera $\cos\varphi = 1$ et $\varphi = 0$; ce qui répond à une surface tangente au tube et convexe par en haut. Si, au contraire la couche mince adjacente au tube est formée par le liquide inférieur, on aura $\varpi = 2q$ et $\varpi' = -q_1$; il en résultera $K = -G$, et ensuite $\cos\varphi = -1$ et $\varphi = \pi$; ce qui répond à une surface tangente au tube et concave par en haut.

Ces résultats contiennent, comme cas particuliers, ceux du n° 52 qui se rapportent à un seul liquide, renfermé dans un tube qui n'exerce aucune attraction sur ses molécules, ou dans un tube mouillé préalablement dans toute sa longueur par ce même liquide.

(74). M. Gay-Lussac a effectivement reconnu que le mercure contenu dans un tube capillaire et mouillé successivement par différens liquides, prend toujours une forme hémisphérique et convexe par en haut, lorsqu'il est recouvert d'une couche quelconque du même liquide dont le tube est humecté. Les dépressions du mercure qu'il a observées dans ces différens cas, font connaître celles qui auraient lieu si la couche supérieure n'existait pas; mais elles laissent inconnus les angles sous lesquels la surface de ce fluide viendrait alors rencontrer celle du tube, et elles montrent seulement que ces angles varieraient avec la matière du liquide qui mouille le tube dans chaque cas.

Pour le faire voir, appliquons les équations (e) au cas du mercure recouvert par un autre liquide qui mouillera, en outre, la paroi du tube dans toute sa longueur. D'après ce qu'on vient de démontrer, il y faudra faire $K = G$. Relativement au liquide supérieur, on aura $F' = -H'$; et, à l'égard du mercure, si l'on fait $F = Hb$, b sera le cosinus de l'angle aigu sous lequel sa surface viendrait couper celle du tube mouillé, en supposant qu'on eût enlevé la totalité du liquide supérieur, et qu'on laissât seulement subsister la couche mince de ce liquide, adjacente à la paroi du tube. Soit de plus $H = g\rho a^2$, les équations (e) deviendront

$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{\rho' s}{\rho} - \frac{a^2 b}{\alpha} + \frac{\alpha}{3}, \\ h' &= \varepsilon - \frac{\rho' s}{\rho} - \frac{a^2 b}{\alpha} - \frac{\alpha}{3}; \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

d'où il résulte

$$h' - h = \varepsilon - \frac{2\alpha}{3},$$

pour la différence de hauteur des centres des deux surfaces du liquide supérieur.

M. Gay-Lussac a pris successivement l'eau et l'alcohol pour le liquide supérieur. La température était la même, et s'élevait à 17°,5; le rayon du tube était aussi le même, savoir :

$$\alpha = 0^{mm},6472.$$

Les valeurs de ε et de h sont les moyennes de plusieurs mesures qui différeraient peu entre elles. Dans le cas de l'eau, M. Gay-Lussac a trouvé

$$\varepsilon = 7^{mm},7300, \quad h = -7^{mm},4148;$$

en prenant

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{770}{10466},$$

les équations précédentes donnent

$$\frac{a^2 b}{\alpha} = 7^{mm},0618.$$

Dans le cas de l'alcohol, dont la densité était 0,8197 de celle de l'eau, on avait

$$\varepsilon = 7^{mm},4735, \quad h = -8^{mm},0261;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{a^2 b}{\alpha} = 7^{mm},5735.$$

Or, la différence de ces deux valeurs de $\frac{a^2 b}{\alpha}$ est trop grande pour être attribuée aux erreurs des observations; elle prouve que la quantité b n'est pas la même dans les deux cas; et la seconde valeur surpassant la première, il en faut conclure que l'attraction de la couche d'eau adjacente au tube l'emporte sur celle de la couche d'alcohol.

(75). En faisant usage de la première valeur de $\frac{a^2 b}{\alpha}$, et la multipliant par celle de α, on trouve

$a^2b = (4{,}5704)$ millimètres carrés.

Si l'on substitue cette valeur numérique dans la première équation (f), elle fera connaître ensuite la dépression du mercure recouvert d'une couche d'eau, d'une épaisseur donnée, et contenu dans un tube capillaire, d'un rayon α aussi donné, préalablement mouillé d'eau. On pourra faire usage de cette formule, tant que α aura une grandeur sensible, aussi petite que l'on voudra; mais quand la couche d'eau qui recouvre le mercure aura entièrement disparu, sa dépression sera déterminée par la formule du n° 71, qui devient

$$h = -\frac{a^2b}{\alpha} + \frac{\alpha}{b^3}\left[b^2 + \frac{2}{3}(1-b^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\right],$$

quand on y fait $F = bH$ et $H = g\rho\alpha^2$. Pour s'en servir, la valeur précédente de a^2b ne suffira donc pas; et il faudrait aussi connaître la valeur de b, à moins que le diamètre du tube ne soit assez petit pour qu'on puisse réduire cette dernière formule à son premier terme.

En faisant bouillir le mercure dans le tube qui le contient, on change cette quantité b, d'où dépend le degré de convexité du fluide, quand il n'est pas recouvert d'une couche d'eau. Casbois a fait voir qu'après une ébullition suffisamment prolongée, cette convexité diminue et se change même en une concavité, et, par suite, la dépression en ascension. Pour expliquer ce changement remarquable, on supposait que l'épaisseur de la couche d'eau adjacente au tube, ayant été diminuée par l'ébullition, la matière du tube pouvait agir directement sur les molécules du mercure, et qu'elle exerçait sur elles une attraction plus grande que celle de l'eau. Or, cela exigerait que la couche d'eau interposée entre la paroi du tube et le mercure eût entièrement disparu; car, pour peu que son épaisseur ne fût pas insensible, elle suffirait pour rendre impossible l'action mutuelle du mercure et du tube. L'épaisseur de la couche d'eau étant devenue insensible, on conçoit que la quantité b pourrait varier, à mesure que cette épaisseur diminuerait encore de plus en plus; mais une pareille réduction de la couche d'eau est inadmissible; et M. Dulong a donné l'explication véritable du chan-

gement de figure du mercure à la suite de l'ébullition. Il a montré que, dans cette opération, on oxide une couche de mercure, en contact avec l'air, et que cette petite couche, mêlée ensuite à la masse entière du liquide, suffit pour en changer les propriétés; en sorte que la couche d'eau adjacente au tube, qui a pu conserver une petite épaisseur quelconque, exerce sur le mercure, en partie oxidé, une attraction plus forte que celle qui avait lieu auparavant, dont l'intensité dépendra de la proportion de l'oxide formé, et, par conséquent, de la durée de l'ébullition.

CHAPITRE V.

Pression des liquides, modifiée par l'action capillaire.

(76). La même force qui produit l'élévation ou l'abaissement d'un liquide près de la paroi du tube ou du vase qui le contient, ou, généralement, près du corps contre lequel il s'appuie, influe aussi sur la pression qu'il exerce sur ce corps dans son état d'équilibre. Cette modification de la pression hydrostatique est une partie essentielle de la théorie de l'action capillaire; différens phénomènes en dépendent, comme on le verra dans la suite; et la solution du problème ne sera complète qu'autant qu'on aura déterminé la pression d'un liquide sur un solide, soit aux extrémités du liquide, soit en d'autres points quelconques. Nous allons nous occuper spécialement de cette détermination.

Appelons M un point du liquide, situé à une distance de sa surface et d'un corps solide, qui soit insensible, mais plus grande que le rayon d'activité moléculaire. De ce point, abaissons sur la surface de ce corps une perpendiculaire qui la rencontre en un autre point M′; et par le même point M faisons passer une seconde surface qui coupe à angle droit toutes les normales à la première. Les pressions exercées directement par le reste du liquide, sur la couche d'une épaisseur insensible, comprise entre les deux surfaces, seront transmises au solide par l'intermédiaire de cette couche. Si le corps est retenu par des points fixes, les efforts que ses appuis auront à supporter seront les résultantes de toutes ces pressions, en supposant, sans erreur sensible, chaque pression transportée du point M au point M′; s'il est entièrement libre, son poids devra faire équilibre à ces mêmes résultantes, en négligeant, aussi sans erreur appréciable, le poids de la couche liquide adjacente à sa surface; et, cela étant, dans le calcul des pressions totales que le corps éprouve, on rapporte à chaque

point M de la surface, la pression qui a réellement lieu au point M′ de celle de la couche liquide.

D'après ce qu'on a vu dans le n° 24, la pression rapportée à l'unité de surface et relative au point M, auquel on substitue le point M′, est la résultante d'une force N normale et dirigée de dehors en dedans du corps, et de deux forces tangentielles T et T′, dont les valeurs sont

$$\mathrm{N} = p + q\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right), \quad \mathrm{T} = \frac{dq}{dx}, \quad \mathrm{T}' = \frac{dq}{dy}; \quad (1)$$

p étant la pression sur un plan passant par le point M, laquelle est indépendante de sa direction; q désignant une quantité qui ne dépend que de la matière du liquide au point M; λ et λ' représentent les rayons de courbure principaux de la surface qu'on a fait passer par le point M, ou, sans erreur sensible, ceux de la surface même du corps au point M′, que l'on regardera comme positifs ou comme négatifs, selon que les lignes de courbure tournent leur concavité en-dedans du corps ou en-dehors; et, enfin, les axes des x et des y étant respectivement parallèles aux forces tangentielles T et T′.

Si le liquide est homogène et partout à la même température, la quantité q sera constante, comme sa densité, et la pression se réduira à la force normale N. La pesanteur étant la seule force donnée qui agisse sur le liquide, le premier terme de N aura pour expression

$$p = c - g\rho z;$$

z étant l'ordonnée du point M, verticale et dirigée en sens contraire de la gravité; g cette force, ρ la densité du liquide, et c une constante arbitraire. Quand une partie de la surface libre du liquide sera plane et horizontale, on aura $c = \Pi$, en comptant les z à partir de ce plan, et désignant par Π la pression atmosphérique. Quand aucune partie de la surface libre ne sera un plan, la constante c ne sera plus égale à la pression Π appliquée à cette surface, et l'on devra recourir à d'autres moyens pour la déterminer. Dans le premier cas, si la hauteur du point M au-dessus de la partie plane du liquide surpasse $\frac{1}{g\rho}\Pi$, la quantité p sera négative à ce

point. Cela arrivera, par exemple, dans l'intérieur d'un tube excessivement étroit où le liquide s'élève à une très grande hauteur au-dessus de son niveau extérieur, ou bien, sans que son diamètre soit extrêmement petit, lorsque le liquide sera placé dans un air très raréfié. Dans sa partie supérieure, le tube sera alors tiré de dehors en dedans, au lieu d'être poussé de dedans en dehors; et il devra résister à cette force par l'attraction qu'il exerce sur les molécules du liquide, diminuée de la répulsion calorifique. On voit aussi, par cette remarque, que la somme Σ, que représente p, peut non-seulement changer de grandeur dans un très grand rapport, pour de très petites différences de condensations du liquide (n° 13), mais qu'elle peut aussi changer de signe; en sorte que pour des valeurs très peu différentes de l'intervalle moyen des molécules, qui a lieu en haut et en bas du liquide, la répulsion calorifique soit prépondérante dans la partie inférieure du liquide, et l'attraction de la matière pondérable, dans la partie supérieure.

Le terme p de la valeur de N est la partie principale de la pression du liquide, et la seule à laquelle on ait égard, en général. La seconde partie est, en effet, très petite, et ne pourra devenir considérable que dans le cas d'un corps d'une très petite dimension et d'une très grande courbure. A la même profondeur, au-dessous du niveau du liquide, une sphère solide éprouvera, en vertu de ce second terme de N, une augmentation de pression d'autant plus grande que son diamètre sera plus petit. Toutes choses d'ailleurs égales, il faudra qu'elle soit susceptible d'une plus grande résistance, pour n'être pas brisée; et son diamètre subira, par la compression, une plus grande diminution que celui d'une autre sphère d'un plus grand rayon. Le coefficient q, dont dépend cet excès de pression intérieure, n'est pas exactement le coefficient $\frac{1}{2}$H, qui est déterminé par l'ascension ou la dépression du liquide dans un tube capillaire; ils diffèrent l'un de l'autre par une quantité q_1 relative à la couche superficielle du liquide. Si l'on néglige q_1 par rapport à q, qui paraît devoir être la partie principale de $\frac{1}{2}$H, il en résultera que dans l'eau, l'excès de pression dont il s'agit, en chaque

point d'une sphère, d'un rayon égal à un millième de millimètre, équivaudra à un enfoncement de 15 mètres à peu près dans le même liquide.

Mais nous allons démontrer que, quelle que soit la nature du liquide, et la forme d'un corps solide qui y est entièrement plongé, la seconde partie de la force N et les forces T et T', appliquées à tous les points de la surface de ce corps, se détruisent sans le secours d'aucune autre force, et ne peuvent lui faire prendre aucun mouvement de translation ou de rotation.

(77). En faisant pour abréger,

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}},$$

et désignant par V la seconde partie de N, on aura

$$V = q\,\frac{d.\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dx}}{dx} + q\,\frac{d.\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dy}}{dy}, \qquad (2)$$

quelle que soit la direction des axes des coordonnées x, y, z: on regardera, dans cette formule, ν comme une quantité positive ou négative, selon que la normale menée par le point M' à la surface du corps et dans son intérieur, fera un angle aigu ou obtus, avec une droite menée par le même point suivant la direction des z positives.

Désignons par η, η', ζ, les coordonnées d'un autre point m de cette surface, rapportées au point M' comme origine, et aux directions des forces T, T'; appelons q', ce que q devient en ce point m: il est évident que les dernières équations (1) seront la même chose que

$$T = \frac{dq'}{d\eta}, \quad T' = \frac{dq'}{d\eta'},$$

pourvu que l'on fasse $\eta = 0$ et $\eta' = 0$ après les différentiations, ce qui rendra nulles l'ordonnée ζ et ses différences partielles $\frac{d\zeta}{d\eta}$ et $\frac{d\zeta}{d\eta'}$. Les coordonnées de m, rapportées aux axes quelconques des x, y, z, seront

$$x + a\eta + b\eta' + c\zeta,$$
$$y + a'\eta + b'\eta' + c'\zeta,$$
$$z + a''\eta + b''\eta' + c''\zeta;$$

a, b, etc., étant les cosinus des angles compris entre les axes des n, n', ζ, et ceux des x, y, z, lesquels cosinus sont liés entre eux par des équations connues, qu'il est inutile d'écrire. On pourra considérer q' comme une fonction de ces trois nouvelles coordonnées; et alors on aura

$$\frac{dq'}{dn} = \left(\frac{dq}{dx}\right) a + \left(\frac{dq}{dy}\right) a' + \left(\frac{dq}{dz}\right) a'',$$
$$\frac{dq'}{dn'} = \left(\frac{dq}{dx}\right) b + \left(\frac{dq}{dy}\right) b' + \left(\frac{dq}{dz}\right) b'',$$

pour les valeurs particulières $n = 0$ et $n' = 0$.

Les parenthèses dont sont enveloppées les différences partielles de q, indiquent qu'elles doivent être prises en regardant les trois variables x, y, z, comme indépendantes; mais nous pouvons aussi considérer z comme une fonction de x et y, donnée par l'équation de la surface du corps; et sous ce point de vue, nous aurons

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \frac{dq}{dx} - \left(\frac{dq}{dz}\right)\frac{dz}{dx}, \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{dq}{dy} - \left(\frac{dq}{dz}\right)\frac{dz}{dy}.$$

D'ailleurs, l'axe des z positives étant la normale à la surface du corps, menée dans son intérieur par le point M' dont les coordonnées sont x, y, z, et c, c', c'', désignant les cosinus des angles que fait cet axe avec ceux des x, y, z, il s'ensuit qu'on aura

$$c = -\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dx}, \quad c' = -\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dy}, \quad c'' = \frac{1}{\nu},$$

en donnant à ν le même signe que dans l'expression de V. On a, en outre

$$ac + a'c' + a''c'' = 0, \qquad bc + b'c' + b''c'' = 0;$$

il en résultera donc

$$a'' = a\frac{dz}{dx} + a'\frac{dz}{dy}, \quad b'' = b\frac{dz}{dx} + b'\frac{dz}{dy};$$

ce qui fera disparaître $\left(\frac{dq}{dz}\right)$ dans les valeurs de $\frac{dq}{dn}$ et $\frac{dq}{dn'}$, ou de T et T', et les réduira à

$$T = \frac{dq}{dx}a + \frac{dq}{dy}a', \quad T' = \frac{dq}{dx}b + \frac{dq}{dy}b'. \quad (3)$$

De cette manière, les forces normale et tangentielles V, T, T′, sont exprimées en fonctions de coordonnées quelconques x, y, z; il faut, de plus, les transformer en d'autres forces, dont les directions soient aussi quelconques et invariables.

Supposons, pour cela, qu'on ait d'abord pris la résultante de V, T, T′, et qu'on la décompose ensuite suivant les axes des x, y, z. Soient X, Y, Z, ses trois nouvelles composantes; nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= a\mathrm{T} + b\mathrm{T}' + c\mathrm{V}, \\ \mathrm{Y} &= a'\mathrm{T} + b'\mathrm{T}' + c'\mathrm{V}, \\ \mathrm{Z} &= a''\mathrm{T} + b''\mathrm{T}' + c''\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Je substitue, dans ces formules, les valeurs de T et T′ données par les équations (3), et celles de c, c', c''; j'observe que l'on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 - c^2 = \frac{1}{\nu^2}\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right), \\ a'^2 + b'^2 &= 1 - c'^2 = \frac{1}{\nu^2}\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right), \\ a''^2 + b''^2 &= 1 - c''^2 = \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}\right), \\ aa' + bb' &= -cc' = -\frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}, \\ aa'' + bb'' &= -cc'' = \frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dx}, \\ a'a'' + b'b'' &= -c'c'' = \frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dy}; \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{1}{\nu^2}\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{dq}{dx} - \frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dq}{dy} - \frac{1}{\nu}\frac{dz}{dx}\mathrm{V}, \\ \mathrm{Y} &= \frac{1}{\nu^2}\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{dq}{dy} - \frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dq}{dx} - \frac{1}{\nu}\frac{dz}{dy}\mathrm{V}, \\ \mathrm{Z} &= \frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dx}\frac{dq}{dx} + \frac{1}{\nu^2}\frac{dz}{dy}\frac{dq}{dy} + \frac{1}{\nu}\mathrm{V}; \end{aligned}$$

et en y mettant pour V sa valeur donnée par l'équation (2), ces formules pourront s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{q}{\nu}\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)}{dx} - \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{q}{\nu}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}}{dy}, \\ Y &= \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{q}{\nu}\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)}{dy} - \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{q}{\nu}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}}{dx}, \\ Z &= \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{q}{\nu}\frac{dz}{dx}}{dx} + \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{q}{\nu}\frac{dz}{dy}}{dy}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Il s'agit donc de faire voir que si l'on applique ces trois forces à chacun des points M′ de la surface d'un corps solide, de forme quelconque, mais terminé de toutes parts, elles se feront équilibre, c'est-à-dire que la somme de toutes ces forces sera nulle, suivant chacun des trois axes de x, y, z, et la somme de leurs momens, aussi nulle, autour de chacune de ces trois droites.

(78). Pour fixer les idées, je suppose que l'axe des z soit vertical et dirigé de bas en haut, et que le corps que l'on considère soit situé en entier au-dessus du plan des x et y; je suppose, de plus, que chaque perpendiculaire à ce plan, et, généralement, une droite quelconque, tirée dans l'intérieur de ce corps, ne rencontre sa surface qu'en deux points; et comme les formules (4) sont évidemment indépendantes du signe de ν, je prendrai ce radical avec le signe + dans toute l'étendue de cette surface.

Cela posé, circonscrivons à cette même surface un cylindre vertical qui la divise en deux parties, l'une inférieure et l'autre supérieure. Dans toute la première partie, la normale intérieure fera un angle aigu avec l'axe des z; et puisque ν est une quantité positive, on aura

$$c = -\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dx}, \quad c' = -\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dy}, \quad c'' = \frac{1}{\nu};$$

les angles dont c, c', c'', sont les cosinus répondant à cette normale. Dans toute la partie supérieure, ce sera la normale extérieure qui fera un angle aigu avec l'axe des z; et, en appelant c_1, c'_1, c''_1, les cosinus des angles qui s'y rapportent, on aura aussi, à cause de ν positif,

$$c_1 = -\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dx}, \quad c'_1 = -\frac{1}{\nu}\frac{dz}{dy}, \quad c''_1 = \frac{1}{\nu}.$$

Enfin, si l'on désigne par ds l'élément différentiel de la surface du corps, et si l'on observe que cet élément et sa projection horizontale $dxdy$ doivent être des quantités positives, on aura

$$ds = \nu dxdy,$$

dans toute l'étendue de cette surface.

Multiplions les équations (4) par ds, puis intégrons dans toute cette étendue; nous aurons

$$\int X ds = \iint \left[\frac{d.\frac{q}{c''}(c'^2 + c''^2)}{dx} - \frac{d.\frac{qcc'}{c''}}{dy} \right] dxdy$$
$$+ \iint \left[\frac{d.\frac{q}{c''_1}(c'^2_1 + c''^2_1)}{dx} - \frac{d.\frac{qc_1c'_1}{c''_1}}{dy} \right] dxdy,$$

$$\int Y ds = \iint \left[\frac{d.\frac{q}{c''}(c^2 + c''^2)}{dy} - \frac{d.\frac{qcc'}{c''}}{dx} \right] dxdy$$
$$+ \iint \left[\frac{d.\frac{q}{c''_1}(c_1^2 + c''^2_1)}{dy} - \frac{d.\frac{qc_1c'_1}{c''_1}}{dx} \right] dxdy,$$

$$\int Z ds = -\iint \left(\frac{d.qc}{dx} + \frac{d.qc'}{dy} \right) dxdy - \iint \left(\frac{d.qc_1}{dx} + \frac{d.qc'_1}{dy} \right) dxdy;$$

la première intégrale double de chacune de ces expressions répondant à la surface inférieure du corps, et la seconde à sa partie supérieure. Ces intégrales auront donc pour limite commune, la ligne de contact du corps et du cylindre vertical circonscrit, en sorte qu'elles doivent être étendues aux valeurs de x et y, relatives à tous les points de la base de ce cylindre sur le plan de ces coordonnées.

Menons au contour de cette base deux tangentes parallèles à l'axe des y. Leurs points de contact diviseront cette courbe en deux parties; et nous aurons

$$\iint \frac{d.qc'}{dy} dxdy = (\int qc'dx) - [\int qc'dx],$$
$$\iint \frac{d.qc'_1}{dy} dxdy = (\int qc'_1 dx) - [\int qc'_1 dx];$$

les intégrales comprises entre des parenthèses répondant à l'une des deux parties, et celles qui sont renfermées entre des crochets appartenant à l'autre. Mais, pour tous les points de la courbe de contact du corps et du cylindre vertical, et, par conséquent, pour toutes les valeurs de x et y qui répondent à la projection horizontale de cette courbe, la quantité q est la même, soit qu'elle appartienne à la partie supérieure ou à la partie inférieure de la surface du corps; de plus, la normale intérieure à l'une de ces deux parties est, en chacun des mêmes points, le prolongement de la normale extérieure à l'autre partie, ou, autrement dit, les angles qui ont c, c', c'', pour cosinus sont les supplémens de ceux dont les cosinus sont c_1, c'_1, c''_1: dans les intégrales simples qui précèdent, on fera donc $qc' = -qc'_1$; d'où il résultera

$$(\int qc'dx) + (\int qc'_1 dx) = 0, \quad [\int qc'dx] + [\int qc'_1 dx] = 0,$$

et, par conséquent,

$$\iint \frac{d.qc'}{dy}\,dxdy + \iint \frac{d.qc'_1}{dy}\,dxdy = 0.$$

On prouvera de même que l'on a

$$\iint \frac{d.qc}{dx}\,dxdy + \iint \frac{d.qc_1}{dx}\,dxdy = 0;$$

et en ajoutant ces deux équations, on en conclura

$$\int Z ds = 0.$$

Par un raisonnement semblable, on trouve

$$\int X ds = 0, \qquad \int Y ds = 0.$$

Ainsi, les sommes des composantes des forces que nous considérons sont nulles suivant les trois axes des x, y, z.

Les équations (4) donnent

$$Xz - Zx = \frac{1}{\nu}\,\frac{d.\frac{q}{\nu}\left[\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)z - \frac{dz}{dx}x\right]}{dx} - \frac{1}{\nu}\,\frac{d.\frac{q}{\nu}\frac{dz}{dy}\left(\frac{dz}{dx}z + x\right)}{dy},$$

$$Yz - Zy = \frac{1}{\nu}\,\frac{d.\frac{q}{\nu}\left[\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)z - \frac{dz}{dy}y\right]}{dy} - \frac{1}{\nu}\,\frac{d.\frac{q}{\nu}\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z + y\right)}{dx},$$

$$Xy - Yx = \frac{1}{\nu}\frac{d\,\frac{1}{\nu}\left[\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)z+\frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx}x\right]}{dx} - \frac{1}{\nu}\frac{d.\frac{1}{\nu}\left[\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)z+\frac{dx}{dz}\frac{dz}{dy}y\right]}{dy};$$

et, comme les seconds membres de ces nouvelles équations ont la même forme que ceux des équations (4), on en conclura, par une analyse semblable à la précédente,

$$\int(Xz - Zx)\,ds = 0, \quad \int(Yz - Zy)\,ds = 0, \quad \int(Xy - Yx)\,ds = 0;$$

les intégrales s'étendant à la surface entière du corps. Les sommes des momens des forces X, Y, Z, par rapport aux axes des x, y, z, sont donc aussi nulles; par conséquent, ces forces appliquées à tous les points de la surface du corps se détruisent mutuellement; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Quoique nous ayons supposé, pour plus de simplicité, que la surface du corps n'était rencontrée qu'en deux points par chaque droite tirée dans son intérieur, il est aisé de voir, cependant, que la démonstration précédente aura encore lieu dans le cas d'un nombre quelconque d'intersections, lequel nombre sera toujours pair, à cause que le corps est terminé de toutes parts. Il faudra alors la diviser en plus de deux parties contiguës, et étendre les intégrales à chacune de ces parties séparément. Mais la démonstration et la proposition elle-même exigent que la surface du corps ne présente aucune arête vive, c'est-à-dire aucune ligne pour laquelle les plans tangens aux deux parties adjacentes de la surface, comprennent un angle fini. Quand il en existe, les forces X, Y, Z, appliquées à la surface entière du corps, ne se font plus équilibre; et d'ailleurs on ne doit pas perdre de vue que, près d'une arête vive, la résultante des forces N, T, T', déterminées par l'analyse du n° 23, n'exprime plus la véritable pression du liquide, dont la grandeur et la direction doivent alors être déduites de considérations particulières.

(79). Si l'on demande la pression exercée par les forces X, Y, Z, sur une portion seulement de la surface du corps plongé dans le liquide, les intégrales $\int X ds$, $\int Y ds$, $\int Z ds$, ne seront plus

nulles, et l'on en pourra déterminer les valeurs de la manière suivante.

Supposons que cette portion de surface appartienne à la partie inférieure du corps, à laquelle répondent les cosinus c, c', c''; il faudra supprimer, dans l'expression de chacune de ces trois intégrales, la partie qui renferme les autres cosinus c_1, c'_1, c''_1; et en considérant la troisième intégrale, on aura alors

$$\int Z ds = -\iint \frac{d.qc}{dx}\, dxdy - \iint \frac{d.qc'}{dy}\, dydx.$$

Faisons passer par le contour de la portion de surface que l'on considère, une surface cylindrique parallèle à l'axe des z. Par un point quelconque de ce contour, menons, dans l'intérieur du cylindre et dans l'intérieur du corps, des normales à leurs surfaces. Soient γ, γ', γ'', les cosinus des angles que fait la normale à la surface cylindrique, avec les axes des x, y, z; et ceux des angles qui répondent à l'autre normale étant c, c', c'', si l'on désigne par i l'angle compris entre ces deux droites, on aura

$$\cos i = c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''.$$

Les intégrales relatives à x et y s'étendront à tous les points de la base du cylindre sur le plan de ces coordonnées; or, chacune de ces intégrales doubles se réduira, comme dans le n° 35, à une intégrale simple, étendue au contour entier de cette base; et si nous appelons $d\sigma$ l'élément du contour de la portion de surface dont cette base est la projection, et δ l'angle aigu que fait cet élément avec le plan des x et y, de sorte que $\cos\delta d\sigma$ soit l'élément du contour de la base, nous aurons

$$\iint \frac{d.qc}{dx}\, dxdy = -\int qc\gamma \cos\delta d\sigma, \quad \iint \frac{d.qc'}{dy}\, dydx = -\int qc'\gamma' \cos\delta d\sigma;$$

donc, à cause de $\gamma'' = 0$, il en résultera

$$\int Z ds = \int q \cos i \cos\delta d\sigma;$$

l'intégrale s'étendant au contour entier de la portion de surface que l'on considère.

Lorsque cette portion de surface appartiendra à la partie supérieure

du corps, on prendra pour i l'angle compris entre la normale extérieure du corps et la normale intérieure du cylindre; quand elle appartiendra à la partie supérieure et à la partie inférieure, on calculera la valeur de $\int Z ds$ séparément pour chacune de ces deux parties. L'angle i sera aigu dans l'une et obtus dans l'autre; et il se comptera toujours à partir de la normale intérieure du cylindre parallèle à l'axe des z. On obtiendra de même les valeurs de $\int X ds$ et $\int Y ds$.

Si le liquide est homogène, le coefficient q sera constant et sortira en-dehors des signes $\int$. En supposant la portion de surface terminée par une courbe plane et parallèle au plan des x et y, on aura $\cos i = 1$; et si, en outre, le corps est un solide de révolution dont l'axe soit parallèle à celui des z, cette courbe sera circulaire, et l'angle i constant dans toute sa longueur; en appelant donc r son rayon, on aura

$$\int Z ds = 2\pi r q \cos i.$$

Pour le même contour, l'angle i se rapportera à la normale intérieure ou à la normale extérieure du corps, selon qu'il s'agira de la portion de surface inférieure ou supérieure à cette courbe. Les deux autres intégrales seront évidemment nulles.

(80). Puisque les forces X, Y, Z, appliquées à tous les points de la surface d'un corps terminé de toutes parts, se détruisent complètement, il s'ensuit que quand ce corps est plongé en entier dans un liquide, la pression totale qu'il éprouve est uniquement due à la partie p de la force normale N. Or, on sait que les composantes horizontales de cette force p se détruisent, et que les sommes de ses composantes verticales se réduisent toujours à une force égale et directement contraire au poids du volume de liquide, déplacé par le corps; la diminution du poids du corps entièrement immergé sera donc égale au poids de ce volume de liquide, conformément au principe ordinaire de l'Hydrostatique. Mais il n'en sera plus de même dans le cas d'un corps flottant à la surface d'un liquide : l'action capillaire pourra donner lieu à une différence dans les pressions horizontales, d'où il résultera un mouvement du corps parallèlement à la surface du liquide; et, dans tous les cas, cette action influera

sur la perte de poids éprouvée par le corps non entièrement immergé.

Supposons d'abord que le corps soit un solide de révolution, qui ait son axe vertical et sa surface de même nature dans toute son étendue, afin que les forces horizontales se détruisent, et qu'il suffise de considérer les forces verticales. Soit CB (fig. 17) l'axe du corps, CABA′ une section de sa surface par un plan passant par cette droite, AOD et A′O′D′ les sections de la surface du liquide par le même plan. Les points A et A′ où elles rencontrent la surface du corps seront dans une même droite horizontale, au-dessus ou au-dessous du niveau naturel du liquide, selon que ces courbes tourneront leur concavité par en haut ou par en bas. Je représenterai par $2r$ la distance AA′, de sorte que r soit le rayon du corps à l'endroit où le liquide s'arrête. Soit M un point du liquide situé à des distances insensibles de sa surface et de celle du corps, qu'on supposera, cependant, plus grandes que le rayon d'activité moléculaire. Par le point M, faisons passer une surface qui coupe à angle droit toutes les normales à la surface du corps, et dont la section par le plan de la figure soit la courbe OGO′ terminée en O et O′ à la surface du liquide. Tirons la droite horizontale MHM′ qui coupe cette courbe en M et M′, et l'axe du corps au point H. Par les points M et M′, faisons passer une surface qui coupe à angle droit toutes les normales à celle du liquide, et dont les sections soient FME et F′M′E′, qui rencontrent en F et F′ la surface du corps. Menons par les mêmes points des perpendiculaires MK et M′K′ à cette surface, MN et M′N′ à celle du liquide. Nous aurons

$$\text{KMN} = \text{K′M′N′} = \omega,$$
$$\text{KMH} = \text{K′M′H} = i;$$

ω étant l'angle relatif à la matière du liquide et à la surface du corps, donné par l'expérience, et obtus ou aigu, selon que le liquide s'élève ou s'abaisse; et i désignant le même angle que dans le numéro précédent.

J'appellerai Γ la couche liquide adjacente à la surface du corps, et dont la section se termine, d'autre part, à la courbe MGM′, aux normales MN et M′N′, et aux portions de courbes AN et A′N′.

Je nommerai L le reste du liquide, et je vais calculer l'action verticale de L sur la couche Γ, à laquelle j'ai donné la forme nécessaire pour que cette force puisse s'exprimer au moyen de quantités qui seront données dans chaque cas.

Pour abréger, j'indiquerai chaque partie de L ou de Γ, ou, généralement, chaque partie du liquide par la partie de la figure à laquelle elle répond. Cela étant, l'action de DOGO′D′ sur KMGM′K′ n'est autre chose que la force N du n° 76, décomposée verticalement et appliquée à tous les élémens de la partie de surface de Γ qui répond à la courbe MGM′; je la représenterai par P, en la supposant dirigée en sens contraire de la pesanteur. Je désignerai, suivant cette direction, par Q l'action du même liquide sur la partie de Γ qui répond à FMK ou F′M′K′, et par R celle qui serait exercée par la partie de Γ correspondante à OMN ou O′M′N′, sur sa partie FMGM′F′. Il est évident que pour avoir l'action de L sur cette dernière partie de Γ, il faudra retrancher R de P + Q. L'action de L sur le surplus de Γ, c'est-à-dire sur la partie correspondante à NMEA ou N′M′F′A′, se composera de l'action de EMGM′E′, que je représenterai par S, et de l'action de la couche superficielle ou correspondante à DNME ou D′N′M′E′, que je désignerai par T; l'une et l'autre dirigées en sens contraire de la pesanteur. L'action totale de L sur Γ sera donc

$$P + Q - R + S + T;$$

et il s'agira de calculer successivement les cinq parties dont elle se compose.

(81). Si l'on appelle t la distance d'un point quelconque de la courbe MGM′ à l'axe GC, la projection horizontale d'une zone infiniment petite de la surface engendrée par cette courbe, sera $2\pi t dt$, et la composante verticale de la force normale N, appliquée à toute cette zone, aura pour valeur $2\pi N t dt$; par conséquent, on aura

$$P = 2\pi \int_0^r N t dt,$$

en prenant r pour la valeur de HM, ce qu'on peut faire sans erreur sensible. La partie de P qui répond au second terme de N est

l'intégrale $\int Z ds$, dont la valeur sera $2\pi rq \cos i$, d'après le n° 79. En mettant pour le premier terme p de N, sa valeur $c - \rho g z$, on aura donc

$$P = \pi c r^2 - 2\pi g \rho \int_0^r z t dt + 2\pi r q \cos i.$$

J'appellerai V la partie du volume du corps qui est située au-dessous du plan des x et y, et qui répond, conséquemment, aux valeurs négatives de z; je désignerai par v la partie de son volume comprise entre ce plan et la section horizontale du corps, à laquelle le liquide s'arrête et que l'on peut, sans erreur sensible, faire passer par les points M et M′, au lieu de A et A′. Soit aussi k la distance de cette section au plan des x et y; en regardant k et v comme des quantités positives ou négatives, selon que les points A et A′ seront au-dessus ou au-dessous de ce plan, nous aurons

$$2\pi \int_0^r z t dt = \pi k r^2 - v - V.$$

Si le liquide s'étend indéfiniment autour du corps, sa surface sera sensiblement plane à une certaine distance; en prenant ce plan pour celui des x et y, V sera le volume du corps situé au-dessous du niveau naturel du liquide, et $V + v$ le volume de ce corps, en contact avec le liquide. Dans ce même cas on aura $c = \Pi$; mais, pour plus de généralité, je ferai

$$c = \Pi + g\rho b;$$

b étant une constante qui sera nulle dans le cas d'un liquide indéfini, et dont la valeur dépendra du volume du liquide, quand il aura une grandeur donnée. De cette manière, on aura

$$P = \pi r^2 \Pi + \pi g \rho (b - k) r^2 + g\rho (v + V) + 2\pi r q \cos i.$$

Si l'on décompose en élémens infiniment petits, la partie de Γ qui répond à NMFA, l'action de la couche superficielle DNME sur un élément dont l'épaisseur est ϵ, sera la force $U\epsilon$ du n° 41, perpendiculaire à MN et dirigée de dehors en dedans de l'élément; on aura donc la partie de T qui répond à cet élément, en multipliant $U\epsilon$ par le sinus de l'angle que fait la droite MN avec la verticale menée

de bas en haut par le point M, lequel angle est égal à HMN, moins un angle droit, ou à $i+\omega-\frac{1}{2}\pi$; et comme on a trouvé $U=-q_1$, cette partie de T sera $q_1 \cos(i+\omega)$; or, cette force étant la même pour tous les élémens, on en conclura la valeur totale de T, en y remplaçant ε par la circonférence $2\pi r$; ce qui donne

$$T=2\pi r q_1 \cos(i+\omega).$$

Chacune des forces Q, R, S, se déduira de même de la force $Z\varepsilon$ du n° 42, en déterminant convenablement les angles a, b, a', b', et remplaçant ε par $2\pi r$. Soit, pour cela (fig. 18), IMI′ une verticale, HM une horizontale, MK et MN des droites qui fassent les angles i et $i+\omega$ avec MH, OMG et FME des droites perpendiculaires à MK et MN. On prendra la droite IMI′ pour l'axe DCE de la figure 12, à partir duquel les angles a, b, a', b', sont comptés; et la force $Z\varepsilon$ sera dirigée suivant MI. Pour en déduire Q, il faudra faire coïncider les lignes CA, CB, CA′, CB′, de la fig. 12, avec les droites MG, MO, MK, MF, de la fig. 18; cela étant, on aura

$$a=\text{GMI}'=-i, \quad b=\text{OMI}'=\pi-i,$$
$$a'=\text{KMI}=-\tfrac{1}{2}\pi+i, \quad b'=\text{FMI}=-\pi+i+\omega;$$

et d'après l'une des formules (4) ou (5) du n° 44, on en conclura

$$Q=4\pi qr \sin i \cot\omega.$$

Relativement à la force R, on fera coïncider les lignes CA, CB, CA′, CB′, de la fig. 12, avec les lignes MN, MO, MG, MF, de la fig. 18; on prendra donc

$$a=\text{NMI}'=\tfrac{3}{2}\pi-i-\omega, \quad b=\text{OMI}'=\pi-i,$$
$$a'=\text{GMI}=-\pi+i, \quad b'=\text{FMI}=-\pi+i+\omega;$$

et il en résultera

$$R=2\pi qr\left[\sin i \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\omega\right)-\sin(i+\omega)\left(1-\tan\tfrac{1}{2}\omega\right)\right].$$

Enfin, à l'égard de la force S, on fera coïncider les lignes CA, CB,

CA′, CB′, de la fig. 12, avec les lignes MG, ME, MF, MN, de la fig. 18; ce qui exigera que l'on prenne

$$a = \text{GMI}' = -i, \quad b = \text{EMI}' = \pi - i - \omega,$$
$$a' = \text{FMI} = -\pi + i + \omega, \quad b' = \text{NMI} = i + \omega - \tfrac{1}{2}\pi;$$

et d'où l'on conclura

$$\text{S} = 2\pi qr\left[\sin i \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\omega\right) - \sin i \cot\tfrac{1}{2}\omega - \sin(i+\omega)\right].$$

Au moyen de ces valeurs de Q, R, S, on aura

$$\text{Q} - \text{R} + \text{S} = 2\pi qr\left[2\sin i\cot\omega - \sin(i+\omega)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega - \sin i\cot\tfrac{1}{2}\omega\right];$$

équation que l'on peut écrire ainsi :

$$\text{Q} - \text{R} + \text{S} + 2\pi qr\cos i = 2\pi qr\cos(i+\omega).$$

Donc, d'après les valeurs de P et T, la pression totale exercée sur le corps flottant, en sens contraire de la pesanteur, aura pour expression

$$\pi r^2\Pi + \pi g\rho br^2 + g\rho\text{V} - g\rho\left[\pi kr^2 - v - \pi ra^2\cos(i+\omega)\right],$$

en faisant, comme dans le chapitre précédent,

$$q + q_1 = \tfrac{1}{2}\text{H}, \qquad \text{H} = g\rho a^2.$$

On se rappellera que ω a la même signification que dans ce chapitre, et que $i + \omega$ est l'angle compris entre le rayon du corps dont la longueur est r, et la normale extérieure du liquide, menée par l'extrémité de ce rayon, lequel répond à la section du corps où le liquide s'arrête.

(82). A ce résultat, il faut joindre l'équation relative au volume du liquide que l'on formera de la manière suivante.

L'équation différentielle de sa surface peut s'écrire sous la forme

$$\frac{t\dfrac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\dfrac{dz^2}{dt^2}}} = \frac{2}{a^2}\int(z-b)t\,dt + c';$$

b étant toujours la constante qui provient de la valeur de p, c' désignant une autre constante arbitraire, et le radical étant positif ou négatif, selon que la normale extérieure fait un angle aigu ou obtus avec l'axe des z positives. Pour $t = r$ ou $z = k$, on aura

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}} \cos(i + \omega).$$

Pour $z = 0$, on aura de même

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}} \cos \eta ;$$

η étant l'angle que fait la normale extérieure du liquide, au point où la génératrice de sa surface coupe le plan des x et y, avec le rayon t du même point, que je représenterai par r'. On a d'ailleurs

$$2\int ztdt = zt^2 - \int t^2 dz ;$$

si donc on fait successivement $z = 0$ et $t = r'$, $z = k$ et $t = r$, dans l'équation de la surface, et qu'on retranche les résultats l'un de l'autre, il en résultera

$$r \cos(i + \omega) - r' \cos \eta = \frac{kr^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int_0^k t^2 dz - \frac{b^2}{a^2}(r^2 - r'^2).$$

Or, si l'on désigne par U le volume du liquide situé au-dessus du plan des x et y, c'est-à-dire au-dessus ou au-dessous, selon que U sera positif ou négatif, et si l'on observe que v est le volume du corps compris entre ce plan et la section horizontale où le liquide s'arrête, on aura

$$U = \pi \int_0^k t^2 dz - v,$$

et par conséquent

$$U = \pi k r^2 - v - \pi b (r^2 - r'^2) - \pi a^2 [r \cos(i + \omega) - r' \cos \eta]. \quad (5)$$

Si, par exemple, le liquide est compris entre deux plans horizontaux qui terminent des corps quelconques, et que l'on prenne le plan inférieur pour celui des x et y, on aura $i = \frac{1}{2}\pi$, $\eta = \frac{3}{2}\pi - \omega'$, en désignant par ω' l'angle donné que fait la normale extérieure du

liquide à son extrémité inférieure, avec la verticale menée dans l'intérieur du corps sur lequel il s'appuie. Dans ce même cas, la quantité ν sera nulle; il en résultera donc

$$U = \pi k r^2 - \pi b (r^2 - r'^2) + \pi a^2 (r \sin \omega - r' \sin \omega'). \quad (6)$$

Le volume V sera aussi nul, et la pression exercée de bas en haut sur le plan supérieur, aura pour valeur

$$\pi r^2 \Pi + \pi g \rho b r^2 - \pi g \rho r (kr + a^2 \sin \omega).$$

Elle devra faire équilibre au poids du corps que termine ce plan, augmenté de la composante verticale de la pression atmosphérique, qui agit directement sur toute la partie de la surface non en contact avec le liquide, et fait déjà équilibre à la partie $\pi r^2 \Pi$ de la pression inférieure. En appelant ϖ le poids du corps, nous aurons donc

$$\varpi = \pi g \rho b r^2 - \pi g \rho r (kr + a^2 \sin \omega). \quad (7)$$

Ces équations (6) et (7) serviront à déterminer la constante b, et l'épaisseur k du liquide, d'après son volume U et la charge ϖ qu'il supporte.

(83). Lorsque le liquide s'étend indéfiniment, et qu'on prend le plan de son niveau naturel, pour celui des x et y, on a $b = 0$, l'angle η est droit, l'équation (5) se réduit à

$$U = \pi k r^2 - \nu - \pi a^2 r \cos (i + \omega),$$

et U est le volume du liquide soulevé ou abaissé par l'action capillaire autour du corps flottant. D'après cette valeur de U, la pression que ce corps éprouve en sens contraire de la pesanteur est la même chose que

$$\pi r^2 \Pi + g \rho (V - U);$$

par conséquent, l'effet de l'action capillaire est de diminuer ou d'augmenter la pression dont il s'agit d'une quantité égale au poids du liquide soulevé ou abaissé.

Pour que le corps demeure en équilibre, il faudra que cette force soit égale à son poids augmenté de la composante verticale de la pression atmosphérique, qui s'exerce sur la partie de sa surface si-

tuée hors du liquide, laquelle composante a $\pi r^2 \Pi$ pour valeur. En appelant ϖ le poids du corps, pesé dans le vide, on aura donc

$$\varpi = g\rho(V - U).$$

On parvient immédiatement à ce résultat en considérant un large canal composé d'une partie courbe et de deux branches verticales, et dont la section normale soit constante dans toute sa longueur. Si l'on suppose que l'une des deux branches comprenne toute la partie de la surface du liquide qui n'est pas sensiblement horizontale, et qu'on appelle μ le poids du liquide contenu dans l'autre branche, au-dessus d'un plan horizontal choisi arbitrairement, il est évident que le poids du liquide renfermé dans la première branche, au-dessus du même plan, se composera de μ augmenté de $g\rho U$ et diminué de $g\rho V$; ce poids $\mu + g\rho U - g\rho V$, ajouté au poids du corps, devra faire équilibre à μ. On aura donc

$$\mu + g\rho U - g\rho V + \varpi = \mu;$$

ce qui donne l'équation précédente. Mais il était important de faire voir que les formules relatives aux actions moléculaires, qui nous ont servi à trouver les équations de la surface capillaire et de son contour, peuvent aussi conduire directement aux conditions d'équilibre d'un corps solide en contact avec un liquide, et, généralement, aux valeurs des pressions modifiées par l'action capillaire.

Si le corps flottant est attaché au plateau d'une balance, et qu'on ait mis dans l'autre plateau un poids $\varpi + \Delta$, il faudra, pour l'équilibre de ce système, que nous ayons

$$\Delta = g\rho(U - V),$$

ou bien, en remettant pour U sa valeur,

$$\Delta = g\rho[\pi k r^3 - v - \pi a^2 r \cos(i + \omega) - V].$$

Si le corps est un cylindre ou un disque circulaire, et que le liquide se termine à sa base inférieure ou à la circonférence de cette base horizontale, on aura $v = 0$, $V = 0$, et simplement

$$\Delta = \pi g\rho r[kr - a^2 \cos(i + \omega)]. \qquad (8)$$

Quand la ligne où le liquide s'arrête sera tracée sur la base, l'angle i

sera droit; il en résultera

$$\Delta = \pi g \rho r (kr + a^2 \sin \omega);$$

et le rayon r pourra varier sur cette base, en même temps que Δ et k. Mais, lorsque le contour du liquide sera tracé sur l'arête qui termine la base du disque, ou un tant soit peu au-dessus, l'angle i, c'est-à-dire l'inclinaison de la normale à la surface de cette arête, pourra prendre toutes les valeurs, depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \frac{1}{2}\pi$; par conséquent, Δ et k pourront varier sans que r change de valeur et cesse d'être égal au rayon du disque. L'équation (8) nous servira, dans le chapitre suivant, à résoudre une des questions les plus intéressantes de la théorie de l'action capillaire.

(84). Pour déterminer l'effet de la capillarité sur les pressions horizontales, je supposerai que le corps flottant soit compris entre deux plans verticaux et parallèles, d'une très grande largeur, afin qu'on puisse négliger, sans erreur sensible, la partie de la pression qui a lieu près de leurs extrémités, relativement à la pression totale, et considérer la hauteur du liquide et la pression comme constantes dans toute la largeur de chaque plan. Le corps sera terminé, en haut et en bas, par des surfaces quelconques; on supposera la surface inférieure entièrement immergée, et la surface supérieure entièrement en-dehors du liquide. La figure 19 représente une section de ce corps, verticale et perpendiculaire à ses deux faces latérales. Les lignes AD et A′D′ sont les sections de la surface du liquide, de part et d'autre du corps, qui coupent ses deux faces aux points A et A′. Ces courbes sont différentes, et A et A′ n'appartiennent pas à une même droite horizontale. Selon que chacun de ces points est au-dessus ou au-dessous du niveau du liquide, la courbe correspondante tournera sa concavité par en haut ou par en bas. La droite LL′ est l'intersection du plan de la figure et d'un plan horizontal, que je prendrai pour celui des x et y, et que je supposerai à une distance h au-dessous du niveau du liquide. Elle coupe les deux faces du liquide aux points C et C′, situés au-dessus de la partie courbe du corps et au-dessous de A et A′. Je ferai

$$AC = h + k, \quad A'C' = h + k_1;$$

k et k_1 étant des quantités positives ou négatives, selon que A et A′ sont au-dessus ou au-dessous du niveau du liquide.

Cela posé, les pressions horizontales se détruiront sur la partie du corps située au-dessous du plan des x et y; celles qui proviennent de la pression atmosphérique se détruiront également sur le corps entier. Au-dessus des points C et C′, les rayons de courbure λ et λ' étant infinis, la pression normale N se réduira à sa partie p, dont on pourra représenter la valeur par

$$p = g\rho(h - z),$$

abstraction faite de Π. Les pressions horizontales qui proviennent de cette force p, et qui ont lieu sur les parties du corps correspondantes à CA et C′A′, seront donc

$$g\rho l\int_o^{h+k}(h-z)\,dz, \quad g\rho l\int_o^{h+k_1}(h-z)\,dz,$$

en désignant par l la largeur du corps, et la supposant la même pour les deux surfaces. Par conséquent, si l'on effectue les intégrations, et qu'on appelle δ l'excès de pression dû à la force p, qui pousse le corps de gauche à droite, on aura

$$\delta = \tfrac{1}{2}g\rho l(k^2 - k_1^2).$$

Mais la quantité p n'est pas la pression du liquide dans toute sa hauteur; elle cesse de l'être à une distance de la surface moindre que le rayon d'activité moléculaire; et, quoique cela n'ait lieu que dans une épaisseur insensible, la pression exercée par la couche superficielle du liquide n'en est pas moins une quantité sensible, qu'il n'est pas permis de négliger.

(85). Soit donc M un point du liquide situé à droite de la figure, à des distances de AC et AD, moindres que les rayons d'activité du tube et du liquide. Par ce point, menons une verticale OMG qui coupe AD au point O, une perpendiculaire à cette courbe AD qui la rencontre au point N, une horizontale MH qui rencontre AC au point K, et une courbe FME parallèle à AND. Nous aurons à déterminer les composantes horizontales des mêmes forces dont nous avons précédemment considéré (n° 80) les composantes verticales Q, R, S, T. Je les désignerai par Q′, R′, S′, T′; la valeur de chacune de

ces quantités aura l pour facteur ; et, abstraction faite de ce facteur, T' sera la composante suivant MK de la force U du n° 41, qui agit suivant MF, et dont la valeur est $-q_1$; d'où l'on conclut

$$T' = -q_1 l \sin\omega ;$$

ω étant toujours l'angle donné KMN. Quant aux valeurs de Q', R', S', elles s'obtiendront, comme celles de Q, R, S, d'après les formules (4) et (5) du n° 44 ; seulement, au lieu de compter les angles a, b, a', b', à partir de la verticale IMI' (fig. 18), il faudra leur donner pour origine l'horizontale MH ou son prolongement MH', et faire coïncider les droites MK et MH, ou supposer $i = 0$.

De cette manière, on obtiendra la valeur de Q', en faisant

$$a = \text{GMH}' = -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad b = \text{OMH}' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$a' = \text{KMH} = 0, \qquad b' = \text{FMH} = -\tfrac{1}{2}\pi + \omega ;$$

ce qui donne

$$Q' = 2ql \cot\omega .$$

Pour déterminer R', on fera

$$a = \text{NMH}' = \pi - \omega, \qquad b = \text{OMH}' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$a' = \text{GMH} = -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad b' = \text{FMH} = -\tfrac{1}{2}\pi + \omega ;$$

d'où l'on conclut

$$R' = ql\left[\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\omega\right) - \left(1 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega\right)\cos\omega\right].$$

Relativement à S', on prendra

$$a = \text{GMH}' = -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad b = \text{EMH}' = \tfrac{1}{2}\pi - \omega,$$

$$a' = \text{FMH} = -\tfrac{1}{2}\pi + \omega, \qquad b' = \text{NMH} = \omega ;$$

et l'on en déduira

$$S' = ql\left[\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\omega\right) - \cos\omega - \cot\tfrac{1}{2}\omega\right].$$

Il résulte de là que la pression horizontale exercée sur la face du

corps qui répond à AC, ou plutôt sur la couche liquide adjacente à cette face, devra être augmentée d'une force $Q' - R' + S' + T'$, dont la valeur sera

$$ql\left(2\cot\omega - \cos\omega\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega - \cot\tfrac{1}{2}\omega\right) - q_1 l\sin\omega\,;$$

quantité que l'on peut réduire à

$$-(q+q_1)\,l\sin\omega.$$

La force dont on devra augmenter la pression relative à la face correspondante à A'G', sera de même

$$-(q+q_1)\,l\sin\omega_1\,;$$

ω_1 désignant ce que devient l'angle ω par rapport à cette seconde face du corps, qui peut n'être pas de même nature que la première. Ces deux forces agiront en sens contraire l'une de l'autre; et si nous appelons ε la valeur complète de l'excès de pression horizontale qui pousse le corps de gauche à droite, nous aurons

$$\varepsilon = \delta + (q+q_1)\,l\,(\sin\omega - \sin\omega_1),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}g\rho\left[k^2 - k_1^2 + a^2(\sin\omega - \sin\omega_1)\right], \qquad (9)$$

en ayant égard à la valeur de la partie δ, et observant que $q+q_1 = \frac{1}{2}g\rho a^2$.

Ce résultat diffère de celui de la *Mécanique céleste*, en ce que l'auteur n'a pas tenu compte de la pression particulière qui a lieu près de la surface du liquide, et qui ne disparaît de la valeur exacte de ε que dans le cas particulier où les deux angles ω et ω_1 sont égaux ou supplémens l'un de l'autre (*).

(*) Le raisonnement qu'on trouve au commencement de la page 43 de la *Théorie de l'Action capillaire*, montre que Laplace avait jugé cette pression tout-à-fait négligeable, parce qu'elle ne répond qu'à une étendue insensible de la surface du corps.

Lorsque cette force ϵ ne sera pas nulle, le corps sera mis en mouvement suivant une direction horizontale et perpendiculaire à ses deux faces latérales, qu'on a supposées d'une très grande largeur; et ce mouvement aura lieu de gauche à droite ou de droite à gauche, selon que la valeur de ϵ sera positive ou négative. De plus, les résultantes des pressions horizontales qui le poussent en sens contraires n'étant pas directement opposées, le corps tournera, en même temps, autour d'un axe passant par son centre de gravité et parallèle à ces mêmes faces latérales.

Je considérerai séparément les deux parties de la courbe qui aboutissent au point C; dans chacune d'elles, la variable x sera regardée comme positive et comptée à partir de ce point; et pour qu'elle croisse depuis ce point jusqu'à chaque bout de la courbe, je supposerai le radical du même signe que dx.

Cela posé, pour exprimer x en fonctions elliptiques, je fais

$$z^2 = \frac{(h^2 + 2a^2)\,h^2}{h^2 + 2a^2\cos^2\phi};$$

d'où l'on tire

$$\tang^2\phi = \frac{(h^2 + 2a^2)\,(z^2 - h^2)}{h^2\,(h^2 + 2a^2 - z^2)};$$

et la variable z^2 n'étant pas moindre que h^2, ni plus grande que $h^2 + a^2$, cette valeur de $\tang^2\phi$ sera positive; ce qui suffit pour que ϕ soit un angle réel. L'expression de dx deviendra

$$dx = \frac{(a^2 + h^2)\,d\phi}{\sqrt{h^2 + 2a^2\cos^2\phi}} - \frac{(h^2 + 2a^2)\,h^2 d\phi}{(h^2 + 2a^2\cos^2\phi)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$dx = \frac{(2 - c^2)\,a}{c\sqrt{2}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\phi}} - \frac{2\,(1 - c^2)\,a}{c\sqrt{2}}\,\frac{d\phi}{(1 - c^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}},$$

en désignant par c une quantité positive, moindre que l'unité, et donnée par l'équation

$$c^2 = \frac{2a^2}{2a^2 + h^2}.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$d\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\phi}}\right) = \frac{1}{c^2}\sqrt{1 - c^2\sin^2\phi}\,d\phi - \frac{(1 - c^2)}{c^2}\,\frac{d\phi}{(1 - c^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où il résulte

$$dx = \frac{(2 - c^2)\,a}{c\sqrt{2}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\phi}} - \frac{2a}{c\sqrt{2}}\sqrt{1 - c^2\sin^2\phi}\,d\phi + ac\sqrt{2}\,d\left(\frac{\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\phi}}\right).$$

D'après les notations connues de M. Legendre, on a aussi

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = \mathrm{F}(c, \varphi),$$

$$\int \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \mathrm{E}(c, \varphi);$$

les intégrales commençant avec la variable φ. En intégrant, on aura donc

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = \frac{2 - c^2}{c} \mathrm{F}(c, \varphi) - \frac{2}{c} \mathrm{E}(c, \varphi) + \frac{c \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}. \qquad (3)$$

On n'ajoute pas de constante arbitraire, parce que x est nul au point C, pour lequel on a $z = h$, ce qui donne $\varphi = 0$ et fait évanouir le second membre de cette équation. On aura en même temps

$$z^2 = \frac{2a^2 (1 - c^2)}{c^2 (1 - c^2 \sin^2 \varphi)}; \qquad (4)$$

et ces équations (3) et (4) feront connaître les x et z de chacun des points de la courbe, en fonctions d'une troisième variable φ, quand on aura déterminé le module c.

Or, si nous faisons

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2}}} = -\cos \omega,$$

ω sera l'angle qui est donné aux deux extrémités de la courbe, et qui dépend en chacun de ces points, de la matière du corps terminé par le plan vertical et de celle du liquide. En désignant par k la valeur de z qui répond à l'un de ces deux points, et éliminant $\frac{dz}{dx}$ entre l'équation (2) et la précédente, il vient

$$k^2 = h^2 + a^2 (1 - \sin \omega);$$

en ayant égard à la valeur de c^2, nous aurons donc

$$h^2 = \frac{2a^2 (1 - c^2)}{c^2}, \qquad k^2 = \frac{a^2}{c^2} (2 - c^2 - c^2 \sin \omega); \qquad (5)$$

et si l'on appelle θ la valeur de φ qui répond à $z = k$, il en résultera

$$\operatorname{tang}^2\theta = \frac{1-\sin\omega}{(1+\sin\omega)(1-c^2)}. \qquad (6)$$

Soit α la valeur correspondante de x, c'est-à-dire la distance du point C à l'un des deux plans verticaux ; on aura

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{a} = \frac{2-c^2}{c}\,\mathrm{F}(c,\theta) - \frac{2}{c}\,\mathrm{E}(c,\theta) + \frac{c\sin 2\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}. \qquad (7)$$

Si nous désignons par α' et ω' la distance et l'angle relatifs à l'autre plan vertical, et par θ' ce que devient θ, quand on y met ω' à la place de ω, nous aurons une seconde équation qui se déduira de la précédente, en y changeant α et θ, en α' et θ'. J'ajoute ces deux équations, et je fais $\alpha + \alpha' = \delta$, de sorte que δ soit la distance comprise entre les deux plans verticaux ; il vient

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = \frac{2-c^2}{c}\,[\mathrm{F}(c,\theta)+\mathrm{F}(c,\theta')] - \frac{2}{c}\,[\mathrm{E}(c,\theta)+\mathrm{E}(c,\theta')] + \frac{c\sin 2\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} + \frac{c\sin 2\theta'}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta'}}, \qquad (8)$$

pour l'équation qui servira à déterminer c.

Dans le cas que nous examinons, les angles ω et ω' seront tous les deux aigus ou tous les deux obtus ; selon qu'ils seront obtus ou aigus, la courbe sera concave ou convexe par en-haut, et l'on prendra avec le signe + ou avec le signe —, les valeurs de z et de h données par l'équation (4) et la première équation (5). En appelant k', ce que devient k lorsqu'on y change ω en ω', les ordonnées extrêmes k et k' se déduiront de la formule (4), en y faisant $\varphi = \theta$ et $\varphi = \theta'$, ou bien elles seront données immédiatement par la seconde équation (5). La distance de C à l'un des plans verticaux ou l'une des valeurs extrêmes de x, se déterminera au moyen de la formule (7); et en la retranchant de δ, on aura la distance de C à l'autre plan.

(88). Quand on aura $\omega = \omega'$, les distances α et α' seront égales entre elles et à $\frac{1}{2}\delta$. Si ces angles sont, en outre, zéro ou π, on aura simplement

$$\cot\theta = \sqrt{1-c^2}.$$

Pour résoudre par rapport à c l'équation (7) qui est transcendante,

il faudrait donner à c une série de valeurs croissantes par de très petites différences, depuis $c = 0$ jusqu'à $c = 1$; calculer, au moyen des tables elliptiques de M. Legendre, les valeurs correspondantes du second membre de cette équation; et former ainsi une table des valeurs de $\frac{a\sqrt{2}}{a}$, relatives à toutes ces valeurs de c : cela étant, lorsque la distance δ ou $2a$, et la constante a, et par conséquent la quantité $\frac{a\sqrt{2}}{a}$ seraient données, on chercherait dans cette table la valeur correspondante de c. Mais le problème sera bien plus simple si l'on donne l'élévation h du point C et la constante a, et qu'on demande quelle doit être la distance $2a$ comprise entre les deux plans.

Supposons, par exemple, qu'on doive avoir

$$h^2 = 2a^2 ;$$

il en résultera

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = 54^\circ 44',$$

et l'équation (7) deviendra

$$\frac{\delta}{h} = \frac{3}{\sqrt{2}} F(c, \theta) - 2\sqrt{2}\, E(c, \theta) + \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pour ces valeurs de c et θ, les tables de M. Legendre donnent

$$F(c, \theta) = 1,02806,$$
$$E(c, \theta) = 0,89111 ;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\delta}{h} = 0,4776,$$

pour le rapport de la distance des deux plans à la plus petite ordonnée de la courbe.

D'après les équations (5), la plus grande ordonnée est

$$k = h\sqrt{\frac{3}{2}};$$

l'ordonnée moyenne est donc

$$z = \frac{1}{2} h \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right);$$

et la valeur correspondante de φ sera

$$\varphi = 38^\circ\, 16'\, 30''.$$

Pour cette valeur de φ et $c = \sin 45^\circ$, on trouve, dans les tables de M. Legendre,

$$F(c, \varphi) = 0{,}69300,$$
$$E(c, \varphi) = 0{,}64457;$$

et l'équation (3) donne ensuite

$$x = h(0{,}2061).$$

En comparant cette valeur de x à celle de α ou de $\frac{1}{2}\delta$, on a

$$x = \alpha(0{,}8628);$$

en sorte que, dans cet exemple, les ordonnées moyennes sont beaucoup plus rapprochées des plans verticaux que du point C; ce qui tient au peu de courbure du liquide près de ce point.

(89). Si h est très grand par rapport à a, le module c sera une très petite fraction, et l'on pourra développer les fonctions elliptiques en séries très convergentes, suivant les puissances de c; ce qui donne

$$F(c, \theta) = \theta + \frac{c^2}{4}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + \text{etc.},$$

$$E(c, \theta) = \theta - \frac{c^2}{4}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + \text{etc.}$$

L'équation (7) deviendra

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{a} = c\sin\theta\cos\theta + \frac{c^3}{8}(\theta - \sin\theta\cos\theta + 6\sin^3\theta\cos\theta),$$

en négligeant la cinquième puissance de c. Pour plus de simplicité, je supposerai que ω soit zéro ou π; on aura alors, en vertu de l'équation (6),

$$\text{tang}\,\theta = 1 + \frac{1}{2}c^2 + \text{etc.}, \qquad \theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}c^2 + \text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$\frac{a\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{2}c + \frac{c^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4}\pi\right).$$

Il faudra que le rapport $\frac{a}{a}$ soit une très petite fraction, dont on négligera la cinquième puissance; d'où il résultera

$$c = \frac{2a\sqrt{2}}{a} - \frac{4a^3\sqrt{2}}{a^3}\left(1 + \frac{1}{4}\pi\right).$$

La première équation (5) donne ensuite

$$h = \pm\left[\frac{a^2}{2a} - a\left(1 - \frac{1}{4}\pi\right)\right],$$

où l'on prendra le signe supérieur ou inférieur, selon que ω sera zéro ou π, c'est-à-dire selon que le liquide sera concave ou convexe par en haut.

Si les deux plans verticaux qui terminent le liquide sont de la même nature, c'est-à-dire si ω' est aussi zéro ou π, de sorte que $2a$ soit leur distanee mutuelle, on voit que le premier terme de cette valeur de h sera le même que dans le cas d'un tube qui aurait cette distance pour rayon; ce qui n'a plus lieu pour la valeur totale de h.

M. Gay-Lussac a observé l'élévation de l'eau entre deux plans verticaux et parallèles, préalablement mouillés de ce liquide. Leur distance étant

$$2a = 1^{mm},069,$$

il a trouvé

$$h = 13^{mm},574.$$

Mais la température s'élevant à 16° pendant cette expérience, il faut augmenter la valeur de h, pour rendre la valeur de a^2, qu'on en déduira, comparable à celle du n° 56, qui répond à une température de 8°,5. On prendra donc

$$h = (13^{mm},574)\left(1 + \frac{7,5}{2300}\right) = 13,5872,$$

à cause que l'augmentation de densité de l'eau est d'environ $\frac{1}{2300}$ pour chaque degré d'abaissement dans la température, et que l'accroissement de h est proportionnel à cette augmentation (n° 53).

Au moyen de cette dernière valeur de h et de celle de $2a$, on trouve

$$a^2 = (14{,}6473) \text{ millimètres carrés};$$

ce qui diffère peu de la valeur de a^2 du n° 56, qu'il faudra préférer, comme étant conclue d'une observation plus susceptible d'exactitude.

(90). En négligeant le cube de c, l'équation (8) se réduit à

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = c(\sin\theta\cos\theta + \sin\theta'\cos\theta').$$

Si nous faisons $\omega = \frac{1}{2}\pi + \mu$ et $\omega' = \frac{1}{2}\pi + \mu'$, les angles θ et θ' différeront très peu de $\frac{1}{2}\mu$ et $\frac{1}{2}\mu'$, d'après l'équation (6); et l'on en conclura

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{2}c(\sin\mu + \sin\mu').$$

La première équation (5) donnera donc

$$h = \frac{a^2}{2\delta}(\sin u + \sin\mu'),$$

en observant que μ et μ' sont positifs ou négatifs, selon que ω et ω' sont obtus ou aigus, ou selon que le liquide s'élève ou s'abaisse. Au même degré d'approximation, la courbe du liquide sera un arc de cercle, d'un rayon égal à $\frac{a^2}{h}$.

Cette valeur approchée de h nous montre que quand les deux plans verticaux, qu'on suppose très rapprochés, ne sont pas dans le même état, l'élévation ou la dépression du liquide est la demi-somme de celles que l'on observerait si ces deux plans étaient successivement de la même nature que chacun d'eux; ce qui n'a lieu toutefois que dans la première approximation.

(91). Je retranche les équations (3) et (7) l'une de l'autre, et je fais $a - x = u$, en sorte que u soit la distance d'un point quelconque de la courbe du liquide au plan vertical qui répond à l'angle ω; il vient

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = \frac{2-c^2}{c}[F(c,\theta) - F(c,\varphi)]$$
$$-\frac{2}{c}[E(c,\theta) - E(c,\varphi)] + \frac{c\sin 2\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} - \frac{c\sin 2\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Maintenant, si l'on supprime l'autre plan vertical, la courbe sera asymptotique de l'axe des u, et l'ordonnée h du point C sera infiniment petite; en appelant donc b le complément du module, de sorte qu'on ait

$$1 - c^2 = b^2,$$

b sera aussi infiniment petit, en vertu de la première équation (5); et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \theta'^2,$$

l'équation (6) donnera

$$\theta = \frac{1}{2}\pi - \theta' b.$$

D'après l'équation (4), z sera infiniment petit, excepté pour les valeurs de φ infiniment peu différentes de $\frac{1}{2}\pi$; je fais donc aussi

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi - \varphi' b;$$

et il en résulte

$$z^2 = \frac{2a^2}{1+\varphi'^2},$$

c'est-à-dire,

$$\varphi' = \frac{1}{z}\sqrt{2a^2 - z^2}.$$

Pour ces valeurs de φ et θ, on aura

$$E(c,\theta) - E(c,\varphi) = \int_{\varphi}^{\theta} \sqrt{1-c^2\sin^2\nu}\, d\nu = 0.$$

On a aussi

$$F(c,\theta) - F(c,\varphi) = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\nu}{\sqrt{1-c^2\sin^2\nu}};$$

et en faisant

$$\nu = \frac{1}{2}\pi - b\nu', \qquad d\nu = -b\,d\nu',$$

cette dernière équation devient

$$F(c, \theta) - F(c, \varphi) = \int_{\theta'}^{\varphi'} \frac{dv'}{\sqrt{1+v'^2}} = \log \frac{\varphi' + \sqrt{1+\varphi'^2}}{\theta' + \sqrt{1+\theta'^2}}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{c \sin 2\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} = \frac{2\theta'}{\sqrt{1+\theta'^2}},$$
$$\frac{c \sin 2\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \frac{2\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}};$$

on aura donc

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = \log \frac{\varphi' + \sqrt{1+\varphi'^2}}{\theta' + \sqrt{1+\theta'^2}} + \frac{2\theta'}{\sqrt{1+\theta'^2}} - \frac{2\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}};$$

et si l'on y substitue pour φ' et θ' leurs valeurs, et qu'on fasse $\omega = \frac{1}{2}\pi + \mu$, on aura finalement

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = \log \frac{(a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - z^2}) \sin \frac{1}{2}\mu}{z\left(1 + \cos \frac{1}{2}\mu\right)} + 2\cos \frac{1}{2}\mu - \frac{2\sqrt{2a^2 - z^2}}{a\sqrt{2}}, \quad (9)$$

pour l'équation de la courbe formée par le liquide qui s'élève ou s'abaisse le long d'un plan vertical; μ étant l'angle aigu que fait la normale à son extrémité, avec la verticale, et qu'on regardera comme positif ou comme négatif, selon que cette courbe tournera sa concavité ou sa convexité par en-haut, afin que l'angle ω soit obtus dans le premier cas et aigu dans le second. La variable z sera, par conséquent du même signe que μ, et le radical $\sqrt{2a^2 - z^2}$ devra être positif, pour que l'on ait $u = \infty$, quand $z = 0$, ainsi qu'on l'a supposé.

Si l'on appelle l la valeur de z qui répond à $u = 0$, on aura, d'après la seconde équation (5),

$$l = a\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}\mu;$$

et cette quantité rend effectivement nulle la formule (9), quand on la substitue à la place de z. Il en résulte que la constante a, relative à la matière d'un liquide, exprime son élévation au-dessus du niveau, le long d'un plan vertical qui a été préalablement mouillé dans toute sa hauteur par ce même liquide; car on a alors $\omega = \pi$, $\mu = \frac{1}{2}\pi$, et,

par conséquent, $l = a$. Dans le cas de l'eau à la température de 8°,5 (n° 56), on aura

$$l = a = 3^{mm},8888,$$

pour cette élévation.

(92). Maintenant, considérons le cas où la courbe du liquide présente un point d'inflexion I.

Je désignerai par i l'angle inconnu que fait la tangente en ce point avec la droite horizontale, menée par le même point. Comme il faut que la partie de la courbe qui tourne sa concavité par en haut, soit plus élevée que la partie concave par en bas, il s'ensuit que l'angle i sera moindre que chacun des angles aigus que font les tangentes aux points extrêmes, avec la droite horizontale menée par le point I, et moindre qu'un angle droit quand ces tangentes seront verticales. De plus, $\frac{d^2z}{dx^2}$ changeant de signe de part et d'autre de I, il faudra que cette quantité soit nulle ou infinie en ce point; l'ordonnée z sera, en même temps, nulle ou infinie, en vertu de la première équation du n° 86; et puisqu'elle ne saurait être infinie, il faudra que les quantités $\frac{d^2z}{dx^2}$ et z soient nulles au point I, qui se trouvera, par conséquent, dans le plan du niveau du liquide.

Je fais donc $z = 0$ et $\frac{dz}{dx} = \text{tang } i$ dans l'équation (1); il en résulte $b = a^2 \cos i$. Cette équation devient

$$\frac{a^2}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}} = a^2 \cos i - z^2;$$

et, à cause que le radical est une quantité positive, on voit que z^2 sera moindre que $a^2 \cos i$. On tire de là

$$dx = \frac{(a^2 \cos i - z^2)\, dz}{\sqrt{[z^2 + a^2(1-\cos i)]\,[a^2(1+\cos i) - z^2]}}.$$

Je fixerai au point I l'origine des x; je considérerai séparément chacune des deux parties de la courbe qui aboutissent en ce point, et je regarderai le radical comme étant de même signe que dz.

Pour exprimer x en fonctions elliptiques, je fais

$$\cos\tfrac{1}{2} i = c,$$

et ensuite

$$z^2 = \frac{2a^2c^2(1-c^2)\sin^2\varphi}{1-c^2\sin^2\varphi}; \qquad (10)$$

d'où il résulte

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{z^2}{(2a^2c^2-z^2)(1-c^2)};$$

quantité positive, à cause de $z^2 < a^2\cos i$ et $\cos i < 2c^2$; ce qui suffit pour que l'angle φ soit réel. Nous aurons

$$dx = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} - \frac{(1-c^2)\,a\sqrt{2}\,d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$dx = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} - a\sqrt{2}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + c^2a\sqrt{2}\,d\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\right).$$

En intégrant, on aura donc

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = \mathrm{F}(c,\varphi) - 2\mathrm{E}(c,\varphi) + \frac{2c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}. \qquad (11)$$

On n'ajoute pas de constante arbitraire, parce qu'au point I on a, à la fois, $x=0$, $z=0$, $\varphi=0$.

Je désigne par ω le même angle que précédemment (n° 87), par α la distance du point I au plan vertical qui répond à cet angle, et par k la valeur de z relative à $x=\alpha$; en sorte qu'on ait

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}} = -\cos\omega, \qquad \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}} = a^2\cos i - k^2,$$

pour $x=\alpha$. En éliminant $\frac{dz}{dx}$, il vient

$$k^2 = a^2(\cos i - \sin\omega). \qquad (12)$$

L'angle ω sera obtus pour le plan vertical, le long duquel le liquide s'élève, et aigu pour l'autre plan, le long duquel il s'abaisse; le signe de k sera contraire à celui de $\cos\omega$. En appelant θ l'angle φ qui répond à $z=k$ et $x=\alpha$, on aura

$$\operatorname{tang}^2\theta = \frac{2c^2-1-\sin\omega}{(1-c^2)(1+\sin\omega)};$$

et, en vertu de l'équation (11),

$$\frac{a\sqrt{2}}{a} = F(c, \theta) - 2E(c, \theta) + \frac{2c^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\theta}}. \quad (13)$$

Cette équation répondra à l'une des extrémités de la courbe du liquide. Si l'on désigne par α', ω', θ', ce que deviennent α, ω, θ, relativement à l'autre extrémité, on aura une seconde équation qui se déduira de celle-là, en y mettant α' et θ' à la place de α et θ; en faisant la somme de ces équations, et appelant δ la distance des deux plans verticaux qui terminent la courbe, nous aurons

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = F(c, \theta) + F(c, \theta') - 2E(c, \theta) - 2E(c, \theta') + \frac{2c^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\theta}} + \frac{2c^2 \sin\theta'\cos\theta'}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\theta'}}. \quad (14)$$

Cette dernière équation servira à déterminer le module c, et, par conséquent, l'angle i; les équations (10) et (11) donneront ensuite les valeurs des coordonnées z et x en fonctions d'une troisième variable φ; ce qui est la solution complète du problème.

Lorsque l'angle i, sous lequel la courbe vient couper le niveau naturel du liquide, sera donné, l'équation précédente fera connaître immédiatement, au moyen des tables des fonctions elliptiques, la distance des deux plans qui devra avoir lieu. Nous allons faire successivement, sur cet angle, différentes suppositions.

(93). Je retranche les équations (11) et (13) l'une de l'autre, et je fais $\alpha - u = x$; il vient

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = F(c, \theta) - F(c, \varphi) - 2E(c, \theta) + 2E(c, \varphi) + \frac{2c^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\theta}} - \frac{2c^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'angle i est infiniment petit, c différera infiniment peu de l'unité, et cette équation, jointe à la formule (10), devra conduire à l'équation (9), relative à la courbe asymptotique; c'est, effectivement, ce que l'on vérifiera sans difficulté par un calcul semblable à celui du n° 91. Mais on parvient aussi à cette équation (9), par l'intégration directe de l'expression de dx du numéro précédent.

En effet, en faisant $dx = -du$ et $i = 0$, on a

$$du = -\frac{(a^2 - z^2)\,dz}{z\sqrt{2a^2 - z^2}}.$$

Pour intégrer cette formule, soit

$$z = a\sqrt{2}\cos v;$$

nous aurons

$$du = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{dv}{\cos v} - a\sqrt{2}\cos v\,dv;$$

d'où l'on tire

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin v}{1-\sin v} - 2\sin v + c';$$

c' étant la constante arbitraire. Cette équation est la même chose que

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = \log\frac{a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - z^2}}{z} - \frac{2\sqrt{2a^2 - z^2}}{a\sqrt{2}} + c'.$$

Si l'on fait, dans l'équation (12), $i = 0$ et $\omega = \frac{1}{2}\pi + \mu$, et qu'on appelle l la valeur correspondante de k, on aura

$$l = a\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\mu;$$

et comme l est la valeur de z qui répond à $u = 0$, il en résultera

$$c' = \log\frac{\sin\frac{1}{2}\mu}{1+\cos\frac{1}{2}\mu} + 2\cos\tfrac{1}{2}\mu,$$

et, par conséquent,

$$\frac{u\sqrt{2}}{a} = \log\frac{(a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - z^2})\sin\frac{1}{2}\mu}{z\left(1+\cos\frac{1}{2}\mu\right)} + 2\cos\tfrac{1}{2}\mu - \frac{2\sqrt{2a^2 - z^2}}{a\sqrt{2}};$$

ce qui coïncide avec l'équation (9).

(94). Faisons $\omega = \frac{1}{2}\pi + \mu$ et $\omega' = \frac{1}{2}\pi + \mu'$, de sorte que μ et μ' soient les angles sous lesquels les tangentes extrêmes à la courbe du liquide viendront couper son niveau naturel. L'un de ces angles

sera positif et l'autre négatif, puisque l'un des angles ω et ω' est obtus et l'autre aigu. Abstraction faite du signe, ils surpasseront l'angle i. Soit μ le plus petit des deux angles μ et μ', et supposons que i diffère très peu de μ. L'angle θ sera très petit; car la valeur de $\text{tang}^2\theta$ du n° 92 peut s'écrire ainsi :

$$\text{tang}^2\theta = \frac{\cos i - \cos\mu}{2\sin^2\frac{1}{2}i\cos^2\frac{1}{2}\mu}; \qquad (15)$$

et si nous faisons

$$i = \mu - \frac{1}{2}\psi^2\sin\mu,$$

de sorte que ψ soit une quantité très petite, nous aurons $\theta = \psi$, en négligeant le cube de ψ. Le rapport $\frac{\alpha}{a}$ sera aussi une très petite fraction; et, d'après l'équation (13), nous aurons

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{a} = (2c^2 - 1)\psi = \psi\cos\mu.$$

Le point I sera donc alors très rapproché de l'un des deux plans verticaux, et l'ordonnée k du point où le liquide s'arrête le long de ce plan, sera très petite; en vertu de l'équation (12), elle aura pour valeur

$$k = \frac{a\psi}{\sqrt{2}}\sin\mu = a\,\text{tang}\,\mu.$$

Mais il n'en sera pas de même à l'autre extrémité de la courbe, si l'angle μ' n'est pas très peu différent de μ, abstraction faite du signe.

En effet, on aura, à très peu près,

$$\text{tang}^2\theta' = \frac{\cos\mu - \cos\mu'}{2\sin^2\frac{1}{2}\mu\cos^2\frac{1}{2}\mu'};$$

et l'angle θ' n'étant pas très petit, le rapport $\frac{\alpha'}{a}$, déterminé par l'équation (13), ne le sera pas non plus. Prenons, par exemple,

$$\mu = -60°, \qquad \mu' = 90°;$$

il en résultera

$$\text{tang}^2\theta' = 2, \qquad \theta' = 54^\circ 44'.$$

Pour cette valeur de θ' et $c = \sin 60^\circ$, on a

$$F(c, \theta') = 1{,}07833,$$
$$E(c, \theta') = 0{,}85544;$$

et l'équation (13) donne

$$\frac{\alpha'}{a} = 0{,}7775.$$

On aura, en même temps,

$$k' = a\sqrt{\cos\mu - \cos\mu'} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

pour l'ordonnée du point où le liquide s'arrête le long du plan vertical correspondant à α'.

Toutes les fois que la distance δ sera très petite par rapport à a, et qu'en même temps les angles μ et μ' ne seront pas très peu différens l'un de l'autre, abstraction faite du signe, aucun des deux angles θ et θ' ne sera très petit; les distances α et α' du point I aux deux points verticaux, aussi bien que les coordonnées d'un autre point de la courbe du liquide, ne pourront se déterminer, même par approximation, sans recourir aux fonctions elliptiques; et cette courbe ne se réduira, en aucune manière, à une ligne algébrique.

(95). Dans le cas de $\mu' = -\mu$, la courbe du liquide sera symétrique au-dessus et au-dessous de son niveau naturel; on aura $\alpha = \frac{1}{2}\delta$; et si la distance δ est très petite par rapport à a, on pourra supposer l'angle θ très petit, et l'angle i très peu différent de μ. D'après le numéro précédent, on aura généralement

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{a} = \psi\cos\mu,$$

et, par conséquent,

$$\psi = \frac{\delta}{a\sqrt{2}\cos\mu}, \qquad i = \mu - \frac{\delta^2\sin\mu}{4a^2\cos^2\mu}, \qquad k = \frac{1}{2}\delta\,\text{tang}\,\mu.$$

L'angle φ qui entre dans les équations (10) et (11), étant toujours moindre que θ, sera aussi très petit. En négligeant le cube de φ, ces équations deviendront

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = (2c^2 - 1)\varphi, \qquad z^2 = 2a^2c^2(1 - c^2)\varphi^2;$$

et si l'on élimine φ entre elles, et qu'on y fasse $c = \cos\frac{1}{2}i = \cos\frac{1}{2}\mu$, il vient

$$z = x \operatorname{tang} \mu;$$

en sorte que la courbe du liquide se réduira, à très peu près, à une ligne droite. L'élévation ou la dépression de ses extrémités sera proportionnelle à la distance δ des deux plans verticaux, et indépendante de la matière du liquide. Mais cela n'aura plus lieu lorsque l'angle μ sera droit ou à peu près droit; car alors le premier terme de chacune des formules (11) et (15) s'évanouira ou sera très petit, ce qui rendra nécessaire la considération du terme suivant.

En tenant compte de la troisième puissance de φ et de θ, on aura

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = (2c^2 - 1)\varphi + c^4\varphi^3 - \frac{5c^2}{6}\varphi^3,$$

$$\frac{z\sqrt{2}}{a} = (2c^2 - 1)\theta + c^4\theta^3 - \frac{5c^2}{6}\theta^3.$$

Si l'on suppose $\mu = \frac{1}{2}\pi$, on tirera de l'équation (15),

$$i = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta^2, \qquad c^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\theta^2,$$

en négligeant la quatrième puissance de θ; on aura donc

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = \tfrac{1}{2}\theta^2\varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3, \qquad \frac{z\sqrt{2}}{a} = \tfrac{1}{3}\theta^3,$$

et, par conséquent,

$$\frac{x\sqrt{2}}{a} = \tfrac{1}{2}\varphi\sqrt[3]{\frac{18z^2}{a^2}} - \tfrac{1}{6}\varphi^3.$$

D'après l'équation (10), on aura, en même temps,

$$\delta = \frac{a\varphi}{\sqrt{2}};$$

d'où il résulte

$$x = \frac{1}{2} z \sqrt[3]{\frac{18a^2}{a^2} - \frac{z^3}{3a^3}},$$

pour l'équation de la courbe du liquide qui sera une parabole cubique. Les ordonnées de ses extrémités, c'est-à-dire les valeurs de z qui répondent à $\varphi = \pm\theta$, seront

$$z = \pm \sqrt[3]{\frac{3a^2 a}{2}},$$

pour lesquelles on a effectivement $x = \pm a$. L'élévation ou la dépression du liquide dépendra donc de la constante a, et sera, en outre, proportionnelle à la racine cubique de la distance mutuelle $2a$ des deux plans extrêmes.

(96). Si l'on plonge dans un liquide deux lames verticales, parallèles et d'une grande largeur, les formules précédentes serviront à déterminer, dans tous les cas, la figure du liquide en-dedans et en-dehors de ces deux lames. En même temps, l'équation (9) du n° 85 fera connaître l'excès de pression horizontale, qui pousse chacune de ces lames perpendiculairement à leur direction; et l'expression de cette force sera très simple, d'après les valeurs que nous avons trouvées pour les ordonnées verticales des points extrêmes de la couche du liquide.

En effet, lorsque le liquide s'élèvera ou s'abaissera à la fois le long des deux faces intérieures de ces deux lames, on aura (n° 87)

$$k^2 = h^2 + a^2(1 - \sin\omega),$$

pour le carré de l'ordonnée de l'extrémité de la courbe intérieure du liquide, qui répond à l'angle donné ω. Si l'on appelle k_1 l'ordonnée de l'extrémité de la courbe extérieure, et ω_1 l'angle correspondant, on aura, en même temps,

$$k_1^2 = a^2(1 - \sin\omega_1);$$

car le point de cette courbe où la tangente est horizontale, et dont l'ordonnée est h, se trouvant au niveau du liquide, on a $h = 0$.

Or, ces valeurs de k^2 et k^2, réduisent l'équation (9) du n° 85 à

$$\varepsilon = g\rho l h^2.$$

L'excès de pression qui pousse chaque lame de dehors en dedans est donc une quantité positive; ce qui montre que dans ce premier cas les deux lames se rapprocheront l'une de l'autre, quel que soit l'état de leurs faces extérieures. La force ε qui produit cette attraction apparente sera la même pour ces deux corps, et proportionnelle au carré de l'ordonnée du point C de la courbe intérieure, où la tangente est horizontale; et comme h est, à peu près, en raison inverse de la distance mutuelle des deux lames, quand elle est très petite par rapport à la constante a, il s'ensuit qu'alors cette force sera en raison inverse du carré de la distance.

Quand le liquide s'élèvera le long de la face intérieure de l'une des lames, et s'abaissera le long de la face intérieure de l'autre, le carré de l'ordonnée k de l'extrémité de la courbe intérieure qui répond à l'angle donné ω, aura pour valeur, d'après l'équation (12),

$$k^2 = a^2(\cos i - \sin \omega);$$

i étant l'angle sous lequel la courbe intérieure coupe le niveau naturel du liquide. A l'extérieur, cet angle est nul, et l'on a

$$k_1^2 = a^2(1 - \sin \omega_1),$$

comme dans le premier cas. En vertu de l'équation (9) du n° 85, on aura donc

$$\varepsilon = g\rho l a^2(\cos i - 1),$$

pour la force qui pousse chaque lame de dehors en dedans; et comme sa valeur est négative, on en conclut que, quel que soit l'état des faces extérieures des deux lames, elles s'écarteront toujours l'une de l'autre dans le second cas que nous examinons actuellement, c'est-à-dire dans le cas où la courbe intérieure présente un point d'inflexion. Si, en outre, cette courbe est symétrique au-dessus et au-dessous du niveau naturel du liquide, et que de plus la distance des deux lames soit très petite par rapport à la constante a, l'angle i, réduit au premier terme de sa valeur, sera égal à $\omega - \frac{1}{2}\pi$, d'après le numéro précédent; par consé-

quent, la force ε se trouvera indépendante de la distance des deux lames, et à peu près égale à $g\rho la^2(1-\sin\omega)$, abstraction faite du signe. Il en sera de même toutes les fois que le point d'inflexion sera seulement très rapproché de l'une des deux lames à laquelle on supposera que répond l'angle ω, comme dans l'exemple du n° 94.

Il est très remarquable que la force ε ne dépende jamais de la figure extérieure du liquide et de l'état des faces externes des deux lames; il l'est également qu'on puisse toujours déterminer cette force, sans connaître la courbe intérieure du liquide, et au moyen, seulement, de l'ordonnée h ou de l'angle i, qui répondent aux points que j'ai désignés par C et I.

S'il n'y a qu'une lame flottante à la surface du liquide, la force ε sera nulle, quel que soit l'état de ses deux faces; en sorte que la lame ne prendra aucun mouvement horizontal; mais elle pourra tourner, ainsi que je l'ai dit précédemment (n° 85), autour d'un axe horizontal et parallèle à sa largeur, passant par son centre de gravité.

S'il y a plus de deux lames flottantes verticales et parallèles, les valeurs précédentes de ε conviendront encore à chacune des deux lames extrêmes. A l'égard d'une lame intermédiaire, on aura

$$\varepsilon = g\rho l(h^2 - h'^2),$$

en supposant que les deux courbes adjacentes ne présentent aucun point d'inflexion, et désignant par h et h' les ordonnées de leurs points C : la lame sera poussée du côté de la courbe à laquelle répond la plus grande de ces deux quantités, abstraction faite du signe. Si l'une de ces courbes présente un point d'inflexion I, et l'autre un point C, auxquels répondront l'angle i et l'ordonnée h, on trouvera

$$\varepsilon = g\rho l(h^2 - a^2\cos i),$$

pour la force qui poussera la lame du côté du point C ou du point I, selon qu'elle sera positive ou négative. Enfin, lorsque chacune de ces courbes aura un point d'inflexion, on aura

$$\varepsilon = g\rho la^2(\cos i - \cos i');$$

i et i' désignant les inclinaisons de la tangente qui répondent aux deux points d'inflexion : la lame sera alors poussée du côté de la courbe à laquelle appartient le plus petit de ces deux angles. Ces résultats se concluent, sans difficulté, de l'équation (9) du n° 85, combinée avec les valeurs de k^2 et k_1^2, dont nous venons de faire usage, dans le cas de deux lames flottantes.

(97). Avant de quitter ce sujet, il nous reste à faire voir que quand l'un des angles représentés par ω et ω' est aigu et l'autre obtus, il y a, comme je l'ai dit précédemment (n° 86), d'autres états d'équilibre possibles en général, et dans lesquels la couche du liquide ne présente pas de point d'inflexion entre les deux plans auxquels ces angles répondent.

Pour cela, considérons d'abord la courbe qui a lieu lorsque les angles ω et ω' sont égaux, et supposons-les obtus. Soit ACB cette courbe (fig. 20), C le point où la tangente est horizontale, ED et GF les faces internes des deux lames flottantes, A et B les points où elles sont rencontrées par la courbe ACB. Par le point A, menons une horizontale AK dans la matière de la lame adjacente, et une normale AN en dehors du liquide; KAN sera l'angle ω, et l'on aura

$$\cos\omega = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}}, \qquad (16)$$

en regardant le radical comme une quantité positive, comptant les x positives à gauche d'un point O choisi arbitrairement, et faisant $x = \mathrm{OD}$ après les différentiations. Par un point A′ de la courbe, situé entre A et C, menons une verticale A′D′ qui tombe à droite du point O, une horizontale A′H à gauche de A′D′, et une normale extérieure A′N′. Si l'on appelle φ l'angle obtus HA′N′, il est évident que la valeur de $\cos\omega$ se changera dans celle de $\cos\varphi$, en y faisant $x = -\mathrm{OD}'$ après les différentiations. Par conséquent, si nous faisons généralement $x = -x'$, et si nous désignons par ω' le supplément N′A′K′ de l'angle φ, nous aurons

$$\cos\omega' = -\frac{\frac{dz}{dx'}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx'^2}}}, \qquad (17)$$

en faisant $x' = \mathrm{OD}'$ après avoir différentié.

Or, maintenant, plaçons dans le liquide une lame parallèle à EAD, dont la face E'A'D', tournée du côté de EAD, passe par le point A', et supposons que ω' soit l'angle spécial qui répond à la matière de cette lame et à celle du liquide. Il est évident que l'équilibre du liquide ne sera pas troublé entre AD et A'D'; car la courbe AA' satisfait, par hypothèse, à l'équation générale de la surface capillaire, réduite à une seule dimension; et, de plus, les équations (16) et (17), auxquelles ses extrémités A et A' satisfont également, sont celles qui doivent avoir lieu, en particulier, pour l'équilibre du liquide que l'on considère entre les deux lames EAD et E'A'D', en y regardant ω et ω' comme des angles donnés. Voilà donc un état d'équilibre dans lequel le liquide s'élève à la fois le long des deux lames parallèles, quoique les cosinus des angles ω et ω' qui s'y rapportent soient de signes contraires. Le liquide s'élève et sa surface est concave par en haut, parce que nous avons supposé l'angle obtus ω plus grand que le supplément de l'angle aigu ω'; il s'abaisserait, au contraire, et sa surface serait concave par en bas, si l'angle obtus était moindre que le supplément de l'angle aigu.

La courbe AA' sera déterminée par le système des équations (3) et (4); mais si l'on représente par δ la distance comprise entre ces deux lames, δ ne sera plus la somme, mais la différence de leurs distances α et α' au point C, qui se déduisent de l'équation (7); et, pour déterminer le module c, on aura

$$\pm\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = \frac{2-c^2}{c}[\mathrm{F}(c,\theta)-\mathrm{F}(c,\theta')] - \frac{2}{c}[\mathrm{E}(c,\theta)-\mathrm{E}(c,\theta')] + \frac{c\sin 2\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} - \frac{c\sin 2\theta'}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta'}}, \qquad (18)$$

au lieu de l'équation (8); θ étant toujours déterminé par l'équation (6), et θ' désignant ce que θ devient quand on y met ω' au

lieu de ω. On prendra le signe supérieur ou inférieur devant δ, selon que cette formule (18) sera positive ou négative.

Quant aux ordonnées verticales k et k' des points A et A' au-dessus du niveau du liquide, elles seront données par les équations

$$k^2 = h^2 + a^2(1 - \sin\omega), \qquad k'^2 = h^2 + a^2(1 - \sin\omega');$$

h étant l'ordonnée du point C, situé sur le prolongement de AA', dont la valeur sera

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{c}\sqrt{1 - c^2}.$$

Ces ordonnées seront de même signe; et on les regardera comme positives ou comme négatives, selon que celui des deux angles ω et ω', qui est obtus, sera plus grand ou moindre que le supplément de l'angle aigu. On verra, comme dans le numéro précédent, que les deux lames flottantes seront poussées l'une vers l'autre, quel que soit l'état de leurs faces externes.

(98). Au lieu de la courbe qui présente un point C où la tangente est horizontale, si l'on considère celle qui contient un point d'inflexion I, on en pourra prendre une portion, située d'un même côté du point I, pour la figure d'équilibre d'un liquide compris entre deux lames parallèles, telles que les cosinus des angles spéciaux ω et ω' soient de signes contraires. Ce nouvel état d'équilibre aura cela de commun avec celui du numéro précédent, que le liquide s'élèvera ou s'abaissera à la fois le long des deux lames; mais ils différeront l'un de l'autre par la nature de la surface. La portion de courbe qui termine le liquide sera maintenant déterminée par le système des équations (10) et (11); le module c étant donné par l'équation

$$\pm\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = F(c, \theta) - F(c, \theta') - 2E(c, \theta) + 2E(c, \theta') + \frac{c^2\sin 2\theta}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\theta}} - \frac{c^2\sin 2\theta'}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\theta'}}, \qquad (19)$$

qui remplacera l'équation (14), et dans laquelle δ continuera de représenter la distance mutuelle des deux lames, regardée comme une quantité positive.

Les ordonnées k et k' des points extrêmes seront données par les équations

$$k^2 = a^2(\cos i - \sin\omega), \qquad k'^2 = a^2(\cos i - \sin\omega'),$$

en faisant $c = \cos\frac{1}{2}i$, et regardant k et k', qui doivent être de même signe, comme des quantités positives ou négatives, selon que celui des deux angles donnés ω et ω' qui sera obtus, surpassera le supplément de l'autre ou en sera surpassé. On en conclura, comme dans le n° 96, que, dans cet état d'équilibre, la pression horizontale du liquide tendra à écarter les deux lames l'une de l'autre.

Nous voyons donc que si l'on rapproche l'une de l'autre deux lames verticales et parallèles, qui soient telles que le liquide s'élèverait le long de l'une et s'abaisserait le long de l'autre, si elles étaient isolées, il pourra généralement prendre entre elles trois formes différentes: dans l'une de ces formes, la courbe qui le termine présentera un point d'inflexion; dans les deux autres, elle ne présentera ni un point d'inflexion, ni un point où la tangente soit horizontale; mais son prolongement en dehors des deux lames contiendra un point de l'une ou l'autre de ces deux espèces. Toutefois, lorsque ω, ω', δ, sont donnés, ces différentes formes du liquide supposent que les valeurs de c tirées des équations (14), (18), (19), sont moindres que l'unité; et si cette condition n'est pas remplie pour l'une de ces équations, la figure correspondante ne peut avoir lieu.

(99). Pour éclaircir ces résultats par un exemple, supposons que l'une des deux lames ait été préalablement mouillée par le liquide, et prenons, en conséquence, $\omega = \pi$; supposons, en même temps, que l'autre lame n'exerce qu'une très petite attraction sur le liquide; en sorte que ω' soit un très petit angle, que nous représenterons par $2v$. L'angle ω étant plus grand que le supplément de ω', le liquide sera concave et élevé au-dessus de son niveau naturel, dans les deux cas des numéros précédens.

En vertu de l'équation (6), on aura

$$\cot\theta = b, \qquad \theta' = \theta - \frac{2bv}{1+b^2},$$

en négligeant le carré de v, et désignant par b le complément $\sqrt{1-c^2}$ du module c. Si l'on développe la formule (18) suivant les puissances de $\theta'-\theta$, le terme indépendant de cette différence n'existera pas, et l'on trouve que la valeur de $\cot\theta$ fait disparaître celui qui dépend de sa première puissance; en s'arrêtant à son carré, il vient

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{a}=\frac{(\theta'-\theta)^2(1+b^2)^{\frac{1}{2}}c}{2\sqrt{2}\,b^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\delta}{a}=v^2\sqrt{\frac{1-b^2}{1+b^2}};$$

d'où l'on tire

$$b=\sqrt{\frac{a^2v^4-\delta^2}{a^2v^4+\delta^2}},\qquad c=\frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{a^2v^4+\delta^2}}.$$

Par conséquent, pour que l'équilibre que l'on a considéré dans le n° 97 puisse avoir lieu, il sera nécessaire et il suffira que la distance δ soit très petite et moindre que av^2.

Cette condition étant remplie, nous aurons

$$h=\frac{a}{\delta}\sqrt{a^2v^4-\delta^2},$$

et par suite

$$k=\frac{a^2v^2}{\delta},\qquad \varepsilon=\frac{g\rho la^2}{\delta^2}(a^2v^4-\delta^2);$$

pour une même valeur de v, l'élévation du liquide sera donc en raison inverse de la distance δ des deux lames; et si cette distance est très petite par rapport à av^2, la force ε qui les pousse l'une vers l'autre, sera en raison inverse du carré de δ.

Si l'on fait successivement $\mu=\frac{1}{2}\pi$ et $\mu=-\frac{1}{2}\pi+2v$, dans l'équation (15), ce qui répond à $\omega=\pi$ et $\omega'=2v$, et qu'on néglige le carré de v, on en déduira

$$\cot\theta=\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\sqrt{\cos i}},\qquad \theta'=\theta-\frac{2v\sin\frac{1}{2}i}{\sqrt{\cos i}}.$$

En développant la formule (19) suivant les puissances de $\theta' - \theta$, jusqu'au carré inclusivement, et mettant $\cos\frac{1}{2}i$ à la place de c, on trouve

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{a} = \frac{(\theta'-\theta)^2\sqrt{\cos i}}{2\sqrt{2}\sin^2\frac{1}{2}i} = \frac{v^2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos i}};$$

d'où l'on tire

$$\cos i = \frac{a^2v^2}{\delta^2}.$$

Pour que l'angle i soit réel, il suffirait qu'on eût $\delta > av^2$; mais notre calcul suppose très petite la différence $\theta' - \theta$; ce qui exige que $\frac{v}{\sqrt{\cos i}}$ soit aussi très petit, et, par conséquent, que $\frac{\delta}{av}$ le soit également. En supposant donc que la distance δ surpasse av^2, et soit néanmoins très petite par rapport à av, l'équilibre dont il a été question dans le numéro précédent pourra avoir lieu; et, dans cet état, on aura

$$k = \frac{a^2v^2}{\delta}, \quad \epsilon = -g\rho la^2\left(1 - \frac{a^2v^2}{\delta^2}\right),$$

pour l'élévation du liquide et pour l'expression de la force qui tend à écarter les deux lames l'une de l'autre.

Dans ces deux formes du liquide, la force ϵ s'évanouit à la limite qui les sépare, c'est-à-dire quand $\delta = av^2$, et k est le même pour toutes les valeurs de δ. Si la distance δ surpasse d'abord av^2, que la seconde forme s'établisse, et qu'ensuite on rapproche les deux lames, de sorte que δ devienne moindre que av^2, la première forme succédera à la seconde, et la répulsion se changera en attraction.

(100). En rapprochant ce résultat de celui que nous avons trouvé précédemment pour le cas où il existe un point d'inflexion entre les deux lames, on voit que, dans l'exemple que nous examinons, le liquide peut prendre deux figures d'équilibre différentes, pour une même distance δ très petite par rapport à a. L'une de ces figures sera, à très peu près, une parabole cubique (n° 95); elle subsistera, quelque petite que soit la distance δ, et les deux lames se repousseront constamment avec une force indépendante de δ et égale

à $g\rho la^2$ (n° 96). Dans l'autre figure, la courbe du liquide sera de deux natures différentes, selon qu'on aura $\delta > a\nu^2$ ou $\delta < a\nu^2$ entre les deux lames; elle sera tout entière au-dessus du niveau, et ne présentera ni inflexion ni point où la tangente soit horizontale; elle fera partie d'une parabole cubique, quand δ surpassera $a\nu^2$, et d'un arc de cercle, d'un rayon égal à $\frac{1}{2}\delta$, quand δ sera moindre que $a\nu^2$. Dans ce changement de courbure, la force ϵ changera de signe; à mesure que δ diminuera, elle croîtra ou décroîtra, abstraction faite du signe, suivant qu'on aura $\delta < a\nu^2$ ou $\delta > a\nu^2$.

Mais, laquelle de ces deux figures différentes le liquide prendra-t-il effectivement? Il y a lieu de croire que si l'on a d'abord placé les deux lames parallèles à une grande distance l'une de l'autre, en sorte que le liquide se soit élevé près de l'une et abaissé près de l'autre, et qu'ensuite on les ait rapprochées graduellement jusqu'à ce que la partie horizontale du liquide, comprise entre elles, ait disparu, ce sera la première figure, présentant un point d'inflexion, qui s'établira. Mais, au contraire, le liquide s'étant élevé près de l'une des lames, si l'on plonge l'autre verticalement dans la partie courbe du liquide, on peut croire qu'alors la seconde figure aura lieu, et qu'il ne se produira pas d'inflexion.

Le changement de répulsion en attraction qui a lieu dans le cas de la seconde figure, quand la distance δ diminue convenablement, fournit l'explication d'un phénomène observé par Haüy et cité dans la *Mécanique céleste* (*). Ayant plongé dans l'eau une lame d'ivoire, le long de laquelle le liquide s'est élevé, et une feuille de talc laminaire, substance non susceptible d'être mouillée par l'eau, il a observé que ces deux lames se repoussaient tant que leur distance mutuelle dépassait une certaine limite, et qu'elles s'attiraient, au contraire, lorsque leur distance était moindre. Il serait à désirer que cette expérience curieuse fût répétée; et pour que l'observation fût complète, il faudrait vérifier qu'en plaçant d'abord les deux lames parallèles à une assez grande distance l'une de l'autre, et les rap-

(*) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire*, page 47.

prochant ensuite avec précaution, la courbe du liquide présenterait une inflexion, qui se maintiendrait, ainsi que la force répulsive, quelque petite que devienne la distance des deux lames.

(101). Occupons-nous actuellement d'un autre genre de questions. Supposons qu'un volume donné d'un liquide soit compris entre deux plans horizontaux, et proposons-nous de déterminer la surface latérale de ce liquide. Son équation différentielle sera

$$p + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{H}\left(\tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{\lambda'}\right) = \Pi; \qquad (a)$$

H étant la constante relative à la matière du liquide, λ et λ' les rayons de courbure principaux en un point quelconque M de sa surface, Π la pression atmosphérique, p la pression intérieure qui a lieu à une distance de M, insensible, mais plus grande que le rayon d'activité moléculaire. En appelant z l'ordonnée du point M, verticale et dirigée de bas en haut, ρ la densité du liquide, g la gravité, et $\mathcal{C}$ une constante arbitraire, on pourra représenter la valeur de p par

$$p = \Pi + \mathcal{C}\mathrm{H} - g\rho z;$$

et aucune partie plane de la surface du liquide n'étant soumise à la pression de l'atmosphère, la constante $\mathcal{C}$ ne sera pas nulle, et sa valeur devra se déterminer d'après le volume du liquide. Si les deux plans horizontaux entre lesquels il est compris sont parfaitement homogènes, et qu'on fasse abstraction des sinuosités de leurs superficies, il est évident que la surface latérale du liquide sera une surface de révolution, qui aura son axe vertical. D'après l'expression de $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$ relative à ce genre de surfaces, l'équation (a) deviendra donc

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\left(1 + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}}{\left(1 + \frac{dz^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + 2\mathcal{C} = \frac{2z}{a^2}, \qquad (b)$$

en désignant par t la distance du point quelconque M à l'axe de figure, et faisant $\mathrm{H} = g\rho a^2$. Selon la règle que l'on doit suivre pour déterminer le signe ambigu du dénominateur dans l'expres-

sion de $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}$ (n° 49), il faudra prendre le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ avec un signe contraire à celui de dt; la différentielle dz étant positive dans toute la longueur de la génératrice.

A l'extrémité supérieure de cette courbe, je désignerai par ω l'angle que fait la normale extérieure avec la verticale tirée en sens contraire de la pesanteur, et à l'extrémité inférieure, j'appellerai ω' l'angle compris entre la normale extérieure et la verticale menée dans le sens de la pesanteur. Ces deux angles seront donnés; et, par exemple, chaque angle sera égal à deux droits, quand les deux plans auront été préalablement mouillés par le liquide. Je considérerai, par la suite, un cas dans lequel l'un de ces angles est aigu et l'autre obtus; maintenant, je supposerai qu'ils sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus : la courbe sera alors, dans toute sa longueur, concave ou convexe en-dehors, et il y aura un point C pour lequel sa tangente sera verticale. Je fixerai en ce point l'origine de la variable z, et je désignerai par h la valeur correspondante de t, en sorte qu'on ait à la fois

$$t=h, \quad z=0, \quad \frac{dz}{dt}=\infty.$$

Il en résultera

$$6=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{h}-\tfrac{1}{\gamma}\right);$$

γ étant le rayon de courbure de la génératrice au point C, que l'on regardera comme positif ou comme négatif, suivant que cette courbe sera concave ou convexe en-dehors. On a pris $-h$ pour l'autre rayon de courbure, c'est-à-dire que l'on a considéré le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ comme négatif, parce que la ligne de courbure circulaire à laquelle il répond tourne sa convexité en-dehors.

Soient r et r' les rayons des cercles de contact du liquide avec les plans supérieur et inférieur, et α et α' leurs distances au plan horizontal passant par le point C; à l'extrémité supérieure de la génératrice, nous aurons

$$t=r, \quad z=\alpha, \quad \frac{dz}{dt}+\sin\omega\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}=0, \qquad (c)$$

et, à son extrémité inférieure,

$$t = r', \quad z = -\alpha', \quad \frac{dz}{dt} + \sin\omega' \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}} = 0; \qquad (d)$$

le signe des radicaux étant le même que dans l'équation (b).

Appelons enfin m la valeur moyenne de t, et k la distance mutuelle des deux plans qui comprennent le liquide; son volume pourra être représenté par $\pi m^2 k$, et l'on aura

$$\alpha + \alpha' = k, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} t^2 dz = m^2 k. \qquad (e)$$

Les équations (b), (c), (d), (e), sont celles qu'il s'agira de résoudre par approximation; mais, pour cela, il faudra procéder différemment, selon les dimensions du liquide. Je les supposerai d'abord très petites par rapport à a, en sorte que $\frac{m}{a}$ et $\frac{k}{a}$, et, par suite, $\frac{t}{a}$ et $\frac{z}{a}$, soient de très petites fractions.

(102). Dans ce cas, je multiplie l'équation (b) par tdt, et j'intègre ses deux membres; il vient

$$\frac{t\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}}} + \mathfrak{G}t^2 + \mathfrak{G}' = \frac{t^2 z}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int t^2 dz; \qquad (f)$$

et si l'on suppose que l'intégrale $\int t^2 dz$ commence avec z, la constante arbitraire $\mathfrak{G}'$ aura pour valeur

$$\mathfrak{G}' = h - \mathfrak{G}h^2 = \frac{1}{2} h\left(1 + \frac{h}{\gamma}\right).$$

En combinant les équations (c), (d), (f), on en conclura

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}r^2 + \mathfrak{G}' - r\sin\omega &= \frac{\alpha r^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int_0^{\alpha} t^2 dz, \\ \mathfrak{G}r'^2 + \mathfrak{G}' - r'\sin\omega' &= -\frac{\alpha' r'^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int_0^{-\alpha'} t^2 dz; \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

et en retranchant ces équations (g) l'une de l'autre, et ayant égard à la seconde équation (e), on aura

$$\mathfrak{G}(r^2 - r'^2) = r\sin\omega - r'\sin\omega' + \frac{1}{a^2}(\alpha r^2 + \alpha' r'^2 - km^2);$$

résultat qui coïncide avec l'équation (6) du n° 82, en observant que, d'après les expressions de p qu'on a employées dans les n°s 81 et 101, la constante b doit être la même chose que $a^2\mathfrak{C} + \alpha'$.

Dans une première approximation, je négligerai les termes divisés par a^2; ce qui réduit l'équation (f) à

$$\frac{t\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} + \mathfrak{C}t^2 + \mathfrak{C}' = 0;$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{(\mathfrak{C}t^2+\mathfrak{C}')\,dt}{\sqrt{t^2-(\mathfrak{C}t^2+\mathfrak{C}')^2}}.$$

Le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ ayant un signe contraire à celui de dt, et la différentielle dz étant positive, la quantité $\mathfrak{C}t^2+\mathfrak{C}'$ est aussi positive; par conséquent, le radical contenu dans l'expression de dz devra être de même signe que dt.

Cette formule s'intègrera toujours au moyen des fonctions elliptiques, et, dans quelques cas, au moyen seulement des arcs de cercle et des logarithmes. La valeur de z que l'on en déduira sera le premier terme d'une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{a^2}$, qui sera d'autant plus convergente que les dimensions du liquide seront plus petites par rapport à a, et dont on formera autant de termes que l'on voudra, par la méthode des approximations successives. En faisant successivement $t = r$ et $t = r'$, dans l'expression de z, on aura celles de α et $-\alpha'$; et, cela étant, les quatre équations (e) et (g) feront connaître les valeurs de r, r', h et γ. Par conséquent, il ne restera rien d'inconnu dans l'expression de z, qui sera la solution complète du problème.

Si l'épaisseur k de la goutte est très petite, non-seulement à l'égard de a, mais aussi par rapport à sa largeur, la génératrice de la surface latérale du liquide se confondra, à très peu près, avec son cercle osculateur au point C. C'est, en effet, ce que l'on déduit de l'expression de dz; car, dans ce cas, le rayon γ de ce cercle est très petit par rapport au demi-diamètre h de la goutte; on a,

à peu près,

$$\mathfrak{C}=-\frac{1}{2\gamma}, \qquad \mathfrak{C}'=\frac{h^2}{2\gamma};$$

si l'on fait

$$t=h+t', \qquad dt=dt',$$

la variable t' sera aussi très petite; on aura, à très peu près,

$$dz=\frac{(\gamma-t')\,dt'}{\sqrt{2\gamma t'-t'^2}},$$

et, par conséquent,

$$z=\sqrt{2\gamma t'-t'^2},$$

à cause de $z=0$, quand $t=h$ ou $t'=0$. On regardera le radical comme positif, selon qu'il s'agira d'un point situé au-dessus ou au-dessous de C; la variable t' aura le même signe que γ; et, pour vérifier l'équation (f), il faudra prendre

$$\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}=-\frac{\gamma}{\sqrt{2\gamma t'-t'^2}},$$

en ayant égard au signe que doit avoir le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ dans cette équation. On aura, en même temps,

$$h=m, \qquad \gamma=\frac{k}{\cos\omega+\cos\omega'},$$

pour les valeurs approchées de h et γ.

(103). Pour appliquer les équations (f) et (g) au cas d'une très petite goutte de liquide posée sur un plan horizontal et libre à sa partie supérieure, il suffira de supprimer le plan supérieur où l'on supposait que le liquide venait se terminer, et de faire, conséquemment, $r=0$. L'inconnue r sera remplacée par l'inconnue k, qui ne sera plus donnée comme précédemment, et qui représentera la hauteur du sommet de la goutte au-dessus du plan inférieur; à ce sommet, le plan tangent sera horizontal, et ω égal à zéro. Je supposerai l'angle ω' aigu, de sorte qu'il s'agisse par exemple, d'une très petite goutte de mercure non oxidé, posée sur une plaque horizontale de verre, et qui sera convexe dans toute la partie qui n'est pas en contact avec le plan inférieur.

En faisant $r=0$ dans la première équation (g), on voit que $\mathfrak{C}'$

sera une quantité très petite qui aura a^2 pour diviseur; ce qui exige que γ diffère très peu de h. Soit donc

$$\frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{h} - \frac{2\gamma'}{a^2};$$

γ' étant une nouvelle inconnue : nous aurons

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{h} + \frac{\gamma'}{a^2}, \quad \mathfrak{C}' = -\frac{h^2\gamma'}{a^2}.$$

La valeur de z serait $\sqrt{h^2 - t^2}$, si l'on négligeait les termes divisés par a^2; je ferai donc

$$z = \sqrt{h^2 - t^2} + \frac{uh^2}{a^2}.$$

En substituant ces différentes valeurs dans l'équation (f), les termes indépendans de a^2 disparaîtront; et si l'on multiplie les autres par a^2, et qu'on supprime ensuite ceux qui auront encore a^2 pour diviseur, on aura

$$\frac{t}{h}(h^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dt} - \gamma'(h^2 - t^2) + \frac{2}{3}(h^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Au sommet de la goutte, on a $t = 0$; il faudra donc qu'on ait

$$\gamma' = \frac{2h}{3}.$$

On aura ensuite

$$du = \frac{2htdt}{3\sqrt{h^2 - t^2}(h + \sqrt{h^2 - t^2})};$$

en intégrant et observant que $u = 0$ quand $t = 0$, on aura la valeur de u; et en la substituant dans celle de z, il en résultera

$$z = \sqrt{h^2 - t^2} - \frac{2h^3}{3a^2}\log\frac{h + \sqrt{h^2 - t^2}}{h},$$

pour l'équation de la courbe génératrice qu'il s'agissait d'obtenir. On se rappellera que le radical doit être pris avec le signe +, au-dessus du point C, et avec le signe —, au-dessous; au sommet de la goutte on aura $t = 0$, $z = a$, et à la base, $t = t'$, $z = -a'$; et il en résultera

$$\alpha = h - \frac{2h^3}{3a^2}\log 2,$$

$$\alpha' = \sqrt{h^2 - r'^2} + \frac{2h^3}{3a^2}\log\frac{h - \sqrt{h^2 - r'^2}}{h};$$

le radical $\sqrt{h^2 - r'^2}$ étant regardé comme une quantité positive.

Il reste encore à déterminer h et r'. Or, en faisant

$$\mathcal{C} = \frac{1}{h} + \frac{2h}{3a^2}, \quad \mathcal{C}' = -\frac{2h^3}{3a^2},$$

dans la seconde équation (g), elle devient

$$r'^2 + \frac{2r'^2h^2}{3a^2} - hr'\sin\omega' - \frac{2h^4}{3a^2} = \frac{2h}{a^2}\int_h^{r'} ztdt;$$

dans l'étendue de cette intégrale, on peut prendre

$$z = -\sqrt{h^2 - t^2},$$

à cause qu'elle est divisée par a^2; on aura donc

$$r'^2 - hr'\sin\omega' = \frac{2h(h^2 - r'^2)}{3a^2}(h + \sqrt{h^2 - r'^2});$$

par conséquent la valeur approchée de r' sera

$$r' = h\sin\omega' + \frac{2h^3(1 + \cos\omega')\cos^2\omega'}{3a^2\sin\omega'},$$

excepté lorsque ω' sera zéro ou très petit : dans le cas de $\omega' = 0$, par exemple, on aurait

$$r' = \frac{2h^2}{a\sqrt{3}}.$$

En appelant ε le rayon de la sphère équivalente au volume de la goutte de liquide, ou $\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}$ ce volume, la seconde équation (e) sera la même chose que

$$\frac{4\varepsilon^3}{3} = \alpha' r'^2 - 2\int_{r'}^{0} ztdt.$$

D'après la valeur de z, et en ayant égard au signe du radical qu'elle renferme, on a

$$\int_h^0 ztdt = -\frac{1}{3}h^3 + \frac{h^5}{6a^2},$$

$$\int_{r'}^h ztdt = -\frac{1}{3}(h^2 - r'^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{h^3 r'^2}{3a^2}\log\frac{h - \sqrt{h^2 - r'^2}}{h} + \frac{h^5}{6a^2} - \frac{h^3}{6a^2}(h + \sqrt{h^2 - r'^2})^2,$$

où l'on regardera le radical $\sqrt{h^2 - r'^2}$ comme une quantité positive. Si l'on ajoute les valeurs de ces deux intégrales, on aura celle de l'intégrale qui entre dans l'équation précédente ; et d'après la valeur de α', cette équation deviendra

$$4\varepsilon^3 = 3r'^2\sqrt{h^2 - r'^2} + 2h^3 + 2(h^2 - r'^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2h^5}{a^2} + \frac{h^3}{a^2}(h + \sqrt{h^2 - r'^2})^2.$$

Si l'on y substitue pour r' sa valeur, et qu'on en tire ensuite celle de h, il vient

$$h = \varepsilon\eta + \frac{\varepsilon^3\eta^6}{12a^2}(1 + \cos^2\omega' - 2\cos^3\omega' - 2\cos^4\omega'),$$

en faisant, pour abréger,

$$2 + 3\cos\omega' - \cos^3\omega' = \frac{4}{\eta^3}.$$

Cela étant, si l'on ajoute les valeurs de α et α' pour avoir la hauteur k du sommet de la goutte au-dessus de sa base, et qu'on y mette pour r' et h leurs valeurs, on aura

$$k = \varepsilon\eta(1 + \cos\omega') + \frac{4\varepsilon^3\eta^3}{3a^2}\log\sin\frac{1}{2}\omega' - \frac{\varepsilon^3\eta^6}{12a^2}(1 + \cos\omega')(2\cos^3\omega' + 5\cos^2\omega' + 4\cos\omega' - 1). \qquad (h)$$

Si l'on avait mesuré directement la hauteur k d'une gouttelette de mercure, d'un volume ou d'un poids connu, cette équation (h) pourrait servir à déterminer l'angle ω' relatif au contact du mercure avec le verre sur lequel il est posé ; mais une petite erreur sur le poids en produirait une trop grande sur la valeur de ω' ; et il vaudra mieux employer à cette détermination la hauteur observée d'une goutte très large, dont nous donnerons tout à l'heure l'expression en fonction de l'angle dont il s'agit.

(104). Considérons maintenant le cas où les dimensions horizon-

tales du liquide sont très grandes par rapport à son épaisseur verticale. Je multiplie alors l'équation (*b*) par dz, et j'intègre ses deux membres ; ce qui donne

$$2\mathcal{C}z - \frac{z^2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} - \int \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}. \qquad (k)$$

On n'ajoute pas de constante arbitraire, parce qu'on suppose que l'intégrale contenue dans le second membre commence avec z, et qu'au point C, on a $z = 0$ et $\frac{dz}{dt} = 0$. En vertu des équations (*c*) et (*d*), et en ayant égard au signe contraire à celui de dt, que le radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ doit avoir, sa valeur sera $\frac{1}{\cos\omega}$ à l'extrémité supérieure de la courbe, et $-\frac{1}{\cos\omega'}$ à l'extrémité inférieure : en ces deux points on aura donc

$$\left.\begin{aligned} 2\mathcal{C}a - \frac{a^2}{a^2} &= \cos\omega - \int_0^a \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}, \\ 2\mathcal{C}a' + \frac{a'^2}{a^2} &= \cos\omega' + \int_0^{-a'} \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}. \end{aligned}\right\} (i)$$

La variable t étant très grande pour tous les points de la surface latérale du liquide, nous pourrons, dans une première approximation, négliger les intégrales que contiennent ces trois équations. En résolvant la première par rapport à dt, on aura, de cette manière

$$dt = \frac{\left(\frac{z^2}{a^2} - 2\mathcal{C}\right)dz}{\sqrt{1-\left(2\mathcal{C}z - \frac{z^2}{a^2}\right)}};$$

et comme, d'après l'équation (*k*) et le signe du radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$, le numérateur de cette formule est de même signe que dt, il faudra considérer son dénominateur comme une quantité positive. On pourra

toujours la réduire en fonctions elliptiques; mais je supposerai l'épaisseur du liquide, et par suite l'ordonnée z, très petite par rapport à la constante a; négligeant en conséquence la fraction $\frac{z^2}{a^2}$, intégrant et observant qu'on a $t = h$ quand $z = 0$, il vient

$$t = h - \frac{1}{2\mathfrak{C}} + \frac{1}{2\mathfrak{C}}\sqrt{1 - 4\mathfrak{C}^2 z^2}.$$

Nous nous arrêterons à cette valeur de t, dans laquelle il restera à déterminer les constantes h et $\mathfrak{C}$. Or, les équations (i) donnent, à très peu près,

$$2\mathfrak{C}a = \cos\omega, \qquad 2\mathfrak{C}a' = \cos\omega';$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\mathfrak{C}} = \frac{k}{\cos\omega},$$

en supposant $\omega' = \omega$, pour plus de simplicité. Je supposerai aussi que ω diffère beaucoup d'un angle droit; $\frac{1}{\mathfrak{C}}$ sera alors une ligne très petite, comme l'épaisseur k; il en résultera, à très peu près,

$$\int_{-a'}^{a} t^2 dz = \left(h - \frac{k}{2\cos\omega}\right)^2 k + \frac{hk^2}{4\cos^2\omega}(\pi - 2\omega + \sin 2\omega);$$

et l'on déduira de la seconde équation (e),

$$h = m + \frac{k}{2\cos\omega} - \frac{k}{8\cos^2\omega}(\pi - 2\omega + \sin 2\omega).$$

(105). Si l'épaisseur k du liquide n'est pas donnée, mais qu'il soit chargé d'un poids ϖ posé sur le plan supérieur qui le termine, il faudra, pour déterminer k, recourir à l'équation (7) du n° 82, dans laquelle on mettra $a^2\mathfrak{C} + \alpha'$ à la place de la constante b, ainsi qu'on l'a dit précédemment (n° 102). En ayant égard aux valeurs de $\mathfrak{C}$ et α', on aura alors

$$\varpi = \pi g\rho r\left[\left(\frac{a^2\cos\omega}{k} - \frac{1}{2}k\right)r - a^2\sin\omega\right];$$

équation dans laquelle r est la valeur de t qui répond à $z = a$. A cause que k est très petit par rapport à m, on pourra prendre m pour cette valeur de r; et comme on a aussi supposé k très petit par

rapport à a, on pourra réduire l'équation précédente à

$$\varpi = \frac{\pi g \rho m^2 a^2 \cos \omega}{k};$$

d'où l'on tire

$$k = a \sqrt{\frac{g \rho v \cos \omega}{\varpi}},$$

en appelant v le volume $\pi m^2 k$ du liquide.

Lorsque l'angle ω sera obtus, il faudra, pour que cette valeur de k soit réelle et que l'équilibre soit possible, que le plan supérieur, au lieu d'être chargé d'un poids donné, soit, au contraire, tiré de bas en haut, ce qui rendra ϖ négatif; il faudra, par exemple, que ce plan soit suspendu au plateau d'une balance, et qu'on place le poids ϖ dans l'autre plateau. Quand ω sera aigu, le poids ϖ devra agir dans le sens de la pesanteur, et sera alors une quantité positive. La différence de ces deux cas tient à la figure du liquide, concave dans la première hypothèse, et convexe dans la seconde. La valeur de k variera, pour un même liquide et entre les mêmes plans, suivant la racine carrée du rapport du poids $g\rho v$ du liquide à la charge positive ou négative. Il serait intéressant de vérifier ce résultat par l'expérience, en ayant soin de prendre la charge très grande, par rapport au poids du liquide, et la largeur du liquide aussi très grande relativement à son épaisseur, sans quoi la formule précédente ne serait pas applicable.

Si les deux plans ont été préalablement mouillés par le liquide, en sorte qu'on ait $\omega = \pi$, et si l'on met $-\varphi$ au lieu de ϖ, il en résultera

$$\varphi = \frac{\pi g \rho m^2 a^2}{k}.$$

Ce sera la mesure de l'effort qu'il faudra faire pour séparer ou écarter l'un de l'autre deux disques horizontaux, entre lesquels il existe une couche de liquide, d'une très petite épaisseur k et d'un très grand rayon m; la quantité $\frac{a^2}{k}$ étant, à très peu près, la hauteur à laquelle le même liquide s'élèverait dans un tube vertical d'un rayon égal à k.

(106). Supprimons actuellement le plan supérieur, supposons

l'angle ω' aigu, et proposons-nous de déterminer la figure d'une large goutte de mercure, par exemple, posée sur un plan horizontal de verre. La hauteur k du sommet de la goutte au-dessus de sa base sera inconnue ; nous la supposerons très petite par rapport à sa largeur, mais non plus, comme précédemment, par rapport à la constante a.

Jusqu'à une petite distance du bord de la goutte, sa surface sera, à très peu près, plane et horizontale ; on pourra négliger, dans l'équation (b), le cube de $\frac{dz}{dt}$ et le produit $\frac{dz^2}{dt^2}\frac{d^2z}{dt^2}$; ce qui la réduit à

$$t\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}+2\mathcal{C}t=\frac{2zt}{a^2}.$$

Si l'on désigne par α la valeur de z qui répond au sommet de la goutte, par μ une autre constante inconnue, et qu'on fasse

$$\mathcal{C}=\frac{\alpha}{a^2}+\frac{1}{\mu},$$

on satisfera à cette équation et aux conditions $z=\alpha$ et $\frac{dz}{dt}=0$, quand $t=0$, en prenant

$$z=\alpha+\frac{a^2}{\pi\mu}\int_0^{\pi}\left(1-e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}\cos\psi}\right)d\psi, \quad (l)$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier : π et e représentent, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre et la base des logarithmes népériens. Pour des valeurs de t très petites par rapport à a, on pourra développer cette intégrale définie en série convergente ordonnée suivant les puissances de t^2, et en s'arrêtant au second terme, on aura

$$z=\alpha-\frac{t^2}{2\mu};$$

d'où il résulte que μ sera positif et représentera la grandeur du rayon de courbure du liquide à son sommet. Quand, au contraire, t sera très grand par rapport à a, on pourra calculer, d'une autre manière, la valeur de l'intégrale définie. En effet, on a

$$\int_0^{\pi}e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}\cos\psi}d\psi=e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}}\int_0^{\pi}e^{-\frac{2t\sqrt{2}}{a}\sin^2\frac{1}{2}\psi}d\psi;$$

si donc on fait

$$\frac{2t\sqrt{2}}{a} = b, \qquad \frac{2t\sqrt{2}}{a}\sin^2\frac{1}{2}\psi = x^2,$$

on en conclura

$$\int_0^{\pi} e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}\cos\psi}\, d\psi = 2e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}}\int_0^{b} e^{-x^2}(b-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Après avoir développé $(b-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de x^2, on aura une suite d'intégrales de la forme $\int_0^b e^{-x^2}x^{2n}dx$, qui pourront s'étendre, sans erreur sensible, depuis zéro jusqu'à l'infini, à cause de la grandeur de b, et dont on obtiendra ensuite facilement les valeurs; il en résultera une série ordonnée suivant les puissances négatives de b, qui sera très convergente, du moins dans les premiers termes. En s'arrêtant au premier, et observant que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

on aura

$$\int_0^{\pi} e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}\cos\psi}\, d\psi = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}},$$

et, par conséquent,

$$z = a + \frac{a^2}{\mu} - \frac{a^2}{\mu\sqrt{2\pi\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{a}{t}}\, e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}}. \qquad (m)$$

Ce sera l'équation de la surface de la goutte, à une grande distance de son sommet, pour laquelle, cependant, le plan tangent soit encore très peu incliné.

Au-delà de cette distance, j'emploierai, pour déterminer la courbe du liquide, l'équation (k), de laquelle je retrancherai la première équation (i). En mettant pour 6 sa valeur, et faisant $\cos\omega = 1$, il en résultera

$$\frac{a^2-(a-z)^2}{a^2} - \frac{2(a-z)}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} - \int \frac{\frac{dz}{dt}dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}};$$

cette dernière intégrale commençant maintenant à $z = a$, c'est-à-dire au sommet de la goutte, où l'on a $\frac{dz}{dt} = 0$. Dans toute son étendue, la quantité comprise sous le signe $\int$ est très petite, soit à cause du facteur $\frac{dz}{dt}$, soit à raison du diviseur t. En négligeant donc cette intégrale, faisant $z = z' + \frac{a^2}{\mu}$, et négligeant aussi le terme divisé par μ^2, dans une première approximation, on aura simplement

$$\frac{a^2 - (a - z')^2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}}};$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{[(a - z')^2 - a^2]\, dz'}{(a - z')\sqrt{2a^2 - (a - z')^2}}.$$

Comme $a - z'$ est positif, et que le numérateur de cette formule est de même signe que dt, d'après l'équation précédente et le signe de $\sqrt{1 + \frac{dz'^2}{dt^2}}$, il s'ensuit qu'il faudra regarder comme positif le radical $\sqrt{2a^2 - (a - z')^2}$. En intégrant, on aura

$$t = l + \sqrt{2a^2 - (a - z')^2} - \sqrt{2a^2 - \left(a + \frac{a^2}{\mu}\right)^2}$$

$$- \frac{a}{\sqrt{2}} \log \frac{[a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - (a - z')^2}]\left(a + \frac{a^2}{\mu}\right)}{\left[a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - \left(a + \frac{a^2}{\mu}\right)^2}\right](a - z')}; \qquad (n)$$

l étant la constante arbitraire, laquelle représentera le demi-diamètre de la goutte dans sa plus grande largeur, qui répond à $z = 0$ ou $z' = -\frac{a^2}{\mu}$, et à $\frac{dz}{dt} = \infty$.

On pourra, si l'on veut, pousser plus loin l'approximation; mais nous nous bornerons aux formules (l), (m) et (n), qui feront connaître la figure du liquide dans toute son étendue, après toutefois qu'on aura déterminé les valeurs des constantes μ, a et l, et de la constante α', nécessaire pour avoir la hauteur k ou $\alpha + \alpha'$ du sommet de la goutte au-dessus de sa base.

(107). Pour y parvenir, j'observe que les équations (m) et (n) ont lieu

en même temps et doivent coïncider pour les points qui répondent à des coordonnées t et z très peu différentes de l et a. Or, en négligeant le carré de $a - z'$ dans l'équation (n), faisant, pour abréger,

$$l + (\sqrt{2} - 1)a = l',$$

et observant que $a + \frac{a^2}{\mu}$ diffère très peu de a, comme on le verra tout à l'heure, cette équation devient

$$t = l' + \frac{a}{\sqrt{2}} \log \frac{(1+\sqrt{2})(a - z')}{2a\sqrt{2}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$a + \frac{a^2}{\mu} - z = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} e^{\frac{(t-l')\sqrt{2}}{a}}.$$

D'un autre côté, pour des valeurs de t très peu différentes de l ou de l', l'équation (m) peut être remplacée par celle-ci :

$$a + \frac{a^2}{\mu} - z = \frac{a^2\sqrt{2}}{2\mu\sqrt{\pi\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{a}{l'}} e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}};$$

pour qu'elle coïncide avec la précédente, il faudra donc et il suffira qu'on ait

$$\mu = \frac{a(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{\pi\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{a}{l'}} e^{\frac{l'\sqrt{2}}{a}};$$

ce qui fait déjà connaître le rayon de courbure μ.

Si l'on met dans la première équation (i), au lieu de $\mathcal{C}$, sa valeur, et qu'on y fasse $\cos\omega = 1$, il vient

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{2a}{\mu} = 1 - \int_0^a \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}.$$

On peut négliger la partie de cette intégrale qui répond aux points de la surface où le plan tangent est très peu incliné; dans l'autre partie, on peut aussi mettre simplement l' au lieu de t; elle s'é-

tendra ensuite depuis $z = 0$ jusqu'à une valeur de z très peu différente de a, telle que $z = a$, par exemple ; et comme on a dans cette seconde partie, à très peu près,

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = -\frac{(a-z)}{a^2}\sqrt{2a^2-(a-z)^2},$$

il en résultera

$$\int_0^{\alpha} \frac{\frac{dz}{dt}dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = -\frac{a}{3l'}(2\sqrt{2}-1).$$

On aura donc

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{2\alpha}{\mu} = 1+\frac{a}{3l'}(2\sqrt{2}-1);$$

d'où l'on tire

$$\alpha = a-\frac{a^2}{\mu}+\frac{a^3}{6l'}(2\sqrt{2}-1),$$

pour la valeur approchée de α.

On aura de même, à très peu près,

$$\int_0^{-\alpha'} \frac{\frac{dz}{dt}dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = \frac{a}{3l'}-\frac{1}{3l'a^2}[2a^3-(\alpha+\alpha')^3]^{\frac{3}{2}};$$

et si l'on ajoute, membre à membre, les deux équations (i), on en conclura

$$\frac{k}{a^2}+\frac{2k}{\mu} = 1+\cos\omega'+\frac{2a\sqrt{2}}{3l'}-\frac{1}{3l'a^2}(2a^3-k^3)^{\frac{3}{2}};$$

ce qui donne

$$k = a\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\omega'-\frac{a^2}{\mu}+\frac{a^2}{3l'\cos\frac{1}{2}\omega'}\left(1-\sin^2\frac{1}{2}\omega'\right), \qquad (o)$$

pour l'expression de la hauteur de la goutte.

Si l'on a mesuré directement le diamètre de la goutte, on en prendra

la moitié pour la valeur de l; quand son poids ou son volume sera donné, on en déduira l au moyen de la seconde équation (θ), ou, plus simplement, au moyen de celle qu'on obtient en retranchant les équations (g) l'une de l'autre; ce qui donne

$$\pi\left(k+\frac{a^2}{\mu}\right)r'^2=v+\pi a^2 r'\sin\omega',$$

en appelant v le volume de la goutte, faisant $r=0$, et mettant pour $\mathcal{C}$ sa valeur: r' est ici la valeur de t qui répond à $z=-a'$, en sorte que l'on a, à très peu près,

$$r'=l+a\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega'-a-\frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{\left(1+\sin\frac{1}{2}\omega'\right)}{(1+\sqrt{2})\cos\frac{1}{2}\omega'}.$$

L'équation précédente devient aussi, à très peu près,

$$\pi r'^2 a\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\omega'=v+\pi a^2 r'\left[\sin\omega'-\frac{1}{3\cos\frac{1}{2}\omega'}\left(1-\sin^3\tfrac{1}{2}\omega'\right)\right], \quad (p)$$

en vertu de la formule (o). Elle donnera la valeur de r', et, par suite, celle de l, lorsque les valeurs numériques de v, ω', a, seront connues.

(108). M. Gay-Lussac a trouvé

$$k=3^{mm},378,$$

pour la hauteur d'une goutte de mercure posée sur un plan de verre; le rayon étant

$$l=50^{mm},$$

et la température 12°,8. D'après le n° 75, on a

$$a^2\cos\omega^2=4,5746,$$

à cette même température, en prenant le millimètre pour unité. Si donc on réduit d'abord la formule (o) à son premier terme, on aura

$$(3,378)^2\cos\omega'=(4,5746)(1+\cos\omega');$$

ce qui donne

$$\omega'=48°.$$

On aura, en même temps,

$$a = 2{,}6146, \quad l' = 51{,}083;$$

et, à cause de l'exponentielle $e^{-\frac{l'\sqrt{2}}{a}}$, la quantité $\frac{1}{\mu^6}$ sera tout-à-fait insensible. Cela étant, si l'on supprime le deuxième terme de la formule (*o*), et que l'on mette dans le troisième ces valeurs approchées de ω', l', a, on aura

$$(3{,}778)^2 \cos\omega' = (4{,}5746)(1 + \cos\omega') + (0{,}3098)\cos\omega';$$

d'où l'on tire

$$\omega' = 45^\circ\ 30',$$

pour la valeur de ω' à laquelle on pourra s'arrêter.

Il résulte de là qu'en faisant $\cos\omega' = b$, nous aurons, à la température ordinaire,

$$a^2 = (6{,}5262) \text{ millimètres carrés}, \quad b = 0{,}70091,$$

pour les valeurs des deux constantes qui entrent dans les différentes formules de l'action capillaire; l'une relative à la matière du mercure non oxidé, et l'autre à son contact avec le verre, ou plutôt avec la couche d'eau qui est toujours adhérente à la surface du verre (n° 75). Ces valeurs diffèrent un peu de celles de la *Mécanique céleste*, qui satisfont moins exactement à l'observation de M. Gay-Lussac; car elles donnent $3^{mm},396$ (*), au lieu de $3^{mm},378$, pour la hauteur de la goutte d'un décimètre de diamètre.

(109). Voici les poids et les hauteurs de plusieurs autres gouttes de mercure que M. Gay-Lussac a aussi déterminées, et qu'il a bien voulu me communiquer.

Poids en grammes.	Hauteurs en millimètres.
6,013	3,34
3,370	3,29
2,865	3,25
2,147	3,20

(*) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire*, page 66.

Poids en grammes.	Hauteurs en millimètres.
1,187	2,95
0,813	2,80
0,667	2,71
0,307	2,32
0,233	2,19
0,095	1,78
0,059	1,60
0,031	1,38.

Dans toutes ces mesures, faites à la température ordinaire, M. Gay-Lussac a remarqué que l'angle compris entre la surface inférieure de la goutte et son image dans le verre qui la supporte, était très sensiblement un angle droit; ce qui donnerait $\omega' = 45°$.

Ces hauteurs croissent de moins en moins à mesure que les poids, et, par conséquent, les largeurs deviennent plus considérables; mais la formule (o) montre de plus que quand le diamètre est devenu très grand, les hauteurs finissent par décroître avant de parvenir à une grandeur constante, qui sera exprimée par le premier terme de cette formule. Dans le cas du mercure, cette hauteur extrême est $3^{mm},3318$: ce serait la hauteur d'une goutte de ce liquide dont on regarderait le diamètre comme infini.

Si l'on veut appliquer les formules du n° 107 à la première de ces mesures, il faudra prendre

$$v = \frac{770.6013}{10435} = 444,07,$$

pour le volume de la goutte, exprimé en millimètres cubes. Au moyen de cette valeur et de celles de a et b ou $\cos\omega'$, l'équation (p) donne

$$r' = 6^{mm},8687.$$

On aura ensuite

$$l = 7^{mm},1097, \qquad \mu = 16^{mm},14,$$

pour le demi-diamètre et le rayon de courbure de la goutte; et si l'on

calcule sa hauteur au moyen de la formule (*o*), on trouve

$$k = 3^{mm},1996.$$

La différence avec l'observation, qui s'élève à $0^{mm},2$, peut être attribuée au calcul d'approximation.

La formule (*o*) serait tout-à-fait en défaut si l'on en faisait l'application aux hauteurs des autres gouttes; et déjà elle ne donne que $2^{mm},33$, au lieu de $3^{mm},29$, pour la hauteur de la goutte dont le poids est $3^{g},37$. Toutefois, les plus petites gouttes ne le sont point encore assez pour qu'on puisse recourir à la formule (*h*); car celle-ci ne donne que $1^{mm},28$, au lieu de $1^{mm},38$, pour la hauteur de la plus petite goutte, dont le poids est $0^{g},031$.

(110). L'analyse précédente peut aussi servir à déterminer l'élévation ou la dépression d'un liquide dans un tube vertical et cylindrique, dont le diamètre n'est plus très petit, comme on le supposait dans le chapitre IV, et est, au contraire, très grand par rapport à la constante a relative à la matière du liquide.

Si l'on compte les z positives à partir du niveau extérieur du liquide, et toujours en sens contraire de la pesanteur, la constante $\mathfrak{C}$ sera nulle; et en appelant h l'ordonnée du point où la surface du liquide coupe l'axe du tube, et γ le rayon de courbure en ce point, considéré comme positif ou comme négatif, selon que le liquide sera concave ou convexe, on aura

$$h = \frac{a^2}{\gamma}.$$

On mettra h et $-\gamma$ à la place de α et μ dans les équations (*l*) et (*m*); la dernière, dont nous aurons seulement besoin, deviendra

$$z = \frac{a^2}{\gamma\sqrt{2\pi\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{a}{t}}\,e^{\frac{t\sqrt{2}}{a}};$$

elle appartient, comme on a vu, aux points de la surface pour lesquels t est très grand par rapport à a, et où, cependant, le plan tangent est très peu incliné. A l'égard des points situés entre ceux-ci et

le tube, on emploiera l'équation (k), qui deviendra

$$1-\frac{(z^2-h^2)}{a^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}-\int\frac{\frac{dz}{dt}dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}},\qquad (q)$$

en faisant commencer l'intégrale à $z=h$, et observant qu'on a $\frac{dz}{dt}=0$ pour cette valeur de z. Cette intégrale sera une quantité très petite, que nous négligerons, ainsi que le terme divisé par γ^2, en intégrant cette équation. On aura alors

$$a^2-z^2=\frac{a^2}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}.$$

Le radical est positif dans toute l'étendue de la surface; on a donc $z^2<a^2$; on aura aussi

$$dt=\frac{(a^2-z^2)dz}{z\sqrt{2a^2-z^2}};$$

et comme dz est de même signe que z, et que dt est positif, il faudra, par conséquent, regarder comme positif ce nouveau radical. En intégrant, il vient

$$t=l+\sqrt{2a^2-z^2}-\sqrt{2a^2-c^2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{(a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-c^2})z}{(a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-z^2})c};$$

l étant le demi-diamètre du tube, et c la valeur de z qui répond à $t=l$, laquelle sera de même signe que z. Pour les points dont l'ordonnée z est très petite par rapport à a, cette équation donnera

$$z=\frac{2ac\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-c^2}}\,e^{\frac{(t-l')\sqrt{2}}{a}},$$

en négligeant le carré de z, et faisant, pour abréger,

$$l'=l+\sqrt{2a^2}-\sqrt{2a^2-c^2}.$$

Cela posé, si l'on compare cette expression de z à la précédente,

appliquée aux points qui répondent à des valeurs de t très peu différentes de l ou de l', on en conclura

$$\gamma = \frac{a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-c^2}}{4\sqrt{\pi\sqrt{2}}}\,\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a}{l}}\,e^{\frac{l'\sqrt{2}}{a}},$$

et, par conséquent,

$$h = \frac{4\sqrt{\pi\sqrt{2}}\,c\sqrt{al}}{a\sqrt{2}+\sqrt{2a^2-c^2}}\,e^{-\frac{l'\sqrt{2}}{a}}.$$

Il restera à déterminer la valeur de c. Or, si l'on appelle ω l'angle relatif à la matière du liquide et du tube, c'est-à-dire l'angle compris entre les normales à leurs surfaces, obtus ou aigu, selon que le liquide s'élève ou s'abaisse, on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = \sin\omega,$$

pour la valeur particulière $t = l$, à laquelle cet angle répond. En faisant donc $t = l$ et $z = c$ dans l'équation (q), il en résultera

$$1-\frac{c^2}{a^2} = \sin\omega - \int_h^c \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}},$$

en continuant de négliger h^2, à cause de son diviseur γ^2. On négligera aussi la partie de cette intégrale qui répond aux points où le plan tangent est très peu incliné; dans l'autre partie, on fera simplement $t = l'$; et comme on a

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = \frac{z}{a^2}\sqrt{2a^2-z^2},$$

il en résultera

$$\int_h^c \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{a}{l'} - \frac{1}{3a^2l'}\,(2a^2-c^2)^{\frac{3}{2}},$$

en négligeant h^3. On aura donc

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \sin\omega - \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{l'} + \frac{1}{3a^2l'}(2a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}};$$

et en faisant

$$\omega = \frac{1}{2}\pi + 2\theta,$$

et négligeant les termes divisés par l^2, on en déduit

$$c = a\sqrt{2}\sin\theta + \frac{a^2}{3l\sin\theta}(1 - \cos^3\theta). \qquad (r)$$

Cette valeur de c sera de même signe que θ, c'est-à-dire positive ou négative, selon que ω sera obtus ou aigu. Son premier terme coïncide, comme cela doit être, avec l'élévation du liquide le long d'un plan vertical, qui a été désigné par l dans le n° 91. Il suffira de le substituer dans l'expression de h, qui deviendra

$$h = \frac{4\sqrt{\pi\sqrt{2}\sqrt{al'}\sin\theta}}{1+\cos\theta}\, e^{-\frac{l'\sqrt{2}}{a}}; \qquad (s)$$

et l'on aura, en même temps,

$$l' = l + (1 - \cos\theta)\, a\sqrt{2}.$$

(111). Dans le cas du mercure et d'un tube de verre, on aura

$$\theta = -22^\circ 15', \qquad a = 2^{mm},5546,$$

et la formule (r), réduite à son premier terme, donnera

$$c = -1^{mm},3680.$$

Abstraction faite du signe, ce sera la hauteur de la partie sensiblement plane du mercure contenu dans un vase cylindrique et vertical, d'un diamètre extrêmement grand par rapport à a, au-dessus de l'intersection de sa surface avec la paroi du vase. M. Gay-Lussac a trouvé $1^m,455$ pour cette hauteur; la petite différence $0^{mm},087$ peut être due, en partie, au second terme de la formule (r) que nous avons négligé, faute de connaître le diamètre du vase, ou la valeur de $2l$.

Dans le cas d'un tube préalablement mouillé par le liquide qu'il

contient, on aura

$$\omega = 180°, \qquad \theta = 45°,$$

et la formule (r) deviendra

$$c = a + \frac{1}{6}(2\sqrt{2} - 1)\frac{a^2}{l}.$$

Elle exprimera la hauteur à laquelle le liquide s'élève, au-dessus de son niveau naturel, le long des parois verticales d'un tube ou d'un vase dont le demi-diamètre est supposé très grand par rapport à a. Si le liquide déborde le vase, cette valeur de c exprimera aussi la plus grande hauteur à laquelle le liquide pourra s'élever au-dessus du bord supérieur, en prenant pour l le rayon de la surface extérieure du vase. Comme l'exponentielle contenue dans la formule (s) décroît beaucoup plus rapidement que le second terme de la formule (r), à mesure que l augmente de plus en plus, il en résulte que la courbure du vase peut encore influer sensiblement sur l'élévation du liquide près de sa paroi, et n'avoir plus aucune influence appreciable sur la partie centrale du liquide. Dans le cas de l'eau, la valeur précédente de c, réduite à son premier terme, s'élève à près de 4 millimètres.

Pour comparer la formule (s) à l'observation, je prends la hauteur de l'alcohol dans un tube mouillé de ce liquide et dont le rayon était

$$l = 5^{mm},254.$$

A la température de 16°, et la densité du liquide étant 0,813467 de celle de l'eau, M. Gay-Lussac a trouvé

$$h = 0^{mm},3835,$$

pour l'élévation du point le plus bas au-dessus du niveau extérieur. Or, dans un tube capillaire préalablement humecté, et dont le rayon est $0^{mm},6472$, M. Gay-Lussac a aussi trouvé que le même alcohol s'élève à une hauteur de $9^{mm},1823$. En mettant ces valeurs à la place de a et h dans la formule du n° 56, on en conclut

$$a = 2^{mm},4635,$$

pour la constante relative à cet alcohol. Je substitue cette valeur et

celle de l dans la formule (s); j'y fais en même temps

$$\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

il en résulte d'abord

$$l' = 6^{mm},274,$$

et ensuite

$$h = 0^{mm},3744;$$

ce qui ne diffère pas de l'observation de $0^{mm},01$.

(112). Maintenant, supposons, comme dans le n° 83, qu'un disque circulaire horizontal et suspendu au plateau d'une balance, soit d'abord mis en contact avec un liquide, et qu'on le soulève ensuite graduellement, en augmentant, par de petites parties, le poids placé dans l'autre plateau. Le liquide s'élèvera en même temps, jusqu'à une certaine hauteur, pour laquelle il se détachera du disque, et reprendra son niveau naturel. Désignons par Δ l'excès du poids placé dans le second plateau, sur le poids du disque, quand la base du disque est à une hauteur k au-dessus du niveau du liquide. Si le disque n'est aucunement plongé dans le liquide, et que leur surface de contact soit la base entière du disque, nous aurons, d'après l'équation (8) du numéro cité,

$$\Delta = \pi g\rho k r^2 - \pi g\rho r a^2 \cos(i+\omega); \qquad (1)$$

r étant le rayon du disque, $\pi g\rho k r^2$ le poids d'un cylindre du liquide qui a pour base celle du disque et k pour hauteur, a^2 la constante relative à la matière du liquide, et ω l'angle donné qui dépend de cette matière et de celle du disque. Quant à l'angle i, il exprime l'inclinaison sur un plan horizontal de la normale OK (fig. 21), à la surface DOB de l'arête vive qui termine la base du disque, laquelle normale est menée de dehors en dedans du disque par un point O du contour supérieur du liquide. Il est le même pour tous les points O de ce contour; mais quoique la courbe DOB soit extrêmement petite, et que le rayon r du point O puisse être regardé comme constant dans toute l'étendue de DOB, cependant, l'angle i varie depuis zéro jusqu'à 90°, avec la position du point O sur cette courbe : il est zéro, lorsque le point O atteint ou surpasse son ex-

trémité supérieure D, c'est-à-dire lorsque le liquide s'étend jusqu'à la partie cylindrique et verticale de la surface du disque; il est un angle droit, quand le point O coïncide avec l'extrémité inférieure B de l'arète vive, ou bien encore, si le liquide se terminait à la base du disque, en-deçà de sa circonférence, auquel cas le rayon r pourrait avoir une grandeur quelconque, moindre que le rayon de cette circonférence. L'angle ω, au contraire, ne variera pas avec la position de O; ce sera l'angle KON, en supposant que ON soit la normale extérieure à la surface latérale AO du liquide; il pourra être aigu ou obtus, selon la matière du liquide et du disque : on aura toujours $\omega = \pi$, quand le disque aura été préalablement mouillé par le liquide.

La surface latérale du liquide sera une surface de révolution, asymptotique de son niveau naturel FG, et ayant pour axe la verticale CH menée par le centre C de la base du disque. Si l'angle ω est aigu, comme dans le cas du mercure et d'un disque de verre, le liquide sera convexe, tant qu'il s'élèvera au-dessus du point D de l'arète vive. Dès qu'en soulevant le disque cette arète atteindra la surface du liquide, l'angle $\omega + i$ augmentant, la convexité du liquide diminuera de plus en plus; sa surface sera plane et la même que son niveau naturel, lorsque $i + \omega$ sera un angle droit, ou i complément de ω. Le disque continuant de s'élever, et l'angle i d'augmenter, le liquide deviendra concave, et sa concavité augmentera de plus en plus, jusqu'à ce que le point B de l'arète vive ait atteint la surface latérale du liquide, et que i soit devenu un angle droit. Cette surface, dans le cas de ω aigu, tournera sa convexité ou sa concavité par en haut, dans toute son étendue, et son rayon croîtra continuellement depuis la base du disque jusqu'au niveau du liquide. Dans le cas de ω obtus, le liquide sera toujours concave; la courbe OA tournera sa concavité par en haut, et son rayon croîtra depuis le disque jusqu'au niveau du liquide, tant que le liquide sera au-dessus de l'extrémité supérieure D de l'arète vive; il en sera encore de même lorsqu'en soulevant le disque, l'arète vive aura atteint la surface du liquide, et que cependant $i + \omega$ sera moindre que π; mais dès que $i + \omega$ aura dépassé deux angles droits, il se formera un rétrécissement de la surface latérale du liquide. La courbe OA tour-

nera sa concavité par en bas, depuis son extrémité supérieure O jusqu'en un certain point M, et par en haut, depuis M jusqu'au niveau du liquide; et le plus petit rayon de cette surface aura lieu au point M.

Cela posé, il s'agira de déterminer, pour un angle donné i, la valeur de k, et par suite celle du poids Δ dont le *maximum* répondra à l'instant où le liquide se détachera du disque.

(113). Pour cela, reprenons l'équation de la surface capillaire de révolution, ou de sa génératrice, savoir :

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(1+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}}{\left(1+\frac{dz^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2z}{a^2}, \qquad (2)$$

dans laquelle t exprimera la distance d'un point quelconque de la courbe AO à l'axe CH, et z la distance de ce même point au plan FG, positive ou négative, selon que la courbe AO sera située au-dessus ou au-dessous de ce plan. D'après la règle suivant laquelle on doit déterminer le signe du radical $\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}$ (n° 49), il sera positif dans toute l'étendue de cette courbe, excepté depuis O jusqu'à M, quand ce point M existera, ou, autrement dit, il sera constamment de signe contraire à dt, en regardant dz comme étant de même signe que z. Au point O, qui répond à $t=r$ et $z=k$, on aura, en outre,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}=\sin(i+\omega), \qquad \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}=\cos(i+\omega);$$

par conséquent, l'équation (2) pourra être remplacée par l'une ou l'autre de celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}-\sin(i+\omega)+\frac{z^2-k^2}{a^2}=\int\frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}},\\&\frac{t\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}-r\cos(i+\omega)=\frac{2}{a^2}\int zt\,dt,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

en supposant que les intégrales contenues dans leurs seconds membres s'évanouissent quand $z = k$ ou $t = r$.

Je supposerai que le rayon r du disque soit très grand par rapport à la constante a relative à la matière du liquide; la variable t sera aussi très grande; et, cela étant, je ferai usage de la première équation (3). Si l'on y fait

$$i + \omega = \frac{1}{2}\pi + 2\nu,$$

et si l'on observe qu'on a en même temps $t = \infty$, $z = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$, il en résultera

$$2\sin^2\nu - \frac{k^2}{a^2} = \int_k^0 \frac{\frac{dz}{dt}\,dz}{t\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}, \qquad (4)$$

pour l'équation d'où dépendra la valeur de k.

Dans une première approximation, je néglige son second membre et celui de la première équation (3). En retranchant l'une de l'autre, on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} - 1 + \frac{z^2}{a^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = -\frac{z}{a^2}\sqrt{2a^2 - z^2}, \qquad dt = \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{z\sqrt{2a^2 - z^2}},$$

en regardant le radical $\sqrt{2a^2 - z^2}$ comme une quantité positive. La valeur de t qui résultera de l'intégration pourra s'écrire ainsi :

$$t = t' + \zeta,$$

en faisant, pour abréger,

$$r - \frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{z}{k} = t',$$

$$\sqrt{2a^2 - k^2} - \sqrt{2a^2 - z^2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - z^2}}{a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - k^2}} = \zeta,$$

et observant que $t = r$ quand $z = k$.

On aura, en même temps,

$$k = a\sqrt{2}\sin v.$$

Le *maximum* de cette quantité répondra à $i = \frac{1}{2}\pi$ et sera égal à $a\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\omega$. Le point M répondant à $\frac{dz}{dt} = \infty$, a sera son ordonnée. Pour que ce point existe, il suffira et il sera nécessaire qu'elle soit moindre que la valeur de k; ce qui aura lieu lorsque l'angle ω sera obtus, ainsi que nous l'avons dit précédemment. En appelant δ la distance du point M à la base du disque, quand elle est le plus élevée, on aura

$$\delta = a\left(\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega - 1\right).$$

Soit aussi $r - r'$ sa distance à l'axe CH, ou la valeur de t qui répond à $z = a$ et $k = a\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\omega$; il en résultera

$$r' = a\left(1 - \sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\omega\right) - \frac{a}{\sqrt{2}}\log\frac{(1+\sqrt{2})\sin\frac{1}{2}\omega}{1+\cos\frac{1}{2}\omega},$$

pour le rétrécissement du liquide au point M. Lorsque le disque a été préalablement mouillé par le liquide, on a $\omega = \pi$, et simplement

$$\delta = a(\sqrt{2}-1), \qquad r' = a - \frac{a}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$$

S'il s'agit de l'eau, par exemple, ces quantités seront

$$\delta = 1^{mm},6108, \qquad r' = 1^{mm},6421,$$

d'après la valeur de a du n° 56.

Ces expressions de k, δ, r', sont celles qui auraient lieu à la limite où le rayon r du disque serait considéré comme infini; mais pour comparer la formule (1) à l'expérience, il sera nécessaire d'y substituer une valeur plus approchée de k.

(114). En retranchant l'équation (4) de la première équation (5),

nous aurons, dans une seconde approximation,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}-1+\frac{z^2}{a^2}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{z\sqrt{2a^2-z^2}}{t'+\zeta}\,dz;$$

l'intégrale commençant avec z. En négligeant son carré, on déduira de cette équation

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}}=-\frac{z}{a^2}\sqrt{2a^2-z^2}-\frac{(a^2-z^2)}{a^2z\sqrt{2a^2-z^2}}\int\frac{z\sqrt{2a^2-z^2}}{t'+\zeta}\,dz;$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$\int\frac{z\sqrt{2a^2-z^2}}{t'+\zeta}\,dz=\mathrm{Z},$$

$$\int_0^k\frac{z\sqrt{2a^2-z^2}}{t'+\zeta}\,dz=\mathrm{K},$$

$$\int_0^k\frac{(a^2-z^2)\,\mathrm{Z}\,dz}{z(t'+\zeta)\sqrt{2a^2-z^2}}=\mathrm{K}',$$

l'équation (4) deviendra

$$k^2-2a^2\sin^2\nu+\mathrm{K}+\mathrm{K}'=0. \qquad (5)$$

La quantité ζ étant très petite par rapport à t', je développe sous les signes $\int$ suivant les puissances de ζ; ce qui donne

$$\mathrm{Z}=\frac{1}{3t'}\left[2a^3\sqrt{2}-(2a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right]+\text{etc.},$$

$$\mathrm{K}=-\frac{1}{3}\int_0^k\frac{1}{t'}d.(2a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-\int_0^k\frac{z\zeta}{t'^2}\sqrt{2a^2-z^2}\,dz+\text{etc.},$$

$$\mathrm{K}'=\frac{1}{3}\int_0^k\frac{(a^2-z^2)\left[2a^3\sqrt{2}-(2a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right]}{zt'^2\sqrt{2a^2-z^2}}\,dz+\text{etc.}$$

En intégrant par partie, de manière que l'intégrale s'évanouisse avec z, on a

$$\int\frac{1}{t'}d.(2a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{t'}\left[(2a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-2a^3\sqrt{2}\right]$$

$$-\frac{a}{t'^2\sqrt{2}}\int\left[(2a^2-z^2)^{\frac{3}{2}}-2a^3\sqrt{2}\right]\frac{dz}{z}+\text{etc.}$$

J'opère de même sur les autres intégrales contenues dans K et K'; je fais ensuite $z = k$ et $t' = r$, puis je néglige les termes divisés par r^3 : il en résulte

$$K = \frac{1}{3r}\left[2a^3\sqrt{2} - (2a^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$- \frac{a\sqrt{2}}{6r^2}\int_0^k \left[2a^3\sqrt{2} - (2a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{dz}{z} - \frac{1}{r^2}\int_0^k \zeta z\sqrt{2a^2 - z^2}\,dz,$$

$$K' = \frac{1}{3r^2}\int_0^k \frac{(a^2 - z^2)\left[2a^3\sqrt{2} - (2a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}\right]}{z\sqrt{2a^2 - z^2}}\,dz.$$

D'après la valeur de ζ, on a

$$\int_0^k \zeta z\sqrt{2a^2 - z^2}\,dz = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}\sqrt{2a^2 - k^2} - \frac{4a^4}{3} + \frac{a^2k^2}{3} - \frac{1}{12}k^4$$
$$+ \frac{a\sqrt{2}}{6}\int_0^k \frac{\left[2a^3\sqrt{2} - (2a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}\right]z\,dz}{(a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - z^2})\sqrt{2a^2 - z^2}}.$$

Après avoir substitué cette expression dans celle de K, si l'on ajoute les valeurs de K et K', on trouve que les termes divisés par r^2 se détruisent, et l'on a simplement

$$K + K' = \frac{1}{3r}\left[2a^3\sqrt{2} - (2a^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

L'équation (5) devient donc

$$k^2 - 2a^2\sin^2 v + \frac{1}{3r}\left[2a^3\sqrt{2} - (2a^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}\right] = 0,$$

et l'on peut la remplacer par celle-ci :

$$k^2 = 2a^2\sin^2 v - \frac{2a^3\sqrt{2}}{3r}(1 - \cos^3 v)\left(1 - \frac{a\sqrt{2}\cos v}{2r}\right), \qquad (6)$$

à cause que l'on néglige les termes divisés par r^3.

(115). Pour chaque valeur de l'angle v, cette équation fera connaître la valeur de k qu'il s'agissait d'obtenir. Le rayon r étant très grand par rapport à a, le *maximum* de k, relativement à l'angle i, répondra à la plus grande valeur de v, laquelle a lieu quand $i = \frac{1}{2}\pi$;

par conséquent, on obtiendra ce *maximum* en faisant $\nu = \frac{1}{2}\omega$ dans l'équation précédente.

La plus grande valeur de Δ aura aussi lieu quand $i = \frac{1}{2}\pi$; c'est donc à l'instant où son extrémité supérieure O atteint l'extrémité inférieure B de l'arête vive qui termine le disque, que le liquide commence à se détacher. Si l'on appelle p la valeur correspondante de Δ, et m le poids d'un centimètre cube du liquide, on aura, d'après l'équation (1),

$$p = \pi m k r^2 + \pi m a^2 r \sin \omega ; \qquad (7)$$

formule qui suppose les lignes a, r, k, exprimées en centimètres, et dans laquelle on mettra pour k sa valeur *maxima*, déterminée comme on vient de le dire.

Si le disque a été préalablement mouillé dans toute son étendue par le liquide, en sorte qu'on ait $\omega = \pi$, le second terme de cette formule s'évanouira, et le poids p, qui est celui du liquide soulevé au-dessus de son niveau naturel, sera le poids d'un cylindre du même liquide qui aurait pour base celle du disque, et pour hauteur l'élévation du disque au-dessus de ce niveau; ce qui tient à ce que le volume du liquide soulevé qui est situé en-dehors de ce cylindre, compense exactement le rétrécissement du liquide situé au-dessous du disque. Dans ce même cas, l'équation (6) donne

$$k = a\sqrt{2} - \frac{a^2}{3r}, \qquad (8)$$

en négligeant toujours les termes divisés par r^2, et la formule (7) devient

$$p = \pi m \left(a r^2 \sqrt{2} - \frac{a^2 r}{3} \right). \qquad (9)$$

(116). Appliquons maintenant ces différentes formules aux expériences de M. Gay-Lussac qui sont citées dans la *Mécanique céleste*. Elles ont toutes été faites avec un disque dont le rayon était

$$r = 5^{cm},9183,$$

et à une température d'à peu près 8°,5. L'auteur a vérifié que la

matière du disque n'a aucune influence, quand il a été préalablement mouillé par le liquide.

Dans le cas de l'eau, on a

$$a = 0^{cm},38888,$$

et l'on peut prendre un gramme pour m, à cause que la température s'écarte peu de celle du *maximum* de densité. La formule (9) donne alors

$$p = 59^{g},568,$$

et, suivant l'observation, ce poids est $59^{g},40$.

M. Gay-Lussac a déterminé le poids p pour trois alcohols différens dont les densités étaient

$$0,81961, \quad 0,85950, \quad 0,94153;$$

celle de l'eau étant prise pour unité. Dans un tube capillaire dont le rayon α était

$$\alpha = 0^{cm},06472,$$

les hauteurs h auxquelles ces mêmes liquides se sont élevés au-dessus du niveau extérieur ont été

$$h = 0^{cm},91823, \quad h = 0^{cm},93008, \quad h = 0^{cm},99973.$$

Au moyen de la formule du n° 56, on en conclut

$$a = 0^{cm},24655, \quad a = 0^{cm},24827, \quad a = 0^{cm},25703,$$

pour les valeurs correspondantes de la constante a. Cela étant, on aura, d'après la formule (9),

$$p = 31^{g},137, \quad p = 32^{g},878, \quad p = 37^{g},273,$$

et l'observation a donné

$$p = 31^{g},08, \quad p = 32,87, \quad p = 37^{g},15.$$

De l'huile de térébenthine, dont la densité était 0,86946 de celle de l'eau, s'est élevée dans le tube du rayon α à une hauteur h au-dessus de son niveau, égale à $0^{cm},99516$. Il en résulte, d'après la formule du n° 56,

$$a = 0^{cm},25645.$$

En vertu de la formule (9), on aura

$$p = 34^{g},343,$$

et, suivant l'observation, ce poids est $34^{g},104$.

Dans ces cinq expériences, la valeur de p observée s'accorde, comme on voit, d'une manière très satisfaisante avec sa valeur calculée; cependant, on peut remarquer que celle-ci surpasse toujours un peu l'autre; ce qui semblerait indiquer que les différens liquides se sont détachés du disque un peu avant que le poids que j'ai appelé Δ ait atteint son *maximum* p: et, en effet, on conçoit que l'équilibre de chaque liquide étant très peu stable près de ce *maximum*, des causes accidentelles, par exemple, de légères agitations, peuvent facilement en amener la rupture.

Quoique les hauteurs *maxima* du disque n'aient pas été mesurées, il est bon d'en donner les valeurs déduites de la formule (8). Dans l'ordre des cinq expériences, ces valeurs sont

$$k = 0^{cm},54143,$$
$$k = 0^{cm},34524,$$
$$k = 0^{cm},34763,$$
$$k = 0^{cm},35977,$$
$$k = 0^{cm},35897.$$

Relativement au mercure non oxidé, en contact avec un disque de verre ou d'une autre matière, pourvu que ce disque soit recouvert d'une couche d'humidité aussi mince qu'on voudra, on a (n° 108)

$$a = 0^{cm},25547, \qquad \nu = \frac{1}{2}\omega = 22°45'.$$

Au moyen de ces valeurs et de celle de r, l'équation (6) donne

$$k = 0^{cm},13773,$$

pour l'élévation du disque à l'instant où le liquide commence à s'en détacher. Pour calculer le poids correspondant p, exprimé en grammes, on prendra

$$m = \frac{10449}{770},$$

à la température de 8°,5; et, en vertu de la formule (7), on aura

$$p = 222^{g},464.$$

Avec le même disque, d'un rayon égal à $5^{cm},9183$, M. Gay-Lussac n'a pas trouvé constamment la même valeur de p. En faisant croître très lentement le poids employé à soulever le disque, le poids total, à l'instant de la séparation du liquide, s'est élevé depuis 158 grammes jusqu'à 296 grammes. Les valeurs de p moindres que le *maximum* donné par le calcul, peuvent s'expliquer par l'instabilité de l'équilibre du mercure. Quant à celles qui sont plus grandes, on peut les attribuer à la même cause qui donne lieu à des élévations ou des dépressions très différentes dans un tube capillaire, excepté lorsqu'il a été préalablement mouillé par le liquide, ou bien, lorsqu'il n'exerce aucune attraction sur la matière du liquide (n° 62). Il est possible, en effet, qu'à raison des irrégularités de l'arête vive qui termine la base du disque, l'angle i, au lieu d'être droit, comme nous l'avons supposé, à l'extrémité inférieure de cette arête, soit obtus dans une partie de son contour; ce qui augmenterait le *maximum* de la quantité Δ déterminée par la formule (1).

D'après la remarque de M. Dulong (n° 75), l'angle ω augmente et peut même devenir obtus, quand le mercure renferme une petite proportion d'oxide. Le *maximum* de Δ augmenterait en même temps; et il suffirait que, pour cette cause, l'angle ω fût de 60° pour que ce *maximum* atteignît le plus grand poids observé par M. Gay-Lussac.

(117). Si l'on remplace le disque par un cylindre vertical d'un très petit diamètre, l'équation (1) fera encore connaître le poids Δ qui répond à une hauteur k de la base du cylindre au-dessus du niveau du liquide; mais l'expression de k en fonction de l'angle i, ne sera plus la même que précédemment, et sa détermination sera plus difficile.

Nous supposerons le rayon r du cylindre très petit par rapport à la constante a; et, pour de semblables valeurs de t, nous emploierons la seconde équation (3), dont nous négligerons le second membre, dans une première approximation. On en déduira

alors

$$z = k + r\cos\varphi \log \frac{t + \sqrt{t^2 - r^2\cos^2\varphi}}{(1+\sin\varphi)r}, \qquad (10)$$

en faisant $i + \omega = \varphi$, et observant qu'on a $z = k$ quand $t = r$. On pourra, si l'on veut, pousser plus loin l'approximation; mais nous nous arrêterons à cette valeur de z; et l'équation (10) sera celle de la surface du liquide près du cylindre.

A la distance où le plan tangent est très peu incliné, on réduira l'équation (2) à la forme linéaire, savoir :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} = \frac{2z}{a^2}. \qquad (11)$$

Pour y satisfaire par une valeur de z qui devienne insensible pour de grandes valeurs de t, on prendra

$$z = \alpha \int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}};$$

e étant la base des logarithmes népériens, et α une constante arbitraire. On aura, en effet,

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\alpha\sqrt{2}}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} d\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2z}{a^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} + \frac{2\alpha}{a^2}\int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}};$$

en intégrant par partie, on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} \cdot \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{a}{t\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} d\theta;$$

au moyen de quoi les valeurs de z, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, rendent identique l'équation (11). D'après la manière dont nous avons déjà satisfait à cette même équation (n° 107), on peut remarquer que son intégrale complète est

$$z = \alpha \int_0^\infty e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\sqrt{1+\theta^2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} + \mathcal{C} \int_0^\pi e^{-\frac{t\sqrt{2}}{a}\cos\psi} d\psi ;$$

α et $\mathcal{C}$ désignant les deux constantes arbitraires. En faisant

$$\sqrt{1+\theta^2} = x - \theta, \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{dx}{x},$$

et observant que les limites $\theta = 0$ et $\theta = \infty$, répondent à $x = 1$ et $x = \infty$, l'intégrale particulière dont nous voulons faire usage deviendra plus simplement

$$z = \alpha \int_1^\infty e^{-\frac{t}{a\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{x}. \qquad (12)$$

Les équations (10) et (12) représenteront la courbe OA du liquide dans toute son étendue; elles devront coïncider pour des valeurs de t très petites par rapport à a, comme le suppose l'équation (10), et cependant très grandes par rapport à r, afin que la tangente à la courbe OA soit très peu inclinée, ainsi que l'exige l'équation (12). C'est d'après cette condition que nous allons déterminer les deux constantes k et α contenues dans ces formules.

(118). Si nous faisons

$$t = ua\sqrt{2},$$

l'équation (12) pourra s'écrire ainsi :

$$z = \alpha \int_1^\infty e^{-ux} e^{-\frac{u}{x}} \frac{dx}{x}.$$

La fraction $\frac{u}{x}$ étant très petite dans toute l'étendue de cette intégrale, on pourra développer, en série convergente, la seconde exponentielle contenue sous le signe $\int$; on aura, de cette manière,

$$z = \alpha\left(\int_1^\infty e^{-ux}\frac{dx}{x} - u\int_1^\infty e^{-ux}\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}u^2\int_1^\infty e^{-ux}\frac{dx}{x^3} - \text{etc.}\right).$$

Par des intégrations par partie, on réduira toutes ces intégrales à la première; et si l'on fait

$$\int_1^\infty e^{-ux}\frac{dx}{x} = v,$$

il en résultera

$$z = \alpha v\left(1 + u^2 + \frac{1}{4}u^4 + \text{etc.}\right) - \alpha u e^{-u}.\left(1 - \frac{1}{4}u + \frac{5}{18}u^2 - \text{etc.}\right).$$

En différentiant v par rapport à u, on a

$$\frac{dv}{du} = -\int_1^\infty e^{-ux}dx = -\frac{1}{u}e^{-u};$$

d'où l'on tire

$$v + c + \log u = u - \frac{1}{1.2}\frac{u^2}{2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{u^3}{3} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{u^4}{4} + \text{etc.};$$

c étant une quantité indépendante de u. Plusieurs géomètres se sont occupés de l'intégrale v (*) et de la détermination de la constante c, dont la valeur a été calculée à un grand degré d'approximation. En se bornant à cinq décimales, on a

$$c = 0{,}57721.$$

D'après cela, si l'on substitue la valeur de v dans celle de z, et que l'on néglige les termes multipliés par u, nous aurons

$$z = \alpha\left(\log\frac{a\sqrt{2}}{t} - c\right),$$

pour ce que devient la formule (12), relativement à des valeurs de t très petites par rapport à a.

D'un autre côté, ces mêmes valeurs de t étant très grandes, relativement à r, on a, d'après la formule (10),

$$z = k + r\cos\varphi\log\frac{2t}{(1+\sin\varphi)r}.$$

En égalant ces deux valeurs de z, on aura donc

$$\alpha = -r\cos\varphi, \quad k - r\cos\varphi\log\tfrac{1}{2}(1+\sin\varphi)r = \alpha(\log a\sqrt{2} - c),$$

(*) *Traité des Différences et des Séries* de M. Lacroix, page 552. *Voyez* aussi, sur ce sujet, un très bon Mémoire de M. Soldner, imprimé à Munich en 1809, sous le titre de *Théorie et Tables d'une nouvelle fonction transcendante.*

et, par conséquent,

$$k = -r\cos\varphi\left(\log\frac{2a\sqrt{2}}{(1+\sin\varphi)\,r} - c\right). \quad (13)$$

En faisant $i = 0$ ou $\varphi = \omega$ dans cette formule, elle exprimera l'élévation ou la dépression d'un liquide le long d'un cylindre dont le diamètre est très petit; et l'on voit que cette quantité, contrairement à ce qui a lieu dans l'intérieur d'un tube capillaire, diminuera de plus en plus avec le diamètre. Lorsque le cylindre aura été préalablement mouillé par le liquide, on aura $\varphi = \pi$ et

$$k = r\left(\log\frac{2a\sqrt{2}}{r} - c\right).$$

Si l'on substitue la formule (13) à la place de k dans l'équation (1), on aura

$$\Delta = -\pi\rho g r\cos\varphi\left[r^2\left(\log\frac{2a\sqrt{2}}{(1+\sin\varphi)\,r} - c\right) + a^2\right].$$

A cause que r est supposé très petit par rapport à a, le *maximum* de cette quantité répondra à $\varphi = \pi$ ou $i = \pi - \omega$, lorsque l'angle ω sera obtus, et à $i = \frac{1}{2}\pi$, quand il sera aigu. Ainsi, dans le premier cas, le liquide se détachera du cylindre lorsque son extrémité O sera parvenue au point de l'arète DB, pour lequel l'angle i est supplément de l'angle donné ω; et, dans le second cas, il ne se détachera que quand le point O aura atteint l'extrémité inférieure B de cette arète.

Si le cylindre est mouillé par le liquide, c'est-à-dire si l'on a $\omega = \pi$, la valeur de i qui répond au *maximum* de Δ sera zéro; le liquide se détachera du cylindre dès que le point O atteindra l'extrémité supérieure D de l'arète DB; et si l'on appelle q ce *maximum*, ou le poids nécessaire pour séparer le cylindre du liquide, on aura

$$q = \pi m r\left[r^2\left(\log\frac{2a\sqrt{2}}{r} - c\right) + a^2\right], \quad (14)$$

en désignant par m le poids d'un centimètre cube du liquide, et supposant les lignes r et a exprimées en centimètres.

(119). Pour que ces différentes formules soient suffisamment approchées, il faudra que le rapport $\frac{r}{a}$ soit une fraction peu considérable. Voici deux expériences que M. Gay-Lussac a faites sur l'adhésion de l'eau à la base d'un cylindre vertical, dont la première satisfait beaucoup mieux que la seconde à cette condition.

Le diamètre du cylindre étant $0^{cm},268$, et la température 16°, il a trouvé pour le poids qui soulevait le cylindre à l'instant de la séparation du liquide, différentes valeurs comprises depuis $0^{g},066$ jusqu'à $0^{g},072$; en sorte qu'on peut prendre ce dernier nombre pour le *maximum* donné par l'expérience. Or, en faisant

$$r = 0^{cm},134, \qquad a = 0^{cm},38834,$$

dans la formule (14), elle donne

$$q = 0^{g},07499,$$

pour ce *maximum;* ce qui ne diffère que de $0^{g},003$.

Dans la seconde expérience, faite à la même température, le cylindre avait un diamètre de $0^{cm},578$. M. Gay-Lussac a jugé que le poids nécessaire pour le détacher de l'eau était compris entre $0^{g},230$ et $0^{g},235$. En mettant dans la formule (14) la valeur précédente de a, et $0^{cm},289$ au lieu de r, on trouve

$$q = 0^{g},1943;$$

résultat qui diffère de l'observation d'environ un sixième de l'inconnue; ce qu'on peut attribuer à ce que le rapport $\frac{r}{a}$, au lieu d'être très petit, s'élève à environ $\frac{3}{4}$.

(120). Occupons-nous maintenant d'un problème relatif à deux liquides en partie superposés, dont la solution n'avait pas encore été donnée, et qui présente une application particulière des principes de cette théorie.

Supposons qu'on ait versé sur un liquide, sur du mercure, par exemple, une large goutte d'un autre liquide; et proposons-nous de déterminer la figure de cette goutte et la surface du mercure.

J'appellerai, pour abréger, S la partie de cette surface qui n'est pas en contact avec la goutte, S′ la partie de la surface de la goutte non en contact avec le mercure, S_1 la portion de surface commune au mercure et à la goutte. Ces trois surfaces auront un même axe vertical; près de la goutte, S tournera sa convexité par en haut, et deviendra plane à une distance peu considérable; S_1 sera concave par en haut. Dans toute son étendue, la goutte sera convexe; elle tournera sa convexité par en bas depuis son contact avec le mercure jusqu'à sa plus grande section horizontale, et par en haut, depuis cette section jusqu'à son sommet.

Si l'on désigne par t la distance d'un point quelconque de l'une de ces surfaces à leur axe commun; que l'on compte les coordonnées verticales en sens contraire de la pesanteur et à partir du niveau du mercure, qui est la partie plane de S; et que l'on désigne par z, z_1, z', les ordonnées respectives d'un point quelconque de S, S_1, S′, leurs équations seront (n°s 29 et 30)

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H}\left[\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(1+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}\right]=\rho g z\left(1+\frac{dz^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}},\\
&\tfrac{1}{2}\,\mathrm{G}\left[\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(1+\frac{dz_1^2}{dt^2}\right)\frac{dz_1}{dt}\right]=[(\rho-\rho')gz_1+c]\left(1+\frac{dz_1^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}},\\
&\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H}'\left[\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(1+\frac{dz'^2}{dt^2}\right)\frac{dz'}{dt}\right]=(\rho' gz'-c)\left(1+\frac{dz'^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}};
\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

H et H′ étant les constantes relatives au mercure et à la matière de la goutte, G une troisième constante qui dépendra de la matière des deux liquides, ρ et ρ' leurs densités, c une constante arbitraire, et g la gravité. Les radicaux contenus dans les seconds membres des deux premières équations seront positifs; celui que renferme le second membre de la dernière sera positif dans la partie supérieure de la goutte, et négatif dans la partie inférieure; en sorte que si l'on représente par r le rayon de contour du S_1, et par l celui de la plus grande section horizontale de la goutte, ou son demi-diamètre, ce radical $\sqrt{1+\frac{dz'^2}{dt^2}}$ sera positif depuis $t=0$ jusqu'à $t=l$, et négatif depuis $t=l$ jusqu'à $t=r$.

Outre ces trois équations, il y en aura deux autres qui n'auront lieu

que pour le contour de S_1. Pour les former, soit BACD (fig. 22) une section de la surface de la goutte, par un plan passant par son axe CB; et supposons que la partie DCA appartienne à S', et la partie DBA à S_1. Soient aussi DG et AF les sections de la surface du mercure par le même plan vertical. Prenons sur DBA deux points O et O', et sur DG et AC des points M et M', tels que O et M soient situés à des distances insensibles de D, et O' et M' à des distances insensibles de A. Dans les portions de courbe ODM et O'AM', l'inclinaison de la tangente variera très rapidement, et elles ne seront pas comprises dans les équations (α). Nous supposerons que O, M, O', M', soient les extrémités de ces courbes particulières, ou, autrement dit, nous supposerons que les distances insensibles OD, MD, O'A, M'A, surpassent, cependant, les rayons d'activité moléculaire du mercure et de la goutte. Cela posé, par les points O et O' je mène les tangentes OT et O'T' à la courbe DBA; par les points M et M', j'abaisse sur ces droites les perpendiculaires MK et M'K', et j'élève les normales MN et M'N' aux courbes GD et CA. En appelant ω et ω' les angles aigus KMN et K'M'N', ces angles seront donnés et dépendront de la matière de la goutte et de celle du liquide inférieur, qu'on suppose être le mercure. Ces angles seront ceux qui se concluraient de la dépression de l'un des liquides, dans un tube qui serait formé de la matière de l'autre liquide. Ainsi, l'angle ω sera de 45° 30' dans le cas d'une goutte d'eau, et un peu moindre, d'après ce qu'on a vu dans le n° 74, s'il s'agissait d'une goutte d'alcohol; en même temps, ω' sera l'angle qui aurait lieu à l'extrémité de la surface de l'eau ou de l'alcohol, contenu dans un tube de mercure solidifié. Or, si l'on appelle i et i' les inclinaisons sur un plan horizontal, des normales MN et M'N', et i_1 celle de la normale MK ou M'K', on aura

$$\omega = i - i_1, \qquad \omega' = i_1 - i',$$

et, de plus,

$$\frac{dz}{dt} = \cos i \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}}, \qquad 1 = \sin i \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}},$$

$$\frac{dz'}{dt} = -\cos i' \sqrt{1 + \frac{dz'^2}{dt^2}}, \qquad 1 = -\sin i' \sqrt{1 + \frac{dz'^2}{dt^2}},$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \cos i_1 \sqrt{1 + \frac{dz_1^2}{dt^2}}, \qquad 1 = \sin i_1 \sqrt{1 + \frac{dz_1^2}{dt^2}};$$

on aura, par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \sin\omega \sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}\sqrt{1+\frac{dz_1^2}{dt^2}}, \\ \frac{dz_1}{dt} - \frac{dz'}{dt} &= \sin\omega' \sqrt{1+\frac{dz'^2}{dt^2}}\sqrt{1+\frac{dz_1^2}{dt^2}}; \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

équations dans lesquelles on pourra faire $t = r$, sans erreur sensible.

Soit encore h l'abaissement du contour de S_1 au-dessous du niveau du mercure; $h+f$ l'abaissement du point le plus bas de la goutte, ou f la flèche de sa portion de surface S_1; k l'élévation de sa plus grande section, au-dessus du même niveau; $k+\alpha$ l'élévation de son sommet, et, enfin, ε son épaisseur totale, c'est-à-dire

$$k+\alpha+h+f=\varepsilon.$$

Nous aurons les équations particulières :

$$\left.\begin{aligned} &t=r, \quad z=z_1=z'=-h; \\ &t=l, \quad z'=k, \quad \frac{dz'}{dt}=\infty; \\ &t=0, \quad z_1=-h-f, \quad \frac{dz_1}{dt}=0, \quad z'=k+\alpha, \quad \frac{dz'}{dt}=0; \\ &t=\infty, \quad z=0, \quad \frac{dz}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

La question consistera maintenant à résoudre ces équations (a), (b), (c), par approximation, en supposant les rayons l et r très grands par rapport à l'épaisseur de la goutte.

(121). Après avoir fait

$$H = g\rho a^2,$$

nous pourrons remplacer la première équation (a) par celle-ci :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}} = 1 - \frac{z^2}{a^2} + \int_t^{\infty} \frac{\frac{dz^2}{dt^2}\,dt}{\sqrt{1+\frac{dz^2}{dt^2}}},$$

en supposant que l'intégrale s'évanouisse quand $t=\infty$. Dans toute

l'étendue de la surface S à laquelle cette équation appartient, la variable t est très grande. On peut donc négliger cette intégrale; on aura alors

$$dt = \frac{(z^2 - a^2)\,dz}{z\sqrt{2a^2 - z^2}},$$

en considérant le radical comme une quantité positive; et l'on en conclura

$$t = r + \sqrt{2a^2 - h^2} - \sqrt{2a^2 - z^2} + \frac{a}{\sqrt{2}} \log \frac{(\sqrt{2a^2 - h^2} - a\sqrt{2})z}{(a\sqrt{2} - \sqrt{2a^2 - z^2})h}, \quad (d)$$

à cause de $t = r$ quand $z = -h$. Nous nous arrêterons à cette valeur de t, qui est le premier terme d'une série ordonnée suivant les puissances descendantes de r, dont on obtiendrait facilement les termes suivans, si cela pouvait être utile. Cette équation (d) sera celle de la surface du mercure, en-dehors de son contact avec la goutte, et à une distance de ce contact, plus grande que le rayon d'activité moléculaire.

Les deux autres équations (a) se résoudront par l'analyse des n°s 106 et 107. Au sommet de la goutte, les deux rayons de courbure sont égaux; il en est de même à son point le plus bas. En désignant par μ leur grandeur commune au premier point, et par λ, au second point, on aura, d'après ces équations,

$$c - g\rho'(k + a) = \frac{1}{\mu} H',$$

$$c - g(\rho - \rho')(h + f) = \frac{1}{\lambda} G;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\lambda} G - \frac{1}{\mu} H' = g\rho'\varepsilon - g\rho(h + f); \quad (e)$$

et si nous faisons

$$H' = g\rho' a'^2, \quad G = g(\rho - \rho') a_1^2,$$

$$z_1 + h + f + \frac{a_1^2}{\lambda} = x, \quad z' - k - a - \frac{a'^2}{\mu} = y,$$

les dernières équations (a) deviendront

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(1+\frac{dx^2}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}&=\frac{2x}{a_1^2}\left(1+\frac{dx^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\left(1+\frac{dy^2}{dt^2}\right)\frac{dy}{dt}&=\frac{2y}{a'^2}\left(1+\frac{dy^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Relativement aux points de S_1 et de S' pour lesquels le plan tangent est très peu incliné, on les réduira à des équations linéaires; puis on y satisfera, ainsi qu'aux conditions particulières à $t=0$, en prenant

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a_1^2}{\pi\lambda}\int_0^{\pi} e^{\frac{t\sqrt{2}}{a_1}\cos\psi}\,d\psi,\\ y&=-\frac{a'^2}{\pi\mu}\int_0^{\pi} e^{\frac{t\sqrt{2}}{a'}\cos\psi}\,d\psi;\end{aligned}\right\} \quad (g)$$

expressions qui se réduiront à

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a_1^2}{\lambda\sqrt{2\pi\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{a_1}{t}}\,e^{\frac{t\sqrt{2}}{a_1}},\\ y&=-\frac{a'^2}{\mu\sqrt{2\pi\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{a'}{t}}\,e^{\frac{t\sqrt{2}}{a'}},\end{aligned}\right\} \quad (h)$$

comme dans le n° 106, pour des valeurs de t très grandes par rapport à a_1 et a'.

On peut aussi écrire les équations (f) sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{dx^2}{dt^2}}}-1+\frac{1}{a_1^2}\left(x^2-\frac{a_1^4}{\lambda^2}\right)&=\int\frac{\frac{dx^2}{dt^2}\,dt}{t\sqrt{1+\frac{dx^2}{dt^2}}},\\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dt^2}}}-1+\frac{1}{a'^2}\left(y^2-\frac{a'^4}{\mu^2}\right)&=\int\frac{\frac{dy^2}{dt^2}\,dt}{t\sqrt{1+\frac{dy^2}{dt^2}}},\end{aligned}\right\} \quad (i)$$

en supposant que ces intégrales s'évanouissent avec la variable t, et observant qu'on a

$$x = \frac{a_1^2}{\lambda}, \quad y = -\frac{a'^2}{\mu}, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

quand $t = 0$. Près du sommet ou du point le plus bas de la goutte, ces intégrales peuvent être négligées, à cause que l'on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\lambda}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{\mu},$$

et que la variable t est très petite dans ces parties de la surface. Pour les valeurs de t auxquelles répondent les formules (h), les quantités comprises sous les signes $\int$ auront t^2 pour diviseur; pour cette raison, nous pourrons aussi négliger ces intégrales. Enfin, près du bord de la goutte, nous les négligerons également, à cause de la grandeur de t, quoique, dans cette partie de la surface, les quantités comprises sous les signes $\int$ ne soient divisées que par la première puissance de cette variable. En supprimant donc les seconds membres des équations (i), et négligeant aussi les termes divisés par λ^2 et μ^2 dans leurs premiers membres, on aura simplement

$$\frac{a_1^2}{\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dt^2}}} = a_1^2 - x^2, \quad \frac{a'^2}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dt^2}}} = a'^2 - y^2. \qquad (k)$$

On en déduit

$$dt = \frac{(a_1^2 - x^2)\,dx}{x\sqrt{2a_1^2 - x^2}}, \qquad dt = \frac{(a'^2 - y^2)\,dy}{y\sqrt{2a'^2 - y^2}};$$

et si l'on fait attention aux signes des quantités $a_1^2 - x^2$ et $a'^2 - y^2$, qui doivent être les mêmes que ceux des radicaux $\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dt^2}}$ et $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dt^2}}$, et aux signes de x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, il sera aisé de s'assurer qu'on devra regarder comme positifs les radicaux $\sqrt{2a_1^2 - x^2}$ et $\sqrt{2a'^2 - y^2}$. D'ailleurs, en négligeant, pour abréger, les termes $\frac{a_1^2}{\lambda}$ et $\frac{a'^2}{\mu}$ des quantités que x et y représentent, on aura, en même temps, $t = r$, $z_r = -h$, $x = f$, et de même $t = l$, $z' = k$,

$y = -\alpha$; en intégrant, on aura donc

$$\left.\begin{aligned} t &= r + \sqrt{2a'^2 - x^2} - \sqrt{2a'^2 - f^2} + \frac{a'}{\sqrt{2}} \log \frac{(a'\sqrt{2} - \sqrt{2a'^2 - x^2})f}{(a'\sqrt{2} - \sqrt{2a'^2 - f^2})x}, \\ t &= l + \sqrt{2a'^2 - y^2} - \sqrt{2a'^2 - \alpha^2} + \frac{a'}{\sqrt{2}} \log \frac{(\sqrt{2a'^2 - y^2} - a'\sqrt{2})\alpha}{(a'\sqrt{2} - \sqrt{2a'^2 - \alpha^2})y}. \end{aligned}\right\} (l)$$

Les équations (g), (h), (l), jointes à l'équation (d), renfermeront la solution complète du problème, après qu'on aura déterminé les valeurs des constantes α, k, h, f, r, l, μ, λ, qu'elles renferment.

Or, $z' = k$ donne à très peu près $y = -\alpha$; et comme on a $\frac{dy}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \infty$, pour cette valeur de z', on aura $\alpha = a'$, d'après la seconde équation (k). On aura donc, en même temps, $t = r$, $z' = -h$, $y = -k - h - a'$, et, en vertu de la seconde équation (l),

$$r = l + a'(\eta - 1) + \frac{a'}{\sqrt{2}} \log \frac{(\sqrt{2} - \eta)a'}{(\sqrt{2} - 1)(k + h + a')},$$

pour la valeur de r, en faisant, pour abréger,

$$2a'^2 - (k + h + a')^2 = a'^2\eta^2,$$

et regardant η comme une quantité positive. Pour $t = r$, les équations (k) et les valeurs de dt qu'on en a déduites donnent

$$\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dt^2}} = \frac{a'_1}{a'_1 - f^2}, \quad \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dt^2}} = \frac{a'^2}{a'^2 - (h + k + a')^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f\sqrt{2a'^2_1 - f^2}}{a'^2_1 - f^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{(h + k + a')a'\eta}{(h + k + a')^2 - a'^2}.$$

D'après les équations d'où la formule (d) a été tirée, on aura, en même temps,

$$\sqrt{1 + \frac{dz^2}{dt^2}} = \frac{a^2}{a^2 - h^2}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{h\sqrt{2a^2 - h^2}}{a^2 - h^2};$$

et, au moyen de ces différentes valeurs, les formules (b) fourni-

ront deux équations, que je me dispenserai d'écrire, et qui serviront à déterminer deux des trois constantes h, k, f, par exemple, h et k.

Maintenant, si l'on applique la première des équations (l) à des points de S_1, pour lesquels z_1 diffère très peu de $-h-f$, et la variable x est très petite; et la seconde à des points de la partie supérieure de S', pour lesquels z' diffère très peu de k, et y est très petit; et si l'on compare aux formules (h) les expressions de x et y qui se déduiront alors de ces deux équations (l), on en conclura les valeurs de λ et μ, savoir :

$$\lambda = \frac{f a_1 \sqrt{a_1}}{4\sqrt{\pi r_1 \sqrt{2}}\,(a_1\sqrt{2}-\sqrt{2a_1^2-f^2})}\, e^{\frac{r_1\sqrt{2}}{a_1}},$$

$$\mu = \frac{a'\sqrt{a'}}{4\sqrt{\pi l'\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}-1)}\, e^{\frac{l'\sqrt{2}}{a'}},$$

en faisant, pour abréger,

$$r+a_1\sqrt{2}-\sqrt{2a_1^2-f^2}=r_1, \qquad l+(\sqrt{2}-1)a'=l'.$$

L'équation (e) deviendra

$$\frac{1}{f}(\rho-\rho')\sqrt{a_1 r_1}\,(a_1\sqrt{2}-\sqrt{2a_1^2-f^2})\,e^{-\frac{r_1\sqrt{2}}{a_1}} - \rho'\sqrt{a'l'}\,(\sqrt{2}-1)\,e^{-\frac{l'\sqrt{2}}{a'}}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi\sqrt{2}}}\,[\rho'\varepsilon-\rho(h+f)],$$

en y substituant les valeurs de λ, μ, G, H'. Elle servira à déterminer f; et il ne restera plus que l d'inconnu. Or, si l'on a mesuré directement le diamètre de la goutte dans sa plus grande largeur, on en prendra la moitié pour la valeur de l; si ce diamètre n'est pas connu, mais que le poids de la goutte soit donné, et qu'on le représente par ϖ, on aura

$$\varpi = \pi g\rho'\left(\int_{-h}^{k+a'} t^2\,dz' + \int_{-h-f}^{-h} t^2\,dz_1\right);$$

il sera facile d'effectuer les intégrations indiquées, après avoir substitué les valeurs de dz' et dz_1, tirées des équations (g), (h), (l), rela-

tives aux différentes parties de S′ et S_1 : cette expression de ϖ servira ensuite à trouver la valeur de l.

Pour résoudre les équations d'où dépendent les valeurs numériques de h, k, f, l, il faudrait que celles des constantes a, a', a_1, ω, ω', fussent données. Les valeurs de a, a', ω, sont effectivement connues ; quant à celles de a_1 et ω', on pourrait les déterminer au moyen des équations qui doivent servir à trouver les valeurs de h et k, si ces distances avaient été mesurées directement pour une goutte d'une largeur connue.

(122). Dans toutes les questions dont nous nous sommes occupés dans ce chapitre, l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la surface qu'il s'agissait de déterminer, ne dépendait que d'une seule variable, savoir, la distance à l'axe de figure, dans le cas d'une surface de révolution, ou la distance à un plan vertical, dans le cas d'un liquide contenu entre deux plans parallèles à celui-là. D'après cette circonstance, l'équation de la surface, qui est généralement aux différences partielles, se réduisait à une simple équation différentielle ; et, par différens procédés, il a été possible de la résoudre par approximation, ou même rigoureusement, dans le dernier de ces deux cas, au moyen des fonctions elliptiques. La solution devient beaucoup plus difficile, lorsque l'ordonnée verticale dépend de deux variables ; mais il y a des questions pour lesquelles la considération d'une surface de révolution fournit d'abord une approximation qu'on peut ensuite pousser aussi loin qu'il est nécessaire ; et, de cette manière, les solutions précédentes et celles du chapitre IV prennent une extension que nous avons déjà indiquée dans le n° 68, et dont nous allons donner un nouvel exemple.

Il s'agira de l'équilibre d'une goutte de liquide d'un volume peu étendu, contenue entre deux plans qui comprennent entre eux un très petit angle, et qui se coupent suivant une droite horizontale. Pour fixer les idées, je supposerai que la surface latérale du liquide soit concave en-dehors. Sa courbure étant plus grande du côté de l'intersection des deux plans que du côté opposé, la goutte tendra à se rapprocher de cette droite ; par conséquent, pour qu'elle demeure en équilibre, il faudra que cette tendance soit balancée par son poids ; ce qui exigera qu'elle soit au-dessous de cette in-

tersection. Par cette droite, je mène un plan compris entre les deux plans donnés, et dont je déterminerai plus bas la direction. Il y aura un autre plan perpendiculaire à cette intersection, qui divisera la goutte en deux parties parfaitement égales. J'appellerai C le milieu du diamètre de la goutte suivant lequel ce plan vertical coupe le plan intermédiaire; et je prendrai ce point pour origine des coordonnées, et pour axes, la perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés, menée dans le plan intermédiaire, la parallèle à cette même intersection et la perpendiculaire au plan intermédiaire. Soient u, v, ζ, les trois coordonnées d'un point quelconque de la surface latérale de la goutte, respectivement parallèles à ces trois axes, et z l'ordonnée verticale du même point, comptée en sens contraire de la pesanteur et à partir du plan horizontal passant par le point C. Si l'on appelle θ l'angle aigu que fait le plan intermédiaire, c'est-à-dire le plan des u et v, avec ce plan horizontal, et si l'on suppose les ζ et les u positives dirigées vers le haut, comme les z positives, on aura

$$z = \zeta \cos\theta + u \sin\theta.$$

Cela posé, si l'on désigne par a^2 la constante relative à la matière du liquide, l'équation de sa surface latérale sera

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \mathfrak{C} = \frac{2}{a^2}(\zeta \cos\theta + u \sin\theta); \qquad (1)$$

$\mathfrak{C}$ étant une constante arbitraire, et λ et λ' représentant les deux rayons de courbure principaux. La quantité $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$, exprimée au moyen des coordonnées u, v, ζ, aura pour valeur

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = V^3\left[\left(1 + \frac{d\zeta^2}{dv^2}\right)\frac{d^2\zeta}{du^2} - 2\frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{dv}\frac{d^2\zeta}{dudv} + \left(1 + \frac{d\zeta^2}{du^2}\right)\frac{d^2\zeta}{dv^2}\right],$$

en faisant, pour abréger,

$$V = \left(1 + \frac{d\zeta^2}{du^2} + \frac{d\zeta^2}{dv^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et considérant V comme positif ou comme négatif, selon que la normale extérieure au liquide fera un angle aigu ou obtus avec la droite tirée suivant la direction des ζ positives.

Les cosinus des angles que fait cette normale avec les axes des u, v, ζ, seront

$$-\mathrm{V}\frac{d\zeta}{du}, \quad -\mathrm{V}\frac{d\zeta}{dv}, \quad \mathrm{V}.$$

Si l'on désigne par α, α', α'', ceux des angles que font les mêmes axes, avec la perpendiculaire abaissée sur le plan supérieur et dirigée vers le haut, et par ω l'angle compris entre cette droite et la normale, on aura donc

$$\cos\omega = \mathrm{V}\left(\alpha'' - \alpha\frac{d\zeta}{du} - \alpha'\frac{d\zeta}{dv}\right);$$

et en appelant i l'inclinaison du plan supérieur sur le plan des u et v, on aura, en même temps,

$$\alpha'' = \cos i, \quad \alpha = \sin i, \quad \alpha' = 0.$$

Pour tous les points du contour supérieur de la surface latérale, c'est-à-dire pour tous les points de l'intersection de cette surface et du plan supérieur, ω sera un angle constant et donné; et si nous représentons par c la distance du point C à l'intersection des deux plans donnés, nous aurons, par rapport à ce contour, les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= (c-u)\tang i, \\ \cos\omega &= \mathrm{V}\left(\cos i - \frac{d\zeta}{du}\sin i\right), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dont la première est l'équation du plan supérieur. Soit i' l'inclinaison du plan inférieur sur celui des u et v. Relativement au contour inférieur de la surface latérale, nous aurons de même

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= -(c-u)\tang i', \\ \cos\omega' &= -\mathrm{V}\left(\cos i' + \frac{d\zeta}{du}\sin i'\right); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ω' étant l'angle compris entre la normale extérieure au liquide et la perpendiculaire au plan inférieur, dirigée en-dehors de l'angle des deux plans. Les angles donnés ω et ω' seront obtus, parce qu'on a supposé la surface latérale concave en-dehors; on aura $\omega' = \omega$, si les deux plans sont de la même nature, et $\omega' = \omega = \pi$, s'ils ont été préalablement mouillés par le liquide.

(123). Maintenant, pour résoudre, par approximation, les équations (1), (2), (3), je supposerai que les dimensions de la goutte de liquide soient très petites par rapport à la constante a. Il en sera de même à l'égard des variables u et v; et l'on pourra exprimer la valeur de ζ par une série convergente, ordonnée suivant leurs puissances et leurs produits, c'est-à-dire par une série de cette forme :

$$\zeta = z' + \frac{1}{a^2}(pu + p'v) + \frac{1}{a^4}(qu^2 + q'uv + q''v^2) + \text{etc.},$$

dans laquelle z', p, p', q, etc., seront des fonctions de la distance d'un point quelconque à l'axe des ζ, que je représenterai par t, de sorte qu'on ait

$$u^2 + v^2 = t^2.$$

En substituant cette série dans l'équation (1), et égalant ensuite les termes de ses deux membres, semblables par rapport à u et v, on obtiendra une suite d'équations qui serviront à déterminer les inconnues z', p, p', q, etc. Mais nous bornerons l'approximation aux termes divisés par a^2 inclusivement; et, de plus, nous ferons $p' = 0$, à cause que la variable v n'entre pas dans le second membre de l'équation (1). Nous aurons donc simplement

$$\zeta = z' + \frac{pu}{a^2}.$$

Pour faciliter la substitution de cette valeur de ζ, j'écris l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{d.V\frac{d\zeta}{du}}{du} + \frac{d.V\frac{d\zeta}{dv}}{dv} + 6 = \frac{2}{a^2}(\zeta\cos\theta + u\sin\theta). \qquad (4)$$

D'après l'expression de ζ, on a

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{dz'}{dt}\frac{u}{t} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{dp}{dt}\frac{u^2}{t} + p\right),$$

$$\frac{d\zeta}{dv} = \frac{dz'}{dt}\frac{v}{t} + \frac{1}{a^2}\frac{dp}{dt}\frac{uv}{t}.$$

Si l'on désigne par V' ce que V devient quand on y met z' au lieu

de ζ, on aura

$$V' = \left(1 + \frac{dz'^2}{dt^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et ensuite

$$V = V' - \frac{1}{a^2} V'^3 \frac{dz'}{dt}\left(\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t}\right)u. \qquad (5)$$

Je substitue ces valeurs et celle de ζ dans l'équation (4); et en continuant de négliger les termes divisés par a^4, je trouve, après quelques réductions,

$$\frac{d.V'\frac{dz'}{dt}}{dt} + \frac{1}{t}V'\frac{dz'}{dt} + \mathcal{C} + \left[\frac{d.V'^3}{dt}\left(\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t}\right) - \frac{V'p}{t^2} + V'^3\left(\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{3}{t}\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t^2}\right)\right]\frac{u}{a^2} = \frac{2}{a^2}(z'\cos\theta + u\sin\theta);$$

équation qui se décompose en deux autres, savoir :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{1}{t}\left(1 + \frac{dz'^2}{dt^2}\right)\frac{dz'}{dt}}{\left(1 + \frac{dz'^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{C} = \frac{2z'\cos\theta}{a^2}, \\ &\frac{d.V'^3}{dt}\left(\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t}\right) - \frac{V'p}{t^2} + V'^3\left(\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{3}{t}\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t^2}\right) = 2\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

La première de ces deux équations est celle qui répond à la surface de révolution. Elle se résoudra par l'analyse du n° 102; et quand z' aura été déterminé en fonction de t, la seconde équation (6) fera connaître la valeur de p.

(124). Je supposerai que la largeur de la goutte soit très grande relativement à son épaisseur; et cela étant, je ferai, comme dans le numéro cité,

$$t = h + t', \qquad \mathcal{C} = -\frac{1}{2\gamma};$$

h étant la valeur particulière de t pour laquelle on a $t' = 0$, et γ une autre constante très petite par rapport à h. La variable t' sera aussi très petite; l'expression de z' aura $\sqrt{2\gamma t' - t'^2}$ pour premier terme, et l'on pourra la représenter par

$$z' = \sqrt{2\gamma t' - t'^2} + \varphi,$$

en désignant par φ une fonction de t' très petite à l'égard de ce premier terme, qui s'évanouira pour $t' = 0$. Cette quantité φ renfermera, en outre, dans son expression, les constantes arbitraires h et γ, et la quantité $\frac{a^2}{\cos\theta}$ au lieu de la constante a^2 du n° 102. On en déterminerait facilement la valeur approchée, si l'on avait besoin de la connaître.

L'inconnue p étant divisée par a^2 dans la valeur de ζ, il suffira de substituer le premier terme de z' dans la seconde équation (6), d'où cette inconnue dépend; et d'après le n° 102, on y fera, en même temps,

$$V' = -\frac{1}{\gamma}\sqrt{2\gamma t' - t'^2}.$$

Cette équation ne pourra s'intégrer que par approximation; la quantité p qui s'en déduira sera très petite par rapport à t^2; en négligeant le terme $-\frac{V'p}{t^2}$ du premier membre, à cause de son diviseur t^2, et la multipliant ensuite par t^2dt, elle devient

$$d\left[\left(\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t}\right)V'^3t^2\right] = 2t^2 \sin\theta dt;$$

ce qui donne, par une première intégration,

$$\left(\frac{dp}{dt} + \frac{p}{t}\right)V'^3t^2 = \frac{2}{3}t^3\sin\theta + \eta;$$

η désignant la constante arbitraire. Pour que la valeur de p qu'on en tirera ne devienne pas infinie quand $t' = 0$, il faut que le second terme de cette équation s'évanouisse avec t', et qu'on ait, par conséquent, $\eta = -\frac{2}{3}h^3$; on aura donc

$$\frac{d.tp}{dt} = \frac{2}{3}\frac{(t^3 - h^3)\sin\theta}{tV'^3} = -\frac{2h\gamma^3t'\sin\theta}{(2\gamma t' - t'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en négligeant le carré de t'. J'intègre de nouveau, et en désignant par η' la constante arbitraire, il vient

$$tp = -\frac{2h\gamma^2 t' \sin\theta}{\sqrt{2\gamma t' - t'^2}} + \pi'.$$

Mais le point C étant supposé le milieu du diamètre de la goutte situé sur l'axe des u, il s'ensuit qu'on doit avoir $\pi' = 0$. En effet, le contour de la section de la goutte par le plan des u et v a pour équation

$$z' + \frac{pu}{a^2} = 0;$$

d'après les expressions de z' et p, on en déduit, à très peu près,

$$t = h + t' = h + \frac{\pi'^2 u^2}{2\gamma h^2 a^4};$$

et, à cause de $t'^2 = u^2 + v^2$, les deux valeurs de u qui répondent à $v = 0$ seront aussi, à très peu près,

$$u = \pm h + \frac{\pi'^2}{2\gamma a^4};$$

pour qu'elles soient égales et de signes contraires, il faudra donc qu'on ait $\pi' = 0$. Cela étant, nous aurons

$$p = -\frac{2\gamma^2 t' \sin\theta}{\sqrt{2\gamma t' - t'^2}},$$

pour la valeur approchée de p, et

$$\zeta = \sqrt{2\gamma t' - t'^2} + \varphi - \frac{2\gamma^2 t' u \sin\theta}{a^2\sqrt{2\gamma t' - t'^2}}, \qquad (7)$$

pour celle de ζ, à laquelle nous nous arrêterons.

Pour que la position et la figure de la goutte soient entièrement connues, il restera encore à déterminer les deux constantes h et γ, la direction du plan à partir duquel cette ordonnée ζ est comptée, c'est-à-dire l'un des deux angles i et i' dont la somme, seulement, est connue et égale à l'angle des deux plans donnés, et, enfin, la distance c du milieu C de la goutte à l'intersection de ces deux plans. Cette distance est surtout importante à connaître, parce que sa valeur peut être mesurée directement, et qu'il en pourra résulter une nouvelle vérification de la théorie. Sa détermination ne dépendant pas, comme on va le voir, du second terme de ζ, c'est pour

cela que nous l'avons représenté par φ, et que nous nous sommes dispensés d'en calculer la valeur.

(125). Après qu'on y aura substitué la valeur de ζ, l'une des équations (2), la première, par exemple, sera l'équation du contour supérieur du liquide; elle déterminera t en fonction de u; et, ensuite, la seconde devra être identique par rapport à u. Cette première équation devient

$$\sqrt{2\gamma t' - t'^2} + \varphi + \frac{pu}{a^2} = (c - u) \operatorname{tang} i. \qquad (8)$$

L'angle i étant très petit, par hypothèse, il suffira de mettre le premier terme de la formule (5) à la place de V, et celui de la formule (7) au lieu de ζ, dans la partie de la seconde équation (2) qui renferme le facteur sin i; de cette manière, on aura d'abord

$$\cos\omega = \mathrm{V}\cos i - \frac{\mathrm{V}'(\gamma - t')\, u \sin i}{t\sqrt{2\gamma t' - t'^2}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\cos\omega = \mathrm{V}'\cos i - \frac{\mathrm{V}'^3(\gamma - t')\, u\cos i}{a^2 t\sqrt{2\gamma t' - t'^2}}\,\frac{d.tp}{dt} - \frac{\mathrm{V}'(\gamma - t')\, u \sin i}{t\sqrt{2\gamma t' - t'^2}},$$

en négligeant, à cause de la petitesse de φ, un terme qui aurait $\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ pour facteur. En vertu de l'équation (8), on aura

$$\mathrm{V}' = -\frac{1}{\gamma}\sqrt{2\gamma t' - t'^2} = -\frac{c\operatorname{tang} i}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma} + \frac{pu}{a^2\gamma} + \frac{u\operatorname{tang} i}{\gamma},$$

au moyen de quoi l'équation précédente se changera en celle-ci:

$$\cos\omega + \frac{c\sin i}{\gamma} - \frac{\varphi\cos i}{\gamma} - \left(\frac{h+\gamma}{h+t'} - \frac{2c\gamma\sin\theta}{a^2}\right)\frac{u\sin i}{\gamma} = 0,$$

en ayant égard aux valeurs de p et de $\frac{d.tp}{dt}$, et mettant h et c au lieu de t et $c - u$ dans les termes divisés par a^2. D'ailleurs, à cause que γ et t' sont très petits par rapport à h, on peut réduire à l'unité le premier terme de la quantité comprise entre les parenthèses; égalant ensuite séparément à zéro le terme indépendant de u et le coefficient de u dans cette dernière équation, nous

aurons

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega + \frac{c\sin i}{\gamma} &= 0, \\ a^2 - 2c\gamma\sin\theta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

en négligeant la fraction très petite $\frac{\varphi}{\gamma}$.

Les équations qu'on obtiendra de la même manière, en partant des équations (3), se déduiront des précédentes, en y changeant ω et i en ω' et i'. La seconde équation ne changera pas, et la première deviendra

$$\cos\omega' + \frac{c\sin i'}{\gamma} = 0;$$

et, à cause que la somme des angles i et i' est donnée, ces équations suffiront pour déterminer ces angles et les deux constantes c et γ. Enfin, si l'on désigne par $\pi\varepsilon^3$ le volume de la goutte, on aura, à très peu près,

$$h^2(c\sin i + c\sin i') = \varepsilon^3,$$

pour déterminer la constante h.

Si les deux plans qui comprennent la goutte de liquide sont de la même nature, on aura $\omega' = \omega$ et $i' = i$; l'angle i sera la moitié de l'angle donné que font ces deux plans; et l'inclinaison θ du plan intermédiaire sur un plan horizontal, sera déterminée par l'équation

$$\sin\theta = -\frac{a^2\cos\omega}{2c^2\sin i}, \qquad (10)$$

que l'on obtient en éliminant γ entre les équations (9). En comparant cette formule à celle du n° 68, désignant par θ' l'inclinaison de l'axe du cône que celle-ci détermine, et la réduisant à son premier terme, on en conclura

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta',$$

toutes choses d'ailleurs égales, c'est-à-dire en supposant qu'il s'agisse d'un même liquide et de parois de la même nature, que l'angle com-

pris entre chaque plan donné et le plan intermédiaire soit égal à celui que fait chaque arête du cône avec son axe, et que la distance du milieu de la goutte au sommet du cône, soit la même que sa distance à l'intersection des deux plans donnés.

Dans les applications qu'on pourra faire de la formule (10), on ne devra pas oublier qu'elle suppose très petit l'angle des deux plans donnés, l'épaisseur de la goutte aussi très petite par rapport à sa largeur, et cette largeur elle-même très petite, soit par rapport à la distance du milieu de la goutte à l'intersection des deux plans donnés, soit à l'égard de la constante a relative à la matière du liquide.

(126). Lorsque les deux plans donnés auront été préalablement mouillés par le liquide dans toute leur étendue, on aura $\omega = \pi$, et, par conséquent,

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{a^2}{2c^2 \sin i}. \qquad (11)$$

Dans ce cas, l'angle θ a été mesuré avec soin par Hauksbée, pour différentes valeurs de c (*). Mais, malheureusement, il paraît que les dimensions de la goutte de liquide ne satisfaisaient pas aux conditions que cette formule suppose; car, pour chaque valeur de c, elle donne un angle θ plus que double de celui qui a été mesuré.

En effet, dans l'appareil d'Hauksbée, on avait

$$2\sin i = \frac{1}{320}.$$

Le liquide était l'huile d'orange. Or, M. Gay-Lussac a trouvé qu'à la température de 15°,5, ce liquide s'élève à $10^{mm},4$ au-dessus de son niveau dans un tube dont le diamètre est $1^{mm},296$, et qui a été mouillé préalablement par ce même liquide. On en conclut (n° 56)

$$a^2 = (6{,}8740) \text{ millimètres carrés.}$$

Je prendrai pour unité le pouce anglais, dont la longueur est $25^{mm},3918$; il en résultera

(*) Supplément au livre X de la *Mécanique céleste*, page 55.

$$a^2 = 0{,}010662, \qquad a = 0{,}10325,$$

et, par conséquent,

$$\sin\theta = \frac{3{,}4117}{c^2};$$

la distance c étant aussi exprimée en pouces anglais. Or, si l'on fait successivement $c = 18$, $c = 10$, $c = 2$, qui sont la plus grande, la moyenne et la plus petite des distances pour lesquelles Hauksbée a mesuré l'angle θ, cette formule donne

$$\theta = 0^\circ\,38'\,12'', \qquad \theta = 1^\circ\,57'\,20'', \qquad \theta = 58^\circ\,32',$$

et, suivant l'observation, on a seulement

$$\theta = 9'\,38'', \qquad \theta = 54'\,38'', \qquad \theta = 21^\circ\,54'\,38''.$$

Mais Hauksbée n'a pas fait connaître la largeur de la goutte liquide; et la constante a n'étant que d'un dixième de pouce, il y a lieu de croire que le rayon de la goutte n'était pas à la fois très petit par rapport à a et très grand par rapport à sa demi-épaisseur qui surpassait la moitié de a dans le cas de $c = 18$. Il faut remarquer que le physicien anglais dit qu'à mesure que la goutte s'approchait de l'intersection des deux plans, elle devenait de plus en plus oblongue; circonstance qui n'aurait pas lieu si la largeur de la goutte satisfaisait à la double condition que notre analyse suppose; car alors, en vertu de l'équation (7), la goutte serait toujours à très peu près circulaire. La discordance des valeurs de θ observées et calculées, ne prouve donc rien contre la théorie; et je ne doute pas que si l'on répétait l'expérience d'Hauksbée sur des gouttes de liquide d'un rayon aussi petit qu'il serait possible par rapport à a, et d'une épaisseur encore plus petite, l'angle qu'on observerait ne s'accordât avec celui qui serait donné par la formule (11). Dans cette expérience, il serait préférable d'employer l'eau, qui est le fluide pour lequel la constante a est la plus grande.

La formule de la *Mécanique céleste* que l'auteur a comparée aux observations d'Hauksbée, est la même que la formule (11). Cependant, les différences qu'il a trouvées entre le calcul et l'expérience s'élèvent

une seule fois à 3°, et sont généralement beaucoup moindres. Elles sont encore trop grandes pour être attribuées aux erreurs des observations; mais, de plus, Laplace a fait usage, pour déterminer la constante a^2, d'une élévation de l'huile d'orange, dans un tube capillaire, qui n'est pas moitié de celle que j'ai employée, d'après l'expérience de M. Gay-Lussac; et c'est pour cette raison qu'il n'a pas obtenu, comme moi, des valeurs de θ plus que doubles de celles qu'Hauksbée a trouvées. Cette élévation de l'huile d'orange avait été mesurée, par Haüy, sans avoir préalablement mouillé le tube avec ce liquide, dans toute sa longueur; et l'on sait que, faute d'avoir pris cette précaution, les élévations de différens liquides qu'Haüy a mesurées, sont trop petites de plus de moitié. Hauksbée avait eu soin de frotter d'abord avec de l'huile d'orange les deux plans de verre qui formaient son appareil; il fallait donc, pour calculer les inclinaisons correspondantes à celles qu'il a mesurées, faire usage de l'ascension d'un liquide dans un tube mouillé par ce même liquide, comme celui dont M. Gay-Lussac s'est servi.

(127). On admet, comme un résultat de l'expérience, que quand on incline un tube capillaire plongé dans un liquide, l'élévation, positive ou négative, de ce liquide au-dessus de son niveau extérieur, reste constamment la même; mais cela n'a lieu que par approximation, et seulement à l'égard de la partie principale de cette élévation, qui est en raison inverse du diamètre du tube.

En effet, supposons que la surface intérieure du tube soit celle d'un cylindre à base circulaire; appelons θ le complément de l'angle aigu que fait son axe avec un plan horizontal; prenons pour origine des coordonnées le point où cette droite rencontre le plan du niveau extérieur; par ce point, menons un plan perpendiculaire à cette droite, et désignons par ζ, v, u, les trois coordonnées d'un point quelconque de la surface capillaire, respectivement parallèles à l'axe du cylindre, à l'intersection du plan perpendiculaire et du niveau extérieur, et à un troisième axe perpendiculaire aux deux premiers. Si nous désignons par z l'ordonnée verticale du même point, comptée en sens contraire de la pesanteur, à partir du niveau du liquide, nous aurons

$$z = \zeta \cos\theta + u \sin\theta,$$

en supposant que les ζ et les u positives soient aussi dirigées vers le haut. L'équation de la surface capillaire sera l'équation (1) du n° 122, dans laquelle on fera $\mathfrak{G} = 0$; et si l'on suppose le rayon du tube très petit par rapport à la constante a, relative à la matière du liquide, la valeur de ζ pourra s'exprimer par la série convergente du n° 128; d'où l'on conclut, sans aucun calcul, qu'en négligeant les termes divisés par a^2, cette quantité ζ sera la même que si la surface du liquide était une surface de révolution qui eût pour axe celui du cylindre, et qu'en même temps la constante a^2 fût remplacée par $\frac{a^2}{\cos\theta}$. Il résulte de là que si l'on fait

$$u^2 + v^2 = t^2,$$

on aura la valeur approchée de ζ en fonction de t, en mettant $\frac{a^2}{\cos\theta}$ à la place de a^2 dans les formules du n° 54, et négligeant les termes divisés par a^2; ce qui donne

$$\zeta = -\frac{ba^2}{\alpha\cos\theta} - \frac{2\alpha}{3b^3} + \frac{2\alpha(1-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^3} + \frac{1}{b}\sqrt{a^2 - b^2t^2},$$

où l'on représente par α le rayon du tube, et par b le cosinus de l'angle que nous avons désigné précédemment par ω, et où l'on regardera les radicaux comme des quantités positives. En substituant cette valeur de ζ dans celle de z, on aura l'élévation de la surface capillaire au-dessus du niveau du liquide; et l'on voit qu'il n'y aura que le premier terme de la valeur de z qui sera indépendant de l'angle θ.

Dans le cas le plus ordinaire, où le tube est mouillé dans toute sa longueur par le liquide, et où l'on a $\omega = \pi$, cette valeur de z est

$$z = \frac{a^2}{\alpha} + \frac{2\alpha\cos\theta}{3} - \sqrt{\alpha^2 - t^2}\cos\theta + u\sin\theta.$$

Si l'on appelle h l'ordonnée du point le plus bas de la surface du liquide, et qu'on fasse

$$\frac{dz}{dv} = 0, \quad \frac{dz}{du} = 0,$$

pour déterminer les valeurs correspondantes de u et v, on trouve

$$v = 0, \quad u = -\alpha \sin\theta, \quad h = \frac{a^2}{\alpha} - \alpha + \frac{2\alpha\cos\theta}{3}.$$

A raison de ce dernier terme, la hauteur h diminue donc un peu quand l'angle θ augmente, c'est-à-dire quand l'axe du tube s'écarte de la direction verticale. Les observations de ce genre sont assez précises pour rendre sensible cette diminution. Quant au volume du liquide contenu dans le tube au-dessus de son niveau extérieur, il augmente avec l'inclinaison, et suit la raison inverse du cosinus de cet angle, d'après ce qu'on a vu dans le n° 36.

CHAPITRE VII.

Notes et Additions.

(128). Quoique les principes sur lesquels est fondée la théorie qui fait l'objet de cet ouvrage diffèrent essentiellement de ceux de la *Mécanique céleste*, cependant nous avons obtenu des équations de la même forme que celles que Laplace a données, soit pour la surface capillaire, soit pour son contour tracé à des distances des parois du tube, insensibles, mais plus grandes que le rayon d'activité moléculaire. A la vérité, nous n'avons pas trouvé les mêmes expressions en intégrales définies, des constantes spéciales que ces équations renferment; mais il n'en peut résulter aucune différence dans les conséquences qui s'en déduisent, parce que les lois des forces moléculaires n'étant pas connues, on ne saurait calculer, *à priori*, les valeurs numériques de ces constantes qui ne peuvent être données que par l'observation. Il n'en est pas de même à l'égard de la pression exercée par un liquide sur la surface d'un corps solide, contre lequel il s'appuie, ou, plus exactement, sur une surface tracée à distance insensible de celle de ce corps. J'ai calculé directement la pression verticale sur un corps plongé en partie dans un liquide, que l'on s'était contenté, jusqu'ici, de conclure d'une considération indirecte, mais exacte (n° 83). J'ai calculé de même la pression horizontale; mais la valeur que j'ai obtenue ne s'accorde pas avec celle que Laplace avait donnée (n° 85). D'après celle-ci, la pression horizontale serait différente sur les deux faces parallèles d'une lame verticale, d'une très grande largeur, lorsqu'une de ces faces est mouillée, dans toute sa hauteur, par le liquide, et que l'autre ne l'est pas, ou, généralement, lorsqu'elles ne sont point l'une et l'autre de la même nature. Il résulterait de cette différence de pression, qu'un corps isolé, flottant à la surface indéfinie d'un liquide, y pourrait prendre un mouvement horizontal et perpétuel, qui serait dû à l'action mu-

tuelle des points du liquide et des points du corps; ce qui paraît difficile à admettre, quoique, dans ce mouvement, le centre de gravité du système entier ne soit pas déplacé. Je trouve cette remarque dans une lettre que Th. Young m'avait écrite, il y a plusieurs années. Il en faisait une objection, sur laquelle il insistait beaucoup, contre la théorie de Laplace; mais elle n'aurait pas lieu contre la nôtre; car d'après la formule du n° 85, relative à la pression horizontale, cette force est la même sur les deux faces d'une lame isolée, soit qu'elles soient de même nature ou de nature différente (n° 96), et, conséquemment, ce corps ne peut prendre aucun mouvement de translation à la surface du liquide. Quand il y a deux lames verticales et parallèles qui flottent à cette surface, et sont peu éloignées l'une de l'autre, la force qui tend à les rapprocher ou à les éloigner davantage ne dépend que de l'état de leurs faces internes; elle est toujours attractive quand ces deux faces sont de la même nature: lorsqu'elles sont de nature différente, c'est-à-dire lorsque le liquide s'élève le long de l'une et s'abaisse le long de l'autre, j'ai fait voir qu'il peut prendre deux figures distinctes d'équilibre, et que, pour l'une, la force dont il s'agit est répulsive à toute distance, tandis que pour l'autre, elle devient attractive quand la distance est tombée au-dessous d'une certaine limite. Ce second état d'équilibre fournit la véritable explication du phénomène observé par Haüy sur une lame d'ivoire et une lame de talc laminaire (n° 100). Dans aucun cas, une ou plusieurs lames flottantes ne pourront être transportées toutes d'un même côté.

On a vu que je m'écarte aussi de la *Mécanique céleste*, en ce qui concerne l'explication des phénomènes qui ont lieu quand le liquide atteint l'extrémité supérieure du tube. La démonstration que Laplace avait donnée de l'invariabilité de l'angle compris entre les normales à la surface du liquide et à celle du tube, menées par chaque point situé à une distance insensible de leur commune intersection, n'a pas paru satisfaisante; et M. Gauss en a donné une autre très élégante, et qui ne laisse rien à désirer, lorsqu'on fait abstraction de la variation de densité du liquide près de sa surface et près de celle du tube. En ayant égard à cette variation, dont la loi est inconnue, j'ai démontré la même proposition, dans le chapitre III,

d'une manière qui, je crois, ne peut laisser aucun doute. L'invariabilité de l'angle des deux normales, que j'ai appelé ω, exige seulement que la courbure du tube ne soit pas extrêmement grande, ou, autrement dit, que son rayon osculateur ne soit pas insensible et du même ordre que le rayon d'activité moléculaire. Cependant, Laplace supposait que cet angle change de grandeur, lorsque le liquide atteint l'extrémité du tube; ce qui est inadmissible, car l'arête qui termine la surface intérieure du tube a toujours un rayon incomparablement plus grand que le rayon d'activité des molécules. Mais l'angle qui entre dans les formules relatives à l'élévation et à la courbure de la surface du liquide, est celui que fait la normale à cette surface avec un plan horizontal, lequel angle est égal à ω, augmenté d'un autre angle i compris entre la normale à la surface du tube et ce dernier plan. Or, l'angle i variant le long de l'arête du tube, il en résulte que quand le liquide a atteint cette arête, la courbure de la surface du liquide et l'élévation de son sommet peuvent aussi varier, conformément à l'observation, sans que l'angle ω éprouve aucun changement. La considération de cet angle i est également indispensable, lorsqu'on veut déterminer le poids nécessaire pour détacher un disque solide de la surface d'un liquide, l'une des questions les plus intéressantes de cette théorie, que l'on n'avait pas, ce me semble, considérée sous son véritable point de vue. En effet, le disque et le liquide étant soulevés graduellement par un poids qui croît par petites parties, ce poids et la hauteur correspondante du liquide sont, à chaque instant, des fonctions de l'angle i qui représente l'inclinaison de la normale à la surface de l'arête du disque sur un plan horizontal; c'est lorsque ces fonctions atteignent leur *maximum* par rapport à i, que le disque se détache du liquide; et il en résulte la condition d'après laquelle on détermine la grandeur du poids propre à opérer la séparation du disque et du liquide.

Enfin, indépendamment de ces considérations délicates, qui ont pour objet de rectifier, en plusieurs points, la théorie de l'action capillaire, et des principes nouveaux sur lesquels j'ai proposé de l'établir, le chapitre précédent renferme les solutions de deux problèmes dont on ne s'était point encore occupé. L'un se rapporte à la figure

d'un liquide versé sur un liquide plus pesant ; l'autre est relatif à l'adhésion d'un cylindre capillaire à un liquide, question analogue à celle de l'adhésion d'un disque, d'une grande largeur, mais qui se résout par une analyse toute différente.

On trouvera dans les notes suivantes quelques développemens qui m'ont paru utiles, et des expériences que l'on m'a communiquées pendant l'impression de cet ouvrage.

---

§ Ier. *Constitution intime des corps, et particulièrement des fluides; nature des forces moléculaires.*

(129). Les corps sont formés de *molécules* disjointes, c'est-à-dire de portions de matière pondérable, d'une grandeur insensible, séparées par des espaces vides, ou des *pores*, dont les dimensions sont aussi imperceptibles à nos sens. Indépendamment de la matière pondérable qu'elle renferme, on suppose que chaque molécule contient, en outre, une quantité variable d'une substance impondérable, ou dont le poids ne peut être rendu sensible, que l'on appelle le *calorique*, et qui est le principe de la chaleur.

Toutes les parties de la matière sont soumises à deux sortes d'actions mutuelles. L'une de ces forces est attractive, indépendante de la nature des corps ou de leurs molécules, proportionnelle au produit des masses, et en raison inverse du carré des distances ; elle s'étend indéfiniment dans l'espace, et produit la pesanteur universelle et tous les phénomènes qui sont du ressort de la mécanique céleste. L'autre est en partie attractive et en partie répulsive ; elle dépend de la nature des molécules et de leur quantité de calorique. On attribue la partie attractive à la matière pondérable, et la partie répulsive au calorique ; et, en effet, celle-ci change d'intensité, quoique le poids des molécules n'ait pas changé. L'excès de l'une sur l'autre est ce qu'on appelle proprement la *force moléculaire*. Elle tend à rapprocher ou à écarter les molécules, selon que l'action de la matière pondérable est plus grande ou moindre que l'action calorifique. Son intensité décroît très rapidement quand la distance des molécules augmente, et devient tout-

à-fait insensible, dès que cette distance a acquis une grandeur sensible.

La résultante des forces moléculaires dans laquelle la répulsion du calorique est généralement prépondérante, produit la pression des fluides sur eux-mêmes et sur les corps solides, et la résistance que ces corps opposent aux fluides. Tous les phénomènes de la capillarité dérivent aussi des forces moléculaires; mais ils répondent à une partie de leur résultante, différente de la pression, et dans laquelle, au contraire, c'est toujours l'attraction qui prédomine. Cette partie de la résultante dépend, comme on l'a vu dans cet ouvrage, de la figure du liquide et de la variation rapide de densité qu'il éprouve près de sa surface et près de celle du corps contre lequel il s'appuie. L'agrégation des différentes parties dans les corps solides et la forme régulière des corps cristallisés sont dues à la portion de la force moléculaire qui dépend de la forme et de la situation relative des molécules. Cette force tout entière, modifiée par l'état électrique des molécules, est la cause générale des affinités chimiques.

Indépendamment de la pesanteur universelle et de la force moléculaire, telle qu'on vient de la définir, il existe dans la nature des forces particulières, savoir, les actions électriques ou magnétiques, et peut-être d'autres encore. Ces forces sont attractives ou répulsives, et suivent, comme l'attraction newtonienne, la raison inverse du carré des distances. Cette loi est prouvée par les expériences directes de Coulomb et par l'accord qui existe entre l'observation et le calcul fondé sur cette même loi, relativement à la distribution du fluide électrique ou magnétique, déterminée par l'expérience ou par l'analyse mathématique. Il y a donc lieu de croire que, soit pour les substances impondérables, soit pour les parties des corps dont le poids est sensible, il n'existe que deux lois différentes de décroissement des forces naturelles, l'une en raison inverse du carré des distances, l'autre suivant une fonction qui n'a de valeurs sensibles que pour des distances insensibles. De plus, pour toutes ces forces, la réaction d'une molécule sur une autre est toujours égale et contraire à l'action de la seconde molécule sur la première. On doit admettre ce principe comme une loi universelle de la nature, que

personne ne conteste, mais qu'il ne serait pas possible de démontrer par le simple raisonnement; car il n'y a, *à priori*, aucune raison pour qu'une portion de la matière ne puisse pas être attirée ou repoussée par une autre, sans que la première attire ou repousse également la seconde.

Ainsi, tous les mouvemens que nous observons, nous devons les attribuer à des forces d'attraction ou de répulsion, pour lesquelles l'action est égale à la réaction, et qui varient avec les distances, suivant une des deux lois précédentes. Les vibrations des corps élastiques et la communication du mouvement, soit par le choc, soit par la pression, résultent de la force qui n'est sensible qu'à des distances insensibles, c'est-à-dire de la force moléculaire. Nous ignorons si les mouvemens volontaires sont dus à cette cause, ou bien à une force analogue à celle qui émane de l'électricité en repos ou en mouvement, ou même tout-à-fait identique; nous ignorons de même comment la volonté met les différentes parties d'un muscle dans un état d'attraction ou de répulsion mutuelle : mais quand ce muscle s'étend ou se replie, nous pouvons assurer que ce mouvement est dû à des forces variables avec la distance, et soumises à la loi de l'action égale à la réaction; car, sans cette dernière condition, les animaux auraient la faculté de déplacer leur centre de gravité sans le secours d'un appui extérieur et d'aucune force étrangère.

(130). Il importe au progrès des sciences que la Mécanique rationnelle ne soit plus maintenant une science abstraite, fondée sur des définitions relatives à un état imaginaire des corps. Les lois de l'équilibre et du mouvement des différentes sortes de corps doivent être déduites de la considération des forces moléculaires; et c'est, en effet, ce que je me suis proposé dans mon Mémoire sur l'*Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques et des fluides*, qui fait partie du 20ᵉ cahier de l'École Polytechnique. Mais pour appliquer à ces forces l'analyse mathématique, les notions générales qu'on vient de rappeler seraient insuffisantes, et il est nécessaire d'entrer, à ce sujet, dans des détails plus précis.

Les molécules des corps sont si petites et si rapprochées les unes des autres, qu'une portion d'un corps qui en renferme plusieurs myriades, peut encore être supposée extrêmement petite, et la grandeur

de son volume insensible. Cela étant, si d'un point M comme centre et d'un rayon insensible, on décrit une sphère dans l'intérieur d'un corps, qui comprenne un nombre extrêmement grand de ses molécules; si l'on désigne par μ la somme de ses masses, par ν son volume, et qu'on fasse

$$\frac{\mu}{\nu} = \rho,$$

ce rapport ρ est ce qu'on appelle la *densité* du corps au point M, quelle que soit d'ailleurs l'inégalité de masse des molécules et leur distribution régulière ou irrégulière dans l'étendue de ν. De même, en désignant par n le nombre de molécules que ν renferme, et faisant

$$\frac{\nu}{n} = \epsilon^3,$$

cette ligne ϵ, de grandeur insensible, est ce que j'ai appelé l'*intervalle moyen* des molécules qui répond au point M et à la densité ρ.

Soient m et m' les masses de deux molécules voisines, c et c' leurs quantités de calorique, M et M′ leurs centres de gravité, et r la distance MM′; et considérons l'action mutuelle de ces deux molécules. Supposons d'abord leurs dimensions très petites par rapport à l'intervalle qui les sépare. L'action dont il s'agit se réduira alors à une force unique, dirigée suivant la droite MM′, et dont l'intensité sera une fonction de r, que nous représenterons par R; en même temps, leur répulsion mutuelle sera proportionnelle au produit de c et c', et leur attraction au produit de m et m'. En considérant la force R comme positive ou comme négative, selon qu'elle tendra à augmenter ou à diminer la distance r, sa valeur sera l'excès de la répulsion sur l'attraction; et si l'on suppose que l'attraction réciproque de la matière pondérable et du calorique, qui retient celui-ci dans chaque molécule, s'étend au-dehors, il faudra retrancher de cet excès l'attraction du calorique attaché à m' sur la matière de m, et celle de la matière de m' sur le calorique attaché à m, lesquelles forces seront proportionnelles, la première au produit mc', et la seconde à $m'c$. De cette manière, la valeur complète de R sera

$$R = cc'\gamma - mm'\alpha - mc'\mathfrak{C} - m'c\mathfrak{C}';$$

les coefficiens γ, α, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, étant des quantités positives. Le premier sera indépendant de la nature de m et de celle de m', le second dépendra de l'une et de l'autre, le troisième ne dépendra que de la nature de m, et le quatrième de celle de m'.

En réunissant ces trois derniers termes en un seul, on pourra écrire la valeur de R sous la forme :

$$R = Fr - fr.$$

Chacune des deux fonctions Fr et fr n'aura que des valeurs positives; et si l'on fait abstraction de l'attraction en raison inverse du carré des distances, qui n'a aucune influence sensible sur les phénomènes dépendans de la force moléculaire proprement dite, ces valeurs décroîtront très rapidement et sans alternative, à mesure que la variable r augmentera, et elles deviendront insensibles pour toute valeur sensible de r. Pour une certaine valeur de cette distance, on pourra avoir $Fr = fr$ et $R = 0$; le signe de R sera différent en-deçà et au-delà, soit que la répulsion Fr l'emporte d'abord sur l'attraction fr, soit que le contraire ait lieu à l'égard de ces deux forces.

Lorsque les deux molécules m et m' ne seront pas assez éloignées l'une de l'autre pour que leur forme n'ait aucune influence sur leur action mutuelle, cette action ne sera plus dirigée nécessairement suivant la droite MM', et il pourra même arriver qu'elle ne se réduise pas à une seule force. Ses composantes seront toujours des fonctions de r, qui n'auront de valeurs sensibles que pour les valeurs insensibles de cette variable; mais elles dépendront, en outre, des angles qui déterminent la direction de la droite MM' par rapport à des sections déterminées de m et m'; en sorte qu'elles varieront, si l'une des molécules vient à tourner autour de l'autre, ou sur elle-même, sans que la distance r de leurs centres de gravité ait changé. Ce cas général est celui des corps solides; le cas particulier, dans lequel l'action moléculaire se réduit à la force R, a lieu dans les fluides; ce qui peut provenir de la distance de leurs molécules, qui serait plus grande que dans les solides, ou de ce qu'elles s'écarteraient moins de la forme sphérique.

Pour former les équations de l'équilibre des corps solides et des liquides, il n'est pas nécessaire de calculer la force totale qui agit sur une molécule isolée. Ces équations et les pressions intérieures ne dépendent que de la résultante des actions qui ont lieu entre deux parties du corps, de grandeur insensible, mais qui comprennent, l'une et l'autre, un nombre extrêmement grand de molécules; leur distribution, dans chacune des deux parties du corps, nous est entièrement inconnue; et il y a lieu de croire qu'elle n'affecte aucune sorte de régularité, soit dans un fluide, soit dans un solide non cristallisé et qui n'est pas comprimé, par des forces étrangères, dans un sens plutôt que dans un autre; mais, si l'on suppose que la sphère d'activité de chaque molécule, quoique son rayon soit insensible, s'étende néanmoins à un nombre extrêmement grand des molécules circonvoisines, la résultante dont il est question sera une fonction de l'intervalle moyen ϵ, déterminée et indépendante des irrégularités de leur distribution. C'est sur cette hypothèse qu'est fondé essentiellement le calcul des forces moléculaires; on peut l'admettre comme étant conforme à la nature, et l'on y est conduit en considérant l'influence des masses dans les phénomènes qui sont du ressort de la Chimie. Dans le cas d'un corps solide comprimé par des forces étrangères, dont il ne s'agit pas dans cet ouvrage, l'action d'une partie du corps sur une autre dépend, en grandeur et en direction, du sens de la compression, et dans le cas d'un corps cristallisé, elle dépend aussi de la supposition qu'on fait sur la disposition respective des molécules et sur la direction des forces qui émanent de chaque molécule.

La force R, relative à l'action de deux molécules isolées m et m', est une quantité insensible; mais on peut concevoir deux masses de grandeur quelconque et d'un même volume qui sera pris pour unité, dont l'une aurait la densité ρ du corps autour de m, et l'autre la densité ρ' autour de m', et qui seraient telles, que toutes les molécules de l'une agissent, par hypothèse, sur toutes les molécules de l'autre, suivant des directions parallèles, et avec la même intensité que m agit sur m'. L'action totale de l'une de ces masses sur l'autre sera une force équivalente à un poids donné, et elle exprimera la mesure de la force moléculaire, rapportée aux unités de volume et relative à la distance r,

à l'endroit du corps où se trouvent les molécules m et m'. Si l'on désigne par φ cette mesure, φ sera une fonction de r, insensible pour toute valeur sensible de r, proportionnelle au produit des nombres de molécules contenues dans les deux unités de volume, ou, ce qui est la même chose, au produit $\rho\rho'$, et dépendante en outre, dans les corps hétérogènes, des coordonnées de m et de m'. Près de la surface de séparation de deux liquides, ou d'un liquide en contact avec un solide, cette quantité φ variera très rapidement, non-seulement par rapport à r, mais aussi par rapport à la distance à cette surface, par suite de la variation rapide que la densité éprouve dans l'épaisseur de la couche superficielle. Le produit de φ et d'une puissance positive de r sera partout insensible, en même temps que φ, pour toute valeur sensible de r; la somme des valeurs de ce produit, ou bien une intégrale, telle que $\int r^4 \varphi dr$, par exemple, prise entre des limites de grandeur sensible, sera également insensible. Si donc on doit prendre cette intégrale depuis zéro, ou une valeur insensible de r, jusqu'à une valeur sensible ou seulement plus grande que le rayon d'activité moléculaire, il sera permis, sans aucune erreur appréciable, d'étendre cette même intégrale jusqu'à une valeur de r aussi grande que l'on voudra, et même jusqu'à $r = \infty$. C'est pour cette raison que les résultantes des forces moléculaires sont indépendantes de la grandeur du rayon d'activité des molécules, qui ne saurait être fixé d'une manière précise, et dont on sait seulement qu'il est insensible.

En calculant ces résultantes, j'ai supposé que toutes les forces, attractives ou répulsives, qui agissent sur chaque molécule, émanent des autres molécules comprises dans sa sphère d'activité, et je n'ai point eu égard à l'action du calorique qui se trouve actuellement dans les pores sous forme rayonnante. L'expérience prouve, en effet, que la portion de calorique qui se meut dans le vide est extrêmement petite par rapport à celle qui est attachée aux parties pondérables des corps et qui entre dans la composition de leurs molécules; car si l'on réduit ou si l'on augmente subitement un espace dans lequel on a fait le vide aussi exactement qu'il est possible, on n'observe aucune variation de chaleur, ni dans cet espace, ni dans les corps environnans, contrairement à ce qui arrive dès que ce

même espace contient un tant soit peu d'air ou d'un gaz quelconque.

(131). La parfaite mobilité des fluides est ce qui les distingue des corps solides; il en résulte une propriété spéciale des fluides, sur laquelle sont fondées les équations de leur équilibre, et qui dérive de la nature des actions mutuelles de leurs molécules. Pour expliquer, avec précision, en quoi consiste cette propriété, il faut comparer les effets de la compression dans les corps solides et dans les fluides.

Lorsque la forme d'un corps solide est changée, et que ses molécules sont déplacées par des forces quelconques, agissant dans son intérieur ou à sa surface, tous les points matériels qui étaient primitivement situés sur une même droite, d'une longeur insensible, sont encore en ligne droite après leurs déplacemens. Si M et M′ sont les centres de gravité de deux molécules extrêmement rapprochées l'une de l'autre, la droite MM′ rencontre la même série de molécules dans les deux états successifs du corps; par conséquent, l'augmentation ou la diminution de longueur qu'elle subit, comparée à sa longueur primitive, fait connaître la dilatation ou la contraction du corps suivant la direction MM′. Il arrive, en général, que la contraction, positive ou négative, est différente en différens sens autour d'un même point M, et qu'il y a même dilatation dans un sens et contraction dans une autre direction.

La même chose n'a pas lieu relativement aux fluides. Lorsque les molécules d'un fluide homogène ou hétérogène sont sollicitées par des forces données, ou qu'une pression, plus ou moins grande, est exercée à sa surface, il se comprime ou se dilate également en tous sens autour de chacun de ses points. Une droite MM′, aussi petite qu'on voudra, qui joint deux points du fluide, ne rencontre plus les mêmes molécules avant et après l'application de ces forces. Une partie des molécules qu'elle traversait d'abord reste sur cette droite; une autre partie s'en écarte de différens côtés, et d'autres molécules viennent s'y ranger : d'où il résulte que le raccourcissement ou l'allongement de la droite MM′ ne peut plus faire connaître la contraction ou la dilatation du fluide suivant sa direction, et qu'il est même possible que le fluide change de forme, sans qu'il y ait dilatation ou con-

traction dans aucune de ses parties, ce qui n'a jamais lieu à l'égard des corps solides. Après les déplacemens de ses molécules, un fluide se trouve donc constitué autour de chaque point M, comme il l'était auparavant; et l'on doit se représenter les molécules situées dans la sphère d'activité de M, comme un système qui reste toujours semblable à lui-même, et qui est seulement construit sur une plus petite ou sur une plus grande échelle, en considérant toutefois ce système dans son état moyen, abstraction faite des irrégularités de la distribution des molécules dont il est composé. D'un point M à un autre, la contraction ou la dilatation égale en tous sens, et par suite l'intervalle moyen ϵ et la densité ρ, varient d'ailleurs suivant des lois dépendantes des forces données qui agissent sur les molécules, et aussi de la nature du fluide, quand il n'est pas homogène.

Cette propriété caractéristique des fluides de se contracter ou de se dilater également en tous sens, et de se reconstituer toujours semblablement à eux-mêmes autour de chaque point, peut être attribuée à la parfaite mobilité de leurs molécules, résultant de ce qu'elles sont à peu près sphériques, ou assez éloignées les unes des autres pour que leur forme n'ait aucune influence sensible sur leur action mutuelle. On conçoit, en effet, que dans cette hypothèse, si l'on exerce une pression quelconque à la surface d'un fluide, il ne pourra pas arriver qu'il se contracte inégalement en des sens différens; car il n'y aurait aucune cause particulière qui pût retenir les molécules dans les directions où elles seraient le plus resserrées; et si des contractions inégales avaient lieu, ce ne pourrait être qu'un état d'équilibre instable, qu'on doit regarder comme physiquement impossible. Au contraire, si le fluide est d'abord dans un état d'équilibre subsistant, et qu'on y applique de nouvelles forces quelconques, le second état d'équilibre auquel il parviendra pour obéir à ces forces sera stable comme l'état primitif, si le nouvel arrangement de ses molécules autour de chaque point est semblable à celui qui avait lieu auparavant.

Dans les corps solides, cristallisés ou non, la cause particulière qui retient les molécules sur les directions où elles sont plus ou moins resserrées, ne peut être que la partie de leur action mutuelle qui dépend de leurs formes et de leurs positions relatives; en sorte que cette partie de la force moléculaire est, comme on l'a dit plus haut, la

cause de la solidité ou de la cristallisation. Si l'on écarte les molécules par une addition de calorique, cette force secondaire diminue, en général, plus rapidement que l'autre partie de leur action mutuelle ; son effet peut devenir insensible, et le corps passe alors à l'état fluide. La viscosité est un état intermédiaire entre la solidité et la parfaite fluidité, dans lequel la force secondaire dont il s'agit existe à un moindre degré que dans un solide, et empêche plus ou moins les liquides de se contracter ou de se dilater également en tous sens, autour de chaque point.

De ces diverses considérations, on conclut que la force R du numéro précédent, indépendante de sa propre direction, convient exclusivement aux fluides élastiques et aux liquides dépourvus de toute viscosité. La théorie exposée dans cet ouvrage étant fondée sur l'hypothèse d'une force moléculaire de cette nature, il s'ensuit qu'elle ne s'applique rigoureusement qu'aux liquides qui ne sont aucunement visqueux. Les applications que nous avons faites à différens liquides, des formules déduites de cette théorie, supposent donc qu'ils n'ont qu'un faible degré de viscosité ; ce qui se trouve confirmé par le peu de différence qui existe, en général, entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience.

Observons enfin que quand une pression extérieure ou d'autres forces données sont appliquées à un fluide et déplacent ses molécules, elles devront toujours employer un certain intervalle de temps pour parvenir, autour de chaque point, à une disposition semblable à leur arrangement primitif. Ce temps, quelque petit qu'on le suppose, peut être très différent dans les différens fluides ; mais rien ne se faisant instantanément, il ne saurait être tout-à-fait nul, lors même qu'il s'agit d'un liquide entièrement dénué de viscosité, ou d'un fluide aériforme. Il n'influe pas sur l'état d'équilibre qui ne s'observe qu'après que cet intervalle de temps est écoulé ; mais, dans le cas du mouvement, la position respective des molécules changeant sans cesse, on conçoit que cette variation continuelle peut être assez rapide pour qu'elles n'aient pas le temps de revenir, comme dans le cas de l'équilibre, à une disposition toujours semblable à elle-même : il en résulte donc que dans un fluide en mouvement, et surtout quand les vitesses relatives de ses molécules sont très grandes, les

dilatations et les condensations que le fluide éprouve ne sont pas constamment égales en tous sens autour de chaque point; circonstance qui rapproche, en quelque sorte, le mouvement des fluides de celui des solides élastiques, et rend plus ou moins analogues les vibrations très rapides de ces deux sortes de corps, ainsi que je l'ai déjà remarqué dans une autre occasion.

---

§ II. *Conversion des sommes en intégrales.*

(132). Les liquides n'éprouvent que de très petits changemens de volume pour de très grandes variations dans les pressions extérieures auxquelles ils sont soumis. D'après l'ancienne expérience du physicien Canton, la dilatation de l'eau, par exemple, n'est que de 46 millionièmes, pour une diminution de pression égale à la pression ordinaire de l'atmosphère; et, dans ces derniers temps, on a trouvé qu'il fallait employer une pression équivalente à environ 1100 atmosphères, pour diminuer son volume d'à peu près six centièmes : le mercure résiste encore beaucoup plus à la compression. Il résulte de là que la pression exercée, en vertu de l'action moléculaire, par une partie d'un liquide sur une partie adjacente, doit aussi varier dans un très grand rapport, pour de très petites variations de l'intervalle moyen des molécules; or, il faut pour cela que les deux forces, attractive et répulsive, dont l'action moléculaire est la différence, soient extrêmement grandes l'une et l'autre par rapport à cette différence; en sorte que chacune d'elles augmentant ou diminuant inégalement d'une très petite partie de son intensité, pour ces très petites variations de l'intervalle moyen, leur différence se trouve avoir augmenté ou diminué dans un très grand rapport. C'est aussi pour cela que la somme qui exprime la pression intérieure n'ayant pas une valeur extrêmement grande, une autre somme d'où dépendent les effets de la capillarité, et qui s'effectue sur un produit contenant un facteur de grandeur insensible, de plus que la première, peut néanmoins avoir encore une valeur sensible.

Les lois de l'attraction des molécules et de la répulsion calorifique étant inconnues, on ne peut pas décider, *à priori*, si la somme qua-

druple qui exprime la pression intérieure est réductible à une intégrale définie; mais nous avons prouvé, dans le n° 13, que cette réduction est impossible, du moins à l'égard de la partie de la pression relative à une surface plane, d'après les conditions que cette pression doit remplir; et, en effet, on peut faire une infinité d'hypothèses sur les lois de l'attraction et de la répulsion qui ne permettent pas de remplacer les sommes relatives à la différence de ces deux forces par des intégrales, quoique, dans ces sommations, les variables croissent par degrés extrêmement petits. Il s'agit ici de donner des exemples de cette irréductibilité, en nous bornant, pour plus de simplicité, à des sommes de fonctions d'une seule variable.

(133). Soit φx une fonction donnée de la variable x. Faisons croître x par des différences constantes dont la grandeur sera représentée par ϵ; supposons que les valeurs de x s'étendent depuis $x = \epsilon$ jusqu'à $x = \infty$; et désignons par p la somme des valeurs correspondantes de φx, ou, autrement dit, faisons

$$p = \varphi\epsilon + \varphi 2\epsilon + \varphi 3\epsilon + \varphi 4\epsilon + \text{etc.};$$

la série se prolongeant à l'infini. L'intégrale $\int_0^\infty \varphi x dx$, divisée par ϵ et diminuée de $\frac{1}{2}\varphi 0$, sera une valeur approchée de la somme p; et l'on a vu, dans mon Mémoire sur le *Calcul numérique des Intégrales définies* (*), que la différence de ces deux quantités peut s'exprimer par une autre intégrale définie, de sorte que l'on aura exactement

$$p = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi 0 + \frac{2}{\epsilon}\int_0^\infty \left[\Sigma_i^\infty \cos\frac{2i\pi x}{\epsilon}\right]\varphi x dx; \qquad (1)$$

i étant un nombre entier et positif auquel répond la somme Σ, qui s'étend depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$.

Par le procédé de l'intégration par partie, on réduira la seconde intégrale contenue dans cette formule, en une série ordonnée suivant les puissances paires de ϵ, dont les coefficiens renfermeront les différentielles impaires de φx, relatives aux deux valeurs extrêmes

(*) Tome VI des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*.

de x. Je supposerai que cette fonction et tous ses coefficiens différentiels s'évanouissent à la limite $x = \infty$; et en représentant par φ, φ', φ'', etc., les valeurs de φx, $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, etc., qui répondent à $x = 0$, il en résultera

$$p = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi - a\epsilon\varphi' + a'\epsilon^3\varphi''' - a''\epsilon^5\varphi^v + \text{etc.}, \quad (2)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$a = \frac{1}{2\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}, \quad a' = \frac{1}{8\pi^4}\sum_1^\infty \frac{1}{i^4}, \quad a'' = \frac{1}{32\pi^6}\sum_1^\infty \frac{1}{i^6}, \text{ etc.}$$

Les quantités a, a', a'', etc., forment une série de fractions décroissantes dont on connaît les valeurs exactes, savoir :

$$a = \frac{1}{12}, \quad a' = \frac{1}{720}, \quad a'' = \frac{1}{30240}, \quad \text{etc.}$$

De plus, à quelque terme que l'on arrête la série (2), le reste qu'il y faudra ajouter pour avoir la valeur exacte de p, sera exprimé par une intégrale définie, dont la valeur changera généralement d'un terme à l'autre, et dont on pourra assigner des limites qui feront connaître si la série est convergente. Dans le Mémoire cité, j'ai examiné en détail le cas singulier où le reste est constant, et où les termes de la série (2) s'évanouissent tous, excepté les deux premiers; ce qui oblige de recourir à l'équation (1) pour calculer la valeur de p.

En général, si l'on prend pour φx une fonction du genre de celles qui varient très rapidement et sont insensibles dès que la variable a acquis une grandeur sensible, les quantités φx, $x\frac{d\varphi x}{dx}$, $x^2\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $x^3\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$, etc., seront toutes du même ordre de grandeur; pour que la série des produits φ, $\epsilon\varphi'$, $\epsilon^2\varphi''$, $\epsilon^3\varphi'''$, etc., et, à plus forte raison, la série (2), soient très rapidement décroissantes, il suffira donc que ϵ soit très petit, eu égard à l'étendue des valeurs sensibles de φx; et, dans cette hypothèse, la seconde intégrale que contient la formule (1) sera toujours une quantité extrêmement petite, soit qu'elle se développe en série suivant les puissances de ϵ, soit que

ce développement n'ait pas lieu, à cause que toutes les quantités φ', φ'', φ''', etc., sont égales à zéro.

Pour fixer les idées, supposons que x exprime une distance variable, et que ε soit une ligne constante, d'une longueur insensible. Prenons, pour premier exemple,

$$\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}};$$

c étant une constante donnée, e la base des logarithmes népériens, et α une ligne constante, d'une longueur insensible, afin que l'étendue des valeurs sensibles de φx soit aussi insensible. En faisant $\varepsilon = \mathfrak{C}\alpha$, et supposant que $\mathfrak{C}$ soit une fraction extrêmement petite, l'équation (2) deviendra

$$p = c\left(\frac{1}{\mathfrak{C}} - \frac{1}{2} + a\mathfrak{C} - a'\mathfrak{C}^3 + a''\mathfrak{C}^5 - \text{etc.}\right);$$

et cette série sera très convergente, puisque ses termes décroîtront plus rapidement que les puissances impaires de $\mathfrak{C}$. Dans cet exemple, la valeur de p se réduira sensiblement à son premier terme, savoir :

$$p = \frac{c}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx.$$

Soit, en second lieu,

$$\varphi x = ce^{-\frac{x^2}{\alpha^2}};$$

nous aurons $\varphi' = 0$, $\varphi''' = 0$, $\varphi^v = 0$, etc. Ce sera donc un des cas où la seconde intégrale contenue dans la formule (1) n'est pas développable suivant les puissances de ε; mais comme on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \cos\frac{2i\pi x}{\varepsilon} dx = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{4i^2\pi^2\alpha^2}{\varepsilon^2}},$$

l'équation (1) deviendra

$$p = \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\pi} + \gamma e^{-\gamma} - \gamma e^{-4\gamma^2} + \gamma e^{-9\gamma^2} - \text{etc.}\right),$$

en faisant $\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} = \gamma$. Or, γ étant un très grand nombre dans l'hypo-

thèse de ε très petit par rapport à α, cette série sera extrêmement convergente, et tous ses termes, à partir du troisième, seront tout-à-fait insensibles. On voit, de plus, qu'on pourra négliger le second terme par rapport au premier, et réduire cette valeur de p à

$$p = \frac{c\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx,$$

comme dans le premier exemple.

Ces deux exemples suffisent pour montrer que quand on suppose l'intervalle ε des valeurs successives de x extrêmement petit par rapport à l'étendue des valeurs sensibles de φx, la somme p se transformera en une intégrale divisée par ε, toutes les fois que φx ne sera composé que d'un seul terme, ou de plusieurs termes de même signe; mais cela n'aura pas toujours lieu, lorsque cette fonction sera composée de deux parties, de signes contraires. Ainsi, dans le cas de

$$\varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}},$$

c, c', α, α', étant des constantes positives, on aura

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'}{\varepsilon}, \quad \varphi = c - c';$$

et quoique $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ et $\frac{\alpha'}{\varepsilon}$ soient de très grands nombres, il suffira que les coefficiens c et c' soient, à très peu près, en raison inverse de ces nombres, pour que la valeur de φ soit comparable et même très supérieure à celle de $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx$, et, conséquemment, pour que la série (2) ne puisse plus se réduire à son premier terme. Si la fonction φx s'évanouissait avec x, et qu'on eût, par exemple,

$$\varphi x = \left(ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}}\right)x,$$

il en résulterait

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha^2}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'^2}{\varepsilon}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = c - c';$$

et ce serait alors le troisième terme de la série (2) qui deviendrait

ciproquement, cette propriété des fluides pourrait se conclure immédiatement de ce principe, considéré comme une donnée de l'expérience. En effet, on démontre directement et sans difficulté que, selon que la contraction est la même ou qu'elle varie dans différentes directions autour d'un point M, la pression est aussi constante ou variable, relativement aux différens plans menés par ce point. Il en résulte que, d'après l'observation qui termine le n° 131, le principe de l'égalité de pression n'a pas lieu dans les fluides en mouvement, du moins lorsque leurs molécules sont animées de très grandes vitesses; mais, sur ce point, nous renverrons au Mémoire cité précédemment (n° 130); et nous ne nous occuperons ici que de leur équilibre.

Les équations de l'équilibre d'un fluide quelconque ne dépendent que des forces données qui lui sont appliquées, et de la partie p de la pression, à cause de la propriété très digne de remarque (n° 78) dont jouissent l'autre partie V de la pression normale et les composantes tangentielles T et T'. Si ces forces agissent en tous les points de la surface d'une portion A du fluide, prise dans l'intérieur de la masse, elles se feront équilibre, sans le secours d'aucune autre force donnée, quelle que soit la forme de A, pourvu seulement que ses dimensions surpassent le rayon d'activité des molécules, et qu'il n'y ait, en aucun point de sa surface, deux ou plusieurs plans tangens comprenant un angle de grandeur finie, en sorte que cette surface ne présente aucune pointe ou arête vive.

Cela étant, supposons que les dimensions de A soient insensibles, mais plus grandes que le rayon d'activité moléculaire. Soit M un point de A qui sera, par exemple, son centre de gravité, et M' un point quelconque de sa surface. Appelons r le rayon vecteur MM', dont la grandeur insensible variera d'une manière quelconque avec sa direction; et désignons par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de M, et par $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, les coordonnées de M' rapportées aux mêmes axes. Si la quantité p répond au point M, et qu'elle devienne p' au point M', nous aurons

$$p' = p + \frac{dp}{dx}x' + \frac{dp}{dy}y' + \frac{dp}{dz}z';$$

en négligeant les carrés et les produits de x', y', z'. Par le point M', menons, dans l'intérieur de A, une normale à sa surface, et soient α, $\mathcal{C}$, γ, les angles que sa direction fait avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le même point. En représentant par ω l'élément différentiel de cette surface qui répond au point M', les composantes parallèles à ces mêmes axes, de la pression $p'\omega$ relative à cet élément, seront

$$p'\omega\cos\alpha, \quad p'\omega\cos\mathcal{C}, \quad p'\omega\cos\gamma.$$

Pour avoir les composantes totales de la pression extérieure qui doivent faire équilibre aux forces données qui agissent sur A, il faudra donc calculer les sommes de ces trois quantités, étendues à la surface entière de A.

Or, supposons, pour fixer les idées, que l'axe des z soit vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur, et que chaque verticale ne rencontre qu'en deux points la surface de A. Circonscrivons à cette surface un cylindre vertical, qui la divisera en deux parties. L'angle γ sera obtus dans la partie supérieure, et aigu dans la partie inférieure. Si donc le point M' appartient à la première partie, et qu'on désigne par c la projection horizontale de ω, on aura

$$c = -\omega\cos\gamma.$$

Soit, de plus, M_1 le point de la partie inférieure situé sur la même verticale que M', et, répondant, conséquemment, aux mêmes coordonnées horizontales x' et y'. Représentons par ω_1, γ_1, p_1, z_1, ce que deviennent ω, γ, p, z', relativement à ce point M_1. La projection horizontale de l'élément ω_1 sera la même que celle de ω; on aura donc aussi

$$c = \omega_1\cos\gamma_1;$$

et la somme des composantes verticales de la pression, qui répondent à ces deux élémens, sera $(p_1 - p')c$; quantité qui se réduit à $\frac{dp}{dz}(z_1 - z')c$, en ayant égard à la valeur de p', et observant que celle de p_1 s'en déduit par le changement de z' en z_1. Mais si l'on décompose le volume entier de A en élémens prismatiques et verticaux,

et que l'on représente par u le volume du prisme terminé par ω et ω_1, et par l sa longueur $M'M_1$, on aura

$$u = cl, \quad l = z' - z_1.$$

La quantité précédente deviendra donc $-\frac{dp}{dz}u$; et si l'on désigne par v le volume entier de A, on en conclura $-\frac{dp}{dz}v$, pour la composante totale des pressions verticales et dirigées de bas en haut. On trouvera de même $-\frac{dp}{dx}v$ et $-\frac{dp}{dy}v$, pour les composantes totales des pressions extérieures, suivant les axes des x et des y positives.

Maintenant, soient X, Y, Z, parallèlement aux axes des x, y, z, les forces données et rapportées à l'unité de masse qui répondent au point M, et qui sont, par exemple, la pesanteur, l'attraction en raison inverse du carré des distances qui émane des molécules mêmes du fluide, et d'autres attractions ou répulsions, agissant suivant des lois quelconques. Soit aussi ρ la densité du liquide en ce point. En négligeant les variations de ces quatre quantités dans toute l'étendue de A, les forces motrices de cette petite portion du fluide seront ρvX, ρvY, ρvZ; en les comparant aux pressions extérieures, et supprimant le facteur commun v, on en conclura

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

pour l'équilibre de A; ce qui coïncide avec les équations connues de l'*Hydrostatique*.

On en déduit

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

pour l'équation qui servira à déterminer l'inconnue p en fonction des coordonnées x, y, z, du point M. Mais il ne faut pas perdre de vue que cette formule ne convient qu'aux points intérieurs du fluide, c'est-à-dire aux points situés à une distance de sa surface, plus grande que le rayon d'activité moléculaire; en sorte qu'on n'en doit pas conclure qu'on ait simplement $dp = 0$, pour l'équation de la surface libre ou soumise à une pression extérieure constante, d'un

liquide en équilibre. En vertu de cette équation, la résultante des forces données X, Y, Z, couperait cette surface à angle droit, en tous ses points; mais l'équation complète de la surface d'équilibre renferme un second terme (n° 29); et, à moins qu'elle ne soit tout-à-fait plane, son plan tangent n'est pas exactement perpendiculaire à la direction de la pesanteur, ou, généralement, à la résultante des forces X, Y, Z, qui ne proviennent pas de l'action moléculaire proprement dite.

---

§ IV. *Dépression du mercure dans le baromètre.*

(135). On a vu, dans le n° 108, que l'angle sous lequel la surface convexe du mercure non oxidé vient couper la surface du verre est égal à 45° 30′. En appelant b son cosinus, on a

$$b = 0{,}70091;$$

on sait aussi qu'en prenant le millimètre pour unité, la constante a^2, relative à la matière du mercure, est

$$a^2 = 6{,}5262;$$

il faudra donc employer ces valeurs pour calculer la dépression du mercure à la température de 12°,8, à laquelle elles se rapportent.

S'il s'agit d'un tube capillaire, on fera usage de la formule (11) du n° 54; et en désignant par δ la dépression du mercure, rapportée au point le plus élevé de sa surface, on aura

$$\delta = \frac{4{,}5746}{\alpha} - (0{,}1932)\,\alpha + (0{,}0559)\,\alpha^3; \qquad (1)$$

α étant le rayon du tube. Cette formule suppose que le rapport $\frac{\alpha}{a}$ soit une fraction peu considérable. Pour plus d'exactitude, il faudra augmenter ou diminuer son premier terme de $\frac{1}{5550}$ de sa valeur, pour chaque degré de température au-dessous ou au-dessus de 12°,8.

Lorsque ce sera, au contraire, le rapport $\frac{a'}{\alpha'}$ qui sera une fraction peu considérable, on emploiera la formule (s) du n° 110; et en faisant

$$a + 0{,}2690 = a',$$

on en conclura

$$\delta = (2{,}6500)\sqrt{a'}\, e^{-a'(0{,}5536)}; \qquad (2)$$

le millimètre étant toujours l'unité.

Pour que des hauteurs barométriques, mesurées avec différens baromètres à large cuvette, soient comparables entre elles et puissent donner la valeur exacte de la pression de l'atmosphère, il y faut ajouter les valeurs de δ relatives aux diamètres respectifs des tubes cylindriques, où le mercure s'élève; et, d'après la remarque du n° 127, il faut, en outre, que ces tubes soient verticaux, ou bien, s'ils ne l'étaient pas, il y aurait encore une autre petite correction à faire subir aux hauteurs observées, qui doivent toujours répondre au point le plus élevé de la surface convexe du mercure. Les formules (1) et (2) suffiront pour déterminer les valeurs de δ, dans les deux cas extrêmes, d'un très petit et d'un très grand diamètre. Dans les autres cas, il faudra recourir à la méthode des quadratures, pour déduire, de l'équation de la surface du mercure, la valeur numérique de δ relative à une grandeur donnée du diamètre, ou, réciproquement, la grandeur du diamètre qui répond à une valeur donnée de δ. C'est de cette manière qu'a été formée la table des dépressions du mercure, que Laplace a insérée dans la *Connaissance des Tems* de l'année 1812, et qui a été calculée par M. Bouvard. Elle suppose que la surface du mercure coupe celle du verre sous un angle de 43° 12′, et que le mercure s'abaisserait de 94766 millimètres, dans un tube dont le diamètre serait un dix-millième de millimètre; ce qui revient à prendre

$$b = 0{,}72897, \qquad a^2 = 6{,}5000,$$

pour les valeurs des constantes que j'ai désignées par b et a^2. Il serait à désirer que ce calcul fût répété, en partant des valeurs de b et a^2 que j'ai adoptées, et qui satisfont mieux aux observations

(n° 108). En attendant, voici la table dont il s'agit, où les diamètres et les dépressions sont exprimés en millimètres.

Diamètres intérieurs du tube.	Dépressions du mercure.
2	4,5599
3	2,9025
4	2,0388
5	1,5055
6	1,1482
7	0,8813
8	0,6851
9	0,5354
10	0,4201
11	0,3506
12	0,2602
13	0,2047
14	0,1597
15	0,1245
16	0,0970
17	0,0754
18	0,0586
19	0,0430
20	0,0352.

On peut aussi former, par l'expérience, une table des dépressions du mercure, en comparant, à un même instant, c'est-à-dire sous une même pression atmosphérique, la différence des hauteurs du mercure dans un baromètre à siphon, dont les deux branches verticales ont le même diamètre, aux hauteurs de ce fluide au-dessus de son niveau extérieur, dans différens baromètres à large cuvette. C'est, en effet, par l'observation que Charles Cavendish, le père du célèbre physicien de ce nom, a formé la table que l'on trouve dans les *Transactions philosophiques* de l'année 1776. Voici cette table en pouces anglais, comme l'auteur l'a donnée, et en millimètres.

DIAMÈTRES en pouces anglais.	DÉPRESSIONS en pouces anglais.	DIAMÈTRES en millimètres.	DÉPRESSIONS en millimètres.
0,10	0,140	2,54	3,5560
0,15	0,092	3,81	2,3368
0,20	0,067	5,08	1,7018
0,25	0,050	6,35	1,2700
0,30	0,036	7,62	0,9144
0,35	0,025	8,89	0,6350
0,40	0,015	10,16	0,3810
0,50	0,007	12,70	0,1778
0,60	0,005	15,24	0,1270.

Ces dépressions étant le résultat de l'expérience, celles qui répondent aux plus petits et aux plus grands diamètres peuvent servir à vérifier les formules (1) et (2). Or, si l'on fait successivement

$$2a = 2{,}54, \quad 2a = 3{,}81,$$

la formule (1) donne

$$\delta = 3{,}4712, \quad \delta = 2{,}4199;$$

les différences $0^{mm},0748$ et $-0^{mm},0831$, avec l'expérience, peuvent être attribuées, en grande partie, aux erreurs dont ce genre d'observations est susceptible. Soit de même successivement

$$2a = 15{,}24, \quad 2a = 12{,}70, \quad 2a = 10{,}16;$$

on aura, d'après la formule (2),

$$\delta = 0{,}0945, \quad \delta = 0{,}1747, \quad \delta = 0{,}5173;$$

ce qui ne diffère de l'observation que de

$$0^{mm},0325, \quad 0^{mm},0031, \quad 0^{mm},0635.$$

La formule (1) se trouve encore confirmée par une observation de M. Gay-Lussac, qui a trouvé la dépression du mercure égale à $4^{mm},69$, dans un tube dont le diamètre était $1^{mm},905$. En y faisant $a = 0{,}9525$, la formule (1) donne $\delta = 4{,}6730$; ce qui ne diffère pas de $0^{mm},02$.

(136). J'ajouterai à ce paragraphe la note suivante sur les *Baromètres à surface plane ou concave*, qui m'a été communiquée par M. Dulong, et que les physiciens liront avec intérêt.

« Dom Casbois, professeur de Physique à Metz, indiqua ancien-
» nement un moyen de construire des baromètres à surface plane
» ou même concave, ou, ce qui revient au même pour la théorie,
» des appareils en forme de siphons composés d'une branche capil-
» laire et d'une autre de gros calibre, dans lesquels le mercure se te-
» nait à une hauteur égale dans les deux branches, ou même plus
» grande dans le tube capillaire que dans l'autre.

» Il crut trouver la cause de ce phénomène dans l'exclusion plus
» complète de l'humidité, parce que c'est en faisant bouillir pendant
» long-temps le mercure dans les appareils qu'il réussissait à le pro-
» duire. Quant à l'explication même qu'il donne de la forme concave
» de la surface déduite de la privation absolue de toute humidité,
» elle ne mérite aucune attention.

» Il paraît que Laplace et Lavoisier réussirent aussi à construire
» un baromètre à surface plane, et qu'ils partagèrent l'opinion du
» physicien que nous venons de citer sur l'origine de cette particu-
» larité, en l'attribuant à la dessiccation plus parfaite du mercure et
» des parois intérieures du tube.

» Lorsque l'on a construit, soi-même, des baromètres avec les
» précautions usitées pour les purger d'air et d'humidité, on a peine
» à concevoir qu'il puisse rester dans ces instrumens une certaine
» quantité d'eau, qu'une plus longue ébullition parviendrait à ex-
» pulser; aussi n'avais-je jamais été satisfait de cette explication,
» qui, d'ailleurs, ne se concilierait pas facilement avec la théorie
» des phénomènes capillaires. Mais c'est en construisant des thermo-
» mètres à mercure que j'ai été conduit à reconnaître la véritable
» cause du phénomène décrit par Casbois.

» J'avais remarqué que, en réitérant l'ébullition du mercure pour
» chasser les dernières bulles de gaz, le tube se trouvait sali in-
» térieurement au point de ne plus permettre de distinguer la sur-
» face libre de la colonne liquide. A l'aide d'une loupe, on dis-
» tinguait de petites masses irrégulières de mercure adhérentes aux
» parois intérieures, et, dans quelques endroits, un dépôt d'appa-

» rence cristalline et rougeâtre. Comme le mercure avait été pu-
» rifié avec soin avant d'être introduit dans l'instrument, on ne
» pouvait se rendre compte de l'altération qu'il avait éprouvée,
» sans admettre la formation d'une certaine quantité d'oxide pen-
» dant l'ébullition. Il est certain, d'ailleurs, qu'en triturant du mer-
» cure avec son deutoxide, celui-ci se dissout en petite quantité
» dans le liquide, et lui communique l'apparence d'un amalgame.
» Dans cet état, il adhère plus fortement au verre, s'y attache,
» sans le mouiller cependant, et, par cette raison, il ne peut plus
» être employé comme liquide thermométrique ou barométrique.
» On le ramène à ses propriétés primitives en l'agitant avec de l'acide
» sulfurique concentré ou une dissolution d'acide hydro-sulfurique,
» qui enlève ou décompose l'oxide. Le mercure distillé même n'est
» pas toujours exempt d'oxide; et, lorsqu'il doit servir à la construc-
» tion des thermomètres ou des baromètres, il est utile de le purifier
» préalablement par l'un des moyens qui viennent d'être indiqués.
» Il paraît que le mercure tenu pendant quelque temps en ébulli-
» tion dans l'air atmosphérique contient bientôt assez d'oxide pour
» que ses propriétés physiques en soient notablement modifiées; et
» pour prouver que les modifications que nous venons de signaler
» sont réellement le résultat de l'oxidation, il suffira de dire que si
» l'on prend du mercure complètement privé d'oxide, et si l'on
» dispose l'appareil, comme je le fais depuis long-temps, de ma-
» nière que la surface libre du métal soit plongée dans une atmos-
» phère de gaz hydrogène, on peut alors prolonger à volonté l'é-
» bullition, sans observer la moindre altération dans les propriétés
» physiques et la manière d'être de ce liquide en contact avec le
» verre.

» Cette remarque s'applique également à la construction des ther-
» momètres et à celle des baromètres. Si l'on répète avec cette pré-
» caution l'expérience de Casbois, la surface libre du mercure affecte
» la même courbure que dans les baromètres ordinaires, quelle que
» soit la durée de l'ébullition.

» Dans les baromètres d'un large diamètre, l'anomalie observée
» par Casbois est plus difficile à produire, parce que la masse du
» mercure étant plus considérable, une même quantité absolue

» d'oxide produit un effet moins sensible ; on peut même se dis-
» penser, dans ce cas, de faire bouillir le liquide métallique dans
» un gaz qui ne contienne pas d'oxigène libre. Mais lorsque les
» tubes n'ont qu'un diamètre de 5 ou 6 millimètres et au-dessous,
» il serait utile d'avoir recours à cet expédient ; car, autrement, la
» correction de la capillarité laisserait une assez grande incerti-
» tude.

» Ainsi, le résultat obtenu par Casbois tient tout simplement à
» ce que le mercure contenant en dissolution une légère propor-
» tion d'oxide du même métal, est un liquide qui diffère du mer-
» cure pur dans sa nature et ses propriétés physiques, et dont l'at-
» traction pour le verre, comme pour ses propres molécules, n'a
» plus la même intensité. »

---

§ V. *Expériences sur les mélanges.*

(137). Soient u et u' deux fractions dont la somme est l'unité. Supposons qu'on ait mêlé deux liquides différens dans la proportion de u et u' ; désignons par ρ la densité du mélange, et par h la hauteur à laquelle il s'élève dans un tube capillaire d'un rayon α, préalablement mouillé par ce liquide mélangé. D'après la formule du n° 53, on aura

$$\rho\left(h+\tfrac{1}{3}\alpha\right)=u^2f+uu'f_1+u'^2f', \qquad (a)$$

en mettant, pour plus d'exactitude, $h+\frac{1}{3}\alpha$ au lieu de h, et désignant par f, f_1, f', trois coefficiens positifs et indépendans de u et u'. Cette formule est fondée sur la supposition que la perte de chaleur qui a lieu dans le mélange, quand la température est redevenue la même qu'auparavant, n'influe pas sur l'intégrale relative aux forces moléculaires, de laquelle dépendent les phénomènes de la capillarité ; hypothèse qui s'accorde avec le décroissement de la hauteur h, proportionnellement à l'augmentation de densité, dans le cas d'un seul liquide à différentes températures. Il est intéressant

de vérifier si cette hypothèse convient également au cas de deux liquides mélangés; et, pour cela, je vais appliquer la formule (*a*) à des expériences que M. Gay-Lussac a faites, il y a déjà longtemps, mais qui n'avaient pas encore été publiées.

Les deux liquides sont l'eau et l'alcohol, ou l'eau et l'acide nitrique. Je supposerai que u se rapporte à la proportion de l'eau, et u' successivement à celle de l'alcohol et de l'acide nitrique, et je prendrai pour unités la densité de l'eau et le millimètre.

Relativement aux mélanges de l'eau et de l'alcohol, que je considérerai d'abord, voici les résultats de l'observation :

$$u = 1,\quad u' = 0,\quad \rho = 1{,}0000,\quad h = 23{,}16;$$

$$u = \tfrac{4}{5},\quad u' = \tfrac{1}{5},\quad \rho = 0{,}9779,\quad h = 13{,}77;$$

$$u = \tfrac{2}{3},\quad u' = \tfrac{1}{3},\quad \rho = 0{,}9657,\quad h = 11{,}31;$$

$$u = \tfrac{1}{2},\quad u' = \tfrac{1}{2},\quad \rho = 0{,}9415,\quad h = 10{,}00;$$

$$u = \tfrac{1}{3},\quad u' = \tfrac{2}{3},\quad \rho = 0{,}9068,\quad h = 9{,}56;$$

$$u = \tfrac{1}{5},\quad u' = \tfrac{4}{5},\quad \rho = 0{,}8726,\quad h = 9{,}40;$$

$$u = 0,\quad u' = 1,\quad \rho = 0{,}8196,\quad h = 9{,}182.$$

Dans toutes ces observations, le tube avait $1^{mm},296$ de diamètre, et la température a été de 8 à 9 degrés.

Si l'on fait successivement $u = 1$ et $u' = 0$, $u = 0$ et $u' = 1$, $u = \frac{1}{2}$ et $u' = \frac{1}{2}$, dans la formule (*a*); que l'on y substitue en même temps, pour ρ, les densités relatives à ces trois proportions d'eau et d'alcohol; et qu'on y mette aussi 0,648 au lieu de α, on en déduit

$$f = 23{,}376,\quad f' = 7{,}703,\quad f_1 = 7{,}395.$$

Pour des valeurs quelconques de u et u', la formule (*a*) deviendra donc

$$\rho\left(h + \tfrac{1}{3}\alpha\right) = (23{,}376)u^2 + (7{,}395)uu' + (7{,}703)u'^2.$$

J'en fais maintenant l'application à celles des expériences précédentes qui n'ont pas servi à en déterminer les coefficiens; et en désignant, pour chacune d'elles, par e l'excès de la hauteur calculée sur la hauteur observée, je trouve

$$u = \tfrac{4}{5},\quad u' = \tfrac{1}{5},\quad h = 16{,}604,\quad e = +\,2{,}858;$$

$$u = \tfrac{2}{3},\quad u' = \tfrac{1}{3},\quad h = 13{,}131,\quad e = +\,1{,}361;$$

$$u = \tfrac{1}{3},\quad u' = \tfrac{2}{3},\quad h = 8{,}235,\quad e = -\,1{,}325;$$

$$u = \tfrac{1}{5},\quad u' = \tfrac{4}{5},\quad h = 7{,}865,\quad e = -\,1{,}535.$$

Or, les grandeurs de ces valeurs de e montrent que l'hypothèse sur laquelle la formule (a) est fondée, ne convient pas aux mélanges de l'eau et de l'alcohol; ce qui est d'autant plus singulier, qu'elle convient parfaitement, comme on va le voir, aux mélanges de l'eau et de l'acide nitrique, et qu'il y a eu, dans ces deux cas, perte de chaleur et concentration.

Par rapport aux mélanges d'eau et d'acide nitrique, on a, d'après l'expérience,

$$u = 1,\quad u' = 0,\quad \rho = 1{,}0000,\quad h = 22{,}68;$$

$$u = \tfrac{4}{5},\quad u' = \tfrac{1}{5},\quad \rho = 1{,}0891,\quad h = 20{,}52;$$

$$u = \tfrac{2}{3},\quad u' = \tfrac{1}{3},\quad \rho = 1{,}1474,\quad h = 19{,}17;$$

$$u = \tfrac{1}{2},\quad u' = \tfrac{1}{2},\quad \rho = 1{,}2151,\quad h = 17{,}66;$$

$$u = \tfrac{1}{3},\quad u' = \tfrac{2}{3},\quad \rho = 1{,}2751,\quad h = 16{,}35;$$

$$u = 0,\quad u' = 1,\quad \rho = 1{,}3691,\quad h = 14{,}08;$$

le diamètre du tube étant $1^{mm}{,}313$, et la température 10 à 12 degrés. Je détermine, comme dans le cas précédent, les valeurs de f et f', au moyen de la première et de la dernière observation, et celle de f_1, d'après la moyenne des quatre observations intermédiaires; la for-

mule (*a*) devient

$$\rho\left(h+\tfrac{1}{3}\alpha\right)=(22{,}899)\,u^2+(44{,}516)\,uu'+(19{,}576)\,u'^2;$$

en l'appliquant actuellement à ces quatre observations, et désignant toujours par e l'excès de chaque hauteur calculée sur la hauteur observée, on trouve

$$u=\tfrac{4}{5},\quad u'=\tfrac{1}{5},\quad h=20{,}495,\quad e=-0{,}024;$$
$$u=\tfrac{2}{3},\quad u'=\tfrac{1}{3},\quad h=19{,}166,\quad e=-0{,}004;$$
$$u+\tfrac{1}{2},\quad u'=\tfrac{1}{2},\quad h=17{,}677,\quad e=+0{,}017;$$
$$u=\tfrac{1}{3},\quad u'=\tfrac{2}{3},\quad h=16{,}361,\quad e=+0{,}011;$$

résultat qui présente un accord très remarquable entre la formule et l'expérience.

En comparant les densités des mélanges, on peut remarquer que ceux de l'eau et de l'alcohol éprouvent, à peu près, la même condensation que ceux de l'acide et de l'eau. Ainsi, la moyenne des densités 1,0000 et 0,8196 de l'eau et de l'alcohol, étant 0,9098, la densité du mélange par parties égales est 0,9415, ou plus grande de 0,0317; et, de même, la moyenne des densités de l'eau et de l'acide le plus concentré est 1,1845, quantité qui est surpassée de 0,0306 par la densité 1,2151 du mélange moyen.

---

§ VI. *Phénomène de l'Endosmose.*

(138). On doit à M. Dutrochet la découverte d'un phénomène très important, auquel il a donné le nom d'*endosmose*. Ce phénomène consiste en ce que si deux liquides différens sont séparés par une membrane, l'un des deux traverse cette cloison et va se mêler à l'autre, dont le niveau s'élève graduellement jusqu'à une hauteur considérable. M. Dutrochet a reconnu que l'endosmose peut encore avoir lieu lorsque la cloison membraneuse est remplacée par cer-

taines matières inorganiques, telles qu'une lame mince d'ardoise, par exemple. Il s'est assuré que ce phénomène n'est jamais accompagné de signes d'électricité que le *galvanomètre* puisse rendre sensibles. En l'attribuant à l'action capillaire, qui paraît être sa véritable cause, voici comment on en peut rendre raison d'une manière générale.

Appelons A et A′ les deux liquides. Soit OO′ un canal vide et d'un très petit diamètre, qui traverse l'épaisseur entière de la cloison ; O étant l'extrémité qui répond à A, et O′ à A′. Si les deux liquides ne sont pas de nature à s'élever, en vertu de l'action capillaire, dans un tube pareil à ce canal, ils ne pénétreront pas dans l'intérieur de OO′ ; ils deviendront convexes aux deux extrémités O et O′ ; et ils y seront arrêtés, quelle que soit l'inclinaison de la membrane, comme le mercure à la surface latérale d'un baromètre portatif, où l'on a pratiqué une très petite ouverture. Dans ce cas, l'endosmose n'aura pas lieu. Si, au contraire, les deux liquides sont susceptibles de mouiller la membrane, ou de nature à s'élever dans un tube de la même matière que ce corps, ils pénétreront dans l'intérieur du canal OO′. Ils y seront d'abord l'un et l'autre concaves ; mais quand ils se seront joints, ils auront une surface commune, de sorte que l'un d'eux demeurera plus ou moins concave, et l'autre deviendra convexe. Or, le mouvement continuera de A vers A′, ou de A′ vers A, selon que ce sera A ou A′ qui restera concave ; et, dans le premier cas, par exemple, A finira par traverser la membrane entière, et viendra se mêler à A′.

Pour déterminer, autant qu'il sera possible, lequel de ces deux cas aura lieu, menons, près du contour de la surface commune aux deux liquides, deux normales en-dehors de A, l'une à cette surface, et l'autre à celle du canal OO′. Soit φ l'angle compris entre ces deux droites, lequel sera obtus ou aigu, selon que A sera concave ou convexe. Supposons que les constantes H et F du n° 49 répondent au liquide A, et désignons par H′ et F′ ce que ces quantités deviennent relativement au liquide A′. Puisque, par hypothèse, les deux liquides s'élèvent dans un tube de la même nature que OO′, les quantités F et F′ seront négatives ; je les rem-

placerai par $-E$ et $-E'$, et en désignant par G une autre constante positive et dépendante de la matière des deux liquides, nous aurons, d'après le n° 69,

$$E' - E = G\cos\varphi;$$

équation qui fait voir que $\cos\varphi$ sera négatif ou positif, et que, par conséquent, le liquide A sera concave ou convexe, selon que E sera plus grand ou plus petit que E'. Si donc, pour fixer les idées, on suppose $E > E'$, ce sera le liquide A qui traversera le canal OO' et viendra se mêler à A'. Cela posé, quand E et E' sont respectivement moindres que H et H', les poids des deux liquides qui s'élèvent dans un même tube, de la même nature que OO', sont entre eux comme E et E' (n° 49). Le liquide A est donc alors le plus ascendant; mais si chacune des quantités E et E' surpasse la quantité correspondante H ou H', les poids élevés dans ce même tube sont les mêmes que si l'on avait seulement $E = H$ et $E' = H'$: ils sont entre eux comme H et H'. Or, la différence $E - E'$ étant positive, la différence $H - H'$ peut être positive ou négative; par conséquent, le liquide A n'est plus nécessairement celui des deux qui a le plus de tendance à s'élever par l'action capillaire. Ainsi, lorsque les deux liquides, avant leur jonction, coupent sous un angle aigu la surface du canal OO', c'est-à-dire quand on a $E < H$ et $E' < H'$, c'est toujours le plus ascendant qui l'emporte et qui chasse l'autre liquide après leur jonction; mais ce peut être le moins ascendant, quand ils sont, avant de se joindre, tous les deux tangens à la surface de OO'; ce qui est le cas de $E > H$ et $E' > H'$.

Lorsqu'une partie de A se sera mêlée à A', les quantités E' et G changeront. Je désignerai par E_1 et G_1 ce qu'elles deviennent relativement à ce mélange en contact avec le liquide A qui remplira le canal OO'; et si l'on représente, en même temps, par φ_1 ce que devient l'angle φ, on aura

$$E_1 - E = G_1\cos\varphi_1,$$

à l'extrémité O' du canal OO'. Dans cet état, le filet OO' du liquide A pourra supporter, à ses deux bouts O et O', une différence de pression proportionnelle à la différence $E_1 - E$, et en

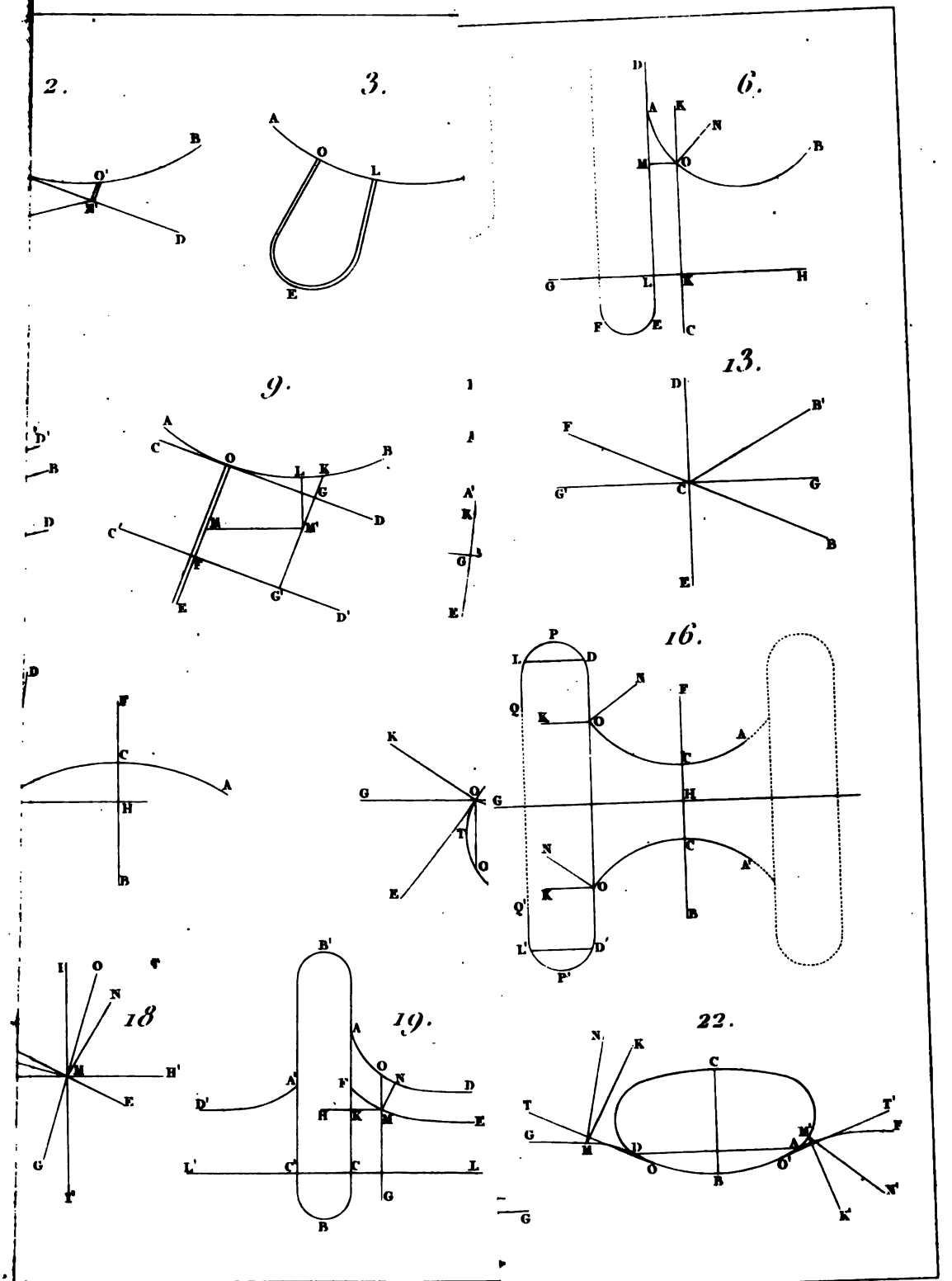
raison inverse du diamètre du canal OO′; et, conséquemment, le niveau du mélange de A et A′ pourra s'élever au-dessus du niveau de A, d'une quantité qui sera aussi en raison directe de $E_1 - E$, inverse du diamètre de OO′, et inverse des densités de ce mélange et de A.

Maintenant, si la membrane est traversée par un nombre extrêmement grand de canaux tels que OO′, on étendra à tous ces canaux ce qu'on vient d'appliquer à l'un d'eux; et le liquide A pénétrera par toutes celles de ces ouvertures qui satisfont à la condition $E > E'$. Quoique la matière de la membrane soit homogène, il ne sera cependant point impossible qu'à raison de la disposition différente de ses molécules le long de ces différens canaux, ou pour toute autre cause, la condition contraire $E < E'$ ait lieu, du moins pour une petite partie de ces ouvertures; alors il y aura simultanément, à travers cette membrane, un transport principal du liquide A dans A′, et un autre transport beaucoup moindre, de A′ dans A, ainsi que l'expérience paraît l'indiquer. D'après ce qu'on vient de dire, la différence de niveau, des deux côtés de la membrane, sera, toutes choses d'ailleurs égales, en raison inverse des diamètres des ouvertures qu'elle présente; en sorte que l'intensité du phénomène diminuera de plus en plus et pourra devenir insensible, à mesure que le tissu de la membrane sera de plus en plus relâché. La condition principale et essentielle du phénomène est la différence des deux liquides; il ne se produira jamais entre deux liquides de même nature, ou entre deux liquides qui jouiraient exactement des mêmes propriétés sous le rapport de l'action capillaire. Pour que la cloison qui sépare les deux liquides ne soit pas impropre à l'endosmose, il faudra que, d'après sa contexture, elle soit traversée par des canaux très étroits, allant d'une face à l'autre; circonstance qui se rencontre plus communément dans les membranes organiques. Mais, d'un autre côté, les liquides éprouveront le long de ces canaux un frottement très considérable, à cause de la petitesse de leurs diamètres; cette force pourra balancer l'action capillaire, et empêcher les deux liquides de pénétrer assez avant pour se joindre et prendre une surface commune, qui change en convexité la concavité de l'un d'eux; et, pour cette

raison, la trop grande épaisseur de la cloison peut être un obstacle à la production de l'endosmose.

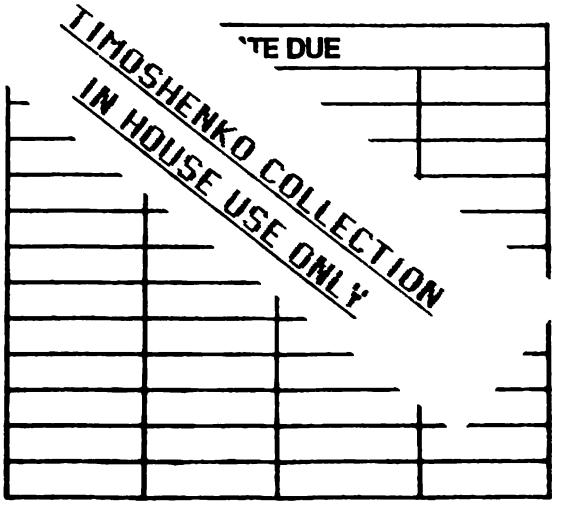
Je n'insisterai pas davantage sur ces considérations générales, qui prouvent, ce me semble, que les diverses circonstances du phénomène de l'endosmose, observées par M. Dutrochet, ne sont point incompatibles avec la théorie de l'action capillaire, et qu'il n'est pas nécessaire de recourir à des forces d'une autre nature, pour en trouver une explication satisfaisante.

FIN.



Gravé par N. L. Rousseau père.

300 .L2 1913 C.2
ioria das fonctions analytiq
Stanford University Libraries
6105 030 422 997



STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004